F 1130

113

2394

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIII — FASCICOLA 1

IANUARIE — MARTIE

1961

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. In limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec lamention „pentru BuletinulInstitutului")

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ BUCUREŞTI
1953

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIII — FASCICOLA 1

IANUARIE — MARTIE

1961

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*. Prof. Dr. *I. S. Antoniu*; Conf. *I. Berceanu*; Prof. Dr. *E. Bratu*; Prof. *Gh. Buzdugan*; Conf. *S. Călin*, cand. Șt. Th.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*; Acad. Prof. Dr. *Tr. Negrescu*; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*; Prof. *M. Postelnicescu*; Prof. Dr. *R. Rădulet*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. Dr. *T. Tănăsescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei R. P. R.

SUMAR

ȘTIINȚE SOCIALE

V. ROMAN — Consecințele social — economice ale revoluției tehnico-științifice contemporane și atitudinea clasei muncitoare și a oamenilor de știință față de această revoluție (II) 13

MATEMATICA

C. IONESCU - BUJOR — Asupra transformărilor corespondente (III) 33

ORGANIZAREA ȘI PLANIFICAREA ÎNTREPRIDERILOR

T. HOMOS, ST. BÎRLEA, GH. MĂRGĂRIT — Contribuții privind metodologia de calcul a capacității de producție pentru secțiile de prelucrări mecanice 49

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. TEOREANU, V. CÎMPU — Unele probleme privind hidrodinamica stratului fluidizat 83

CHIMIE

D. FARCAȘIU — Degradarea Hofmann a compușilor cuaternari de amoniu cu combinații organo-metalice . . . 93

REZISTENȚA MATERIALELOR

GH. BUZDUGAN, M. SARIAN, R. VOINEA, A. PETRE M. BLUMENFELD, T. PANA, E. BARBU — Dynamische Stabilität der Hängebrucken zur Uberführung von Gasrohrleitungen über Flüsse 107

TERMOTEHNICA

M. POSTELNICESCU, P. VEZEANU — Méthode grapho — analytique pour établier l'éfficacité des diverses répartitions des surfaces de chauffé par convection des chaudières à vapeur 135

MECANICA

A. I. SOLOVIOV — Измерительные свойства параллелограмма 149

ELECTRONICA

I. S. ANTONIU — L'emploi des séries de Fourier à termes complexes a l'étude du régime déformant 155
M. DRAGANESCU — Contributions the theory of the junction transistor at high injection levels 161

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

В. РОМАН — Общественно-экономические последствия современного научно-технического переворота и отношение рабочего класса и люди науки к этому перевороти . 13

МАТЕМАТИКА

К. ИОНЕСКУ-БУЖОР — О соответствующих преобразованиях (III) 33

ОРГАНИЗАЦИЯ и ПЛАНИФИКАЦИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

Т. ХОМОШ, СТ. БЫРЛЕА и ГХ. МЫРГЭРИТ — О способах расчёта обьёма производства для цехов механической обработки 49

ТЕХНОЛОГИЯ КИМИКИ

И. ТЕОРЕАНУ и В. ЧИМПУ — Некоторые вопросы динамики кипящего слоя 83

ХИМИЯ

Д. ФЭРКАШЮ — Тофманский распад четвертичных солей металло-органическими соединениями 93

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ГХ. БУЗДУГАН, М. САРИАН, Р. ВОЙНЕА, А ПЕТРЕ, М. БЛУМЕНФЕЛД, Т. ПАНА, Е. БАРБУ — Динамическая устойчивость подвесных мостов, поддерхсивающих газовые трубопроводы при переходе через реки . . 107

ТЕРМОТЕХНИКА

М. ПОСТЕЛНИЧЕСКУ, П. ВЕЗЕАНУ — Графоаналитический метод для определения эффективности распределения теплопередающих поверхностей паравых котлов. 135

МЕХАНИКА

А. И. СОЛОВЬЕВ — Узмерительные свойства параллелограмма 149

ЭЛЕКТРОНИКА

И. С. АНТОНЮ — Испосльзование комплексных рядов фурье для исследования деформируюшего режима . . 155
М. ДРЭГЭНЕСКУ — К вопросу о теории транзистория при высоких уровнях инжекции 161

CONTENTS

SOCIAL SCIENCES

V. ROMAN — The socio - economic consequences of the technical - scientific revolution of our days and the attitude of the working class and men and women of science towards this revolution 13

MATHEMATICS

C. IONESCU - BUJOR — Corresponding transformations . . 33

ORGANISATION AND PLANNING OF ENTREPRISES

T. HOMOS, ST. BÎRLEA, GH. MARGARIT — Contribution on the methods for computing the production capacities of mechanical processing departments 49

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. TEOREANU, V. CÎMPU — Some problemis regarding the hydrodynamics of the fluidized bed 83

CHEMISTRY

D. FARCAȘIU — Hofmann degradation of quaternary ammonium salts, with organometallic compounds . . . 93

STRENGTH OF MATERIALS

GH. BUZDUGAN ,M. SARIAN, R. VOINEA, A. PETRE, M. BLUMENFELD, T. PANA, E. BARBU — Dynamic stability of hanged bridges sustaining gas pipes over rivers 107

THERMODYNAMICS

M. POSTELNICESCU, P. VEZEANU — Graph - analytical method serving to establish the efficiency of the varions distributions of the heating surface by convection in steam boilers 135

MECHANICS

A. I. SOLOVIEV — Properties of the parallelogram device for measuring 149

ELECTRONICS

I. S. ANTONIU — Fourier's series with complex terms applied to studying of a distorting system 155
M. DRAGANESCU — Contribution to the theory of the junction transistor at high injection levels 161

SOMMAIRE

SCIENCES SOCIALES

V. ROMAN — Les conséquences sociales — economiques de la révolution technique — scientifique contemporaine et l'attitude de la classe ouvrière et des hommes de science envers cette révolution 13

MATHEMATIQUE

C. IONESCU - BUJOR — Sur les transformations correspondantes 33

ORGANISATION ET PLANIFICATION DES ENTREPRISES

T. HOMOS, ST. BÎRLEA, GH. MARGARIT — Contributions pour les méthodes de calcul des capacités de production pour la section mécanique 49

CHIMIE TECNOLOGIQUE

I. TEOREANU, V. CÎMPU — Quelques problémes concernant l'hydrodynamiques de la couche fluidifiée 83

CHIMIE

D. FARCAŞIU — La dégradation d'après Hofmann des sels quaternaires d'ammonium par des dérivés organo-metalliques 93

RESISTANCES DES MATERIAUX

GH. BUZDUGAN, M. SARIAN, R. VOINEA, A. PETRE, M. BLUMENFELD, T. PANA, E. BARBU — La stabilité dynamique des ponts suspendu qui soutiennent les conduites de gaz au passage par dessus les rivières . . . 107

TERMOTECHNIQUE

M. POSTELNICESCU, P. VEZEANU — Méthode - grapho - analytique pour établir l'efficacité des diverses répartitions des surfaces de chauffé par convection aux chaudières à vapeur 135

MECANIQUE

A. I. SOLOVIEC — Les propriétés permettant au mecanisme parallelogramme d'être utilisé pour mesures . . . 149

ELECTRIQUE

I. S. ANTONIU — L'enploi des séries de Fourier à termes complexes à l'étude du régime déformant 155

M. DRAGANESCU — Contribution à la théorie du transistor aux grandes niveau d'injections 161

INHALT

SOZIAL WISSENSCHAFTEN

V. ROMAN — Die Sozial - Ökonomischen Auswirkungen der technischwissenschaftlichen Revolution der gegenwart und die Einstellung der Arbeiterklasse und der Wissenschaftler zu dieser Revolution 13

MATHEMATIK

C. IONESCU - BUJOR — Über die entsprechenden Transformationen 33

DIE ORGANISIERUNG UND PLANIFIZIERUNG DER BETRIEBE

T. HOMOS, ST. BÎRLEA, GH. MARGARIT — Beiträge über die Rechungsmetoden der Productionskapazitäten für die Sektionen mechnischer Verarbeitugen 49

TEHNOLOGISCHE CHEMIE

I. TEOREANU, V. CÎMPU — Einige Probleme über die Hydrodynamik der Wirbel Schicht 83

CHEMIE

D. FARCAȘIU — Der Hofmannsche Abbau der quartären Ammoniumsalze durch Organometall — verbindungen . 93

FESTIGKEITSLEHRE

GH. BUZDUGAN, M. SARIAN, R. VOINEA, A. PETRE, M. BLUMENFELD, T. PANA, E. BARBU — Dynamische Stabilität der Hängebrucken zur Überführung von Gasrohrleitungen über Flüsse 107

THERMOTECHNIK

M. POSTELNICESCU, P. VEZEANU — Vrapho - analytische Methode, zweks Feststellung der Effikzität verschiedener Verteilungen der Erwärumgsfächen in Dampfkesseln . 135

MECHANIK

A. I. SOLOVIEV — Die Messeigenschaften des Parallelogram — Mechanismus 149

ELEKTRONIK

I. S. ANTONIU — Untersuchung des verzerrungsbettriebs mittels komplexer Fourier — Reihen 155
M. DRAGANESCU — Beitrage zur Theorie des Transistors bei hohen Injektionsniaus 161

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

ȘTIINȚE SOCIALE

II. CONSECINȚELE SOCIAL-ECONOMICE ALE REVOLUȚIEI TEHNICO-ȘTIINȚIFICE CONTEMPORANE ȘI ATITUDINEA CLASEI MUNCITOARE ȘI A OAMENILOR DE ȘTIINȚĂ FAȚĂ DE ACEASTĂ REVOLUȚIE *

VALTER ROMAN

Un aspect deosebit de important al revoluției tehnico-științifice contemporane constituie *consecințele* sale *sociale-economice*. Această problemă preocupă foarte mult în ultimul timp lumea burgheză, și acest lucru este lesne de înțeles. Noul salt calitativ în domeniul științei și tehnicii, această nouă revoluție tehnico--științifică cu adevărat grandioasă prin amploarea sa a dus la mărirea excepțională a puterii omului asupra naturii. Folosirea efectivă a acestor forțe noi în interesul societății poate fi înfăptuită însă *numai* în anumite condiții social-economice ; ea depinde, în primul rînd, de relațiile de producție dominante într-o societate sau alta, într-o țară sau alta.

Pe cînd relațiile de producție socialiste permit folosirea posibilităților colosale ale revoluției tehnico-științifice pentru dezvoltarea producției în interesul societății, relațiile de poducție capitaliste pun piedici serioase folosirii acestor posibilități. Într-un fel se prezintă deci *consecințele social-economice ale revoluției tehnico-științifice contemporane în capitalism* și cu totul altfel în *socialism*.

Una din consecințele principale ale revoluției tehnico-științifice contemporane și în mod deosebit a automatizării producției în capitalism este *întărirea puterii monopolurilor,* o concentrare și mai mare a producției și a capitalului în mîinile lor, ele folosind în interesele lor și statul subordonat lor. În capitalism revoluția tehnică, respectiv automatizarea duce în mod inevitabil la concentrarea și mai accentuată a producției în marile uzine bine echipate și cu procese tehnologice noi. Automatizarea proceselor de producție, avînd în vedere că necesită mari investiții de capital, nici nu poate fi înfăptuită decît în marile întreprinderi industriale.

Un aspect deosebit al concentrării în capitalism reprezintă concentrarea în domeniul cercetărilor științifice, adică în acel domeniu care stă

* Comunicare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București — decembrie 1960 (continuare din numărul 4/1960).

tocmai la baza revoluției tehnico-științifice contemporane. De ex. din suma totală de 8,2 miliarde dolari destinată cercetărilor științifice și perfecționărilor tehnice în anul financiar 1956/57, 76% revenea marilor monopoluri [1]. Este interesant de remarcat tot atunci că peste jumătate din toate cercetările tehnico-științifice reprezintă cercetările din domeniul militar.

Revoluția tehnico-științifică se desfășoară și în țările capitaliste, ea are însă aci un caracter contradictoriu. Ea se dezvoltă stihinic și inegal. Concurența și cursa după profituri cît mai mari sînt stimulii progresului tehnico-științific în unele întreprinderi, dar tot atunci ele sînt și bariere de netrecut pentru aducerea întregului front al dezvoltării tehnice la nivelul realizărilor și indicilor celor mai înalți. Folosirea capitalistă a mașinilor limitează posibilitățile dezvoltării automatizării. Aceste limite sînt determinate de proprietatea privată asupra mijloacelor de producție și de legea plusvalorii. După socoteala însîși a economiștilor americani, în S.U.A. pot fi automatizate nu mai mult decît 16% din toate procesele de producție. În acest fel rezultă clar că progresul tehnic, procesul de automatizare în capitalism se dezvoltă în anumite limite. Numai în socialism, unde singurul scop al revoluției tehnico-științifice este ridicarea continuă și nelimitată a producției bunurilor materiale, automatizarea are posibilități nelimitate de dezvoltare și de aplicare a ei pe scara întregii economii naționale.

Faptul că stimulul principal al progresului tehnico-științific în capitalism este profitul cît mai mare și nu grija pentru ușurarea muncii lucrătorilor, pentru „bunăstarea generală" — după cum încearcă să dovedească propaganda burgheză, este recunoscută în mod cinic de unii reprezentanți ai cercurilor oligarhice din S.U.A. „Profiturile reprezintă stimuli pentru progresul economic, cauza principală a organizării majorității afacerilor riscante" [2].

Reultatele progresului tehnic, ale creșterii productivității muncii le culeg monopolurile sub forma unor profituri crescînde. Astfel numai în 1959 profiturile ale 3331 de corporații, care au introdus într-un fel sau altul automatizarea, a fost de 21,2 miliarde dolari, adică cu 18% mai mare decît în 1958. Aci trebuie amintit și faptul că una din rezultatele revoluției tehnico-științifice respectiv a automatizării este lichidarea tot mai accentuată a întreprinderilor mici și mijlocii.

Creșterea profiturilor este însă numai o latură a consecințelor automatizării capitaliste. Această creștere este însoțită, în mod organic, de *reducerea salariului muncitorilor* cît și de creșterea gradului lor de exploatare. Acest lucru au recunoscut chiar și unii reprezentanți ai monopolurilor. Așa bună oară la cea de-a 40-a sesiune a Organizației Internaționale a Muncii (1957) însuși directorul său general a recunoscut că drept urmare a noii organizări a muncii în întreprinderile automatizate din Germania federală au fost introduse noi norme și categorii de

[1] „Statistical Abstract of the U.S.A. 1958" New York, 1959, p. 500.

[2] „First National City Bank Monthly Letter", New York, August 1958, p. 88

salarizare care au dus la reducerea salariului muncitorilor. Tot atunci crește intensificarea muncii. Institutul de cercetări științifice din Stratford (S.U.A.) arată că în întreprinderile automatizate și semiatomatizate munca este de 2—3 ori mai intensivă decît înainte. În uzinele „Lincoln-Mercury" muncitorul efectuează pînă la 2500 de mișcări pe oră, ceea ce duce la extenuarea organismului într-un ritm rapid [1]. Cum rezultă dintr-o altă știre o firmă semiautomatizată, după concedierea a 20% din munictori ea a fost în stare să mențină același volum de producție ca înainte „deși nici o operație n-a fost schimbată" [2]. La uzinele de automobile „Renault" (Franța) *o mie* de muncitori au produs în 1955, 5360 de mașini, iar în 1959 8190 de mașini.

Un aspect deosebit de grav al progresului tehnic în capitalism, cu consecințe politice încalculabile pentru capitaliști, este *creșterea șomajului cronic,* pierderea accentuaă a cuceririlor sociale; acestea ducînd la adîncirea contradicțiilor antagonice dintre capital și muncă. Șomajul crescînd este fără îndoială consecința cea mai gravă a revoluției tehnico-științifice contemporane în ceea ce privește producția. În S.U.A. se vorbește în ultimul timp foarte mult despre așa zisul șomaj „tehnologic" care pe lîngă faptul realmente existent al unui nou fel de șomaj determinat de dispariția unor serii de profesiuni în urma automatizării este, în fond, o încercare de a ascunde cauzele profunde, social-economice, ale șomajului în masă și în continuă creștere; încercare de a arunca vina pentru șomaj pe tehnica însăși și nu asupra folosirii ei capitaliste. Introducerea tehnică perfecționată în întreprinderile capitaliste înseamnă creșterea productivității muncii, înlocuirea tot mai accentuată a forței vii a muncitorului prin mașini, înseamnă deci creșterea compoziției organice a capitalului, scurtarea ciclurilor, reducerea cererii pentru brațe de muncă. Introducerea automatizării ridică la un grad și mai înalt aceste consecințe.

Realitățile lumii capitaliste arată acest lucru. După cum scria revista engleză „Electron", în numărul său din aprilie 1957, „singurul lucru ce au primit muncitorii de la automatizare este concedierea". Conform presei americane, drept urmare a introducerii automatelor în uzina nr. 2 „Warepool corporation" (statul Indiana) numărul muncitorilor în decurs de trei ani (1956—59) s-a redus de la 7700 la 5500. La compania de automobile „Crysler corporation", după unificarea a două uzine se va produce mai multe mașini cu 3500 de muncitori decît în două uzine separate cu 6000. În toate uzinele din Evanrville numărul muncitorilor, tot datorită automatizării, s-a redus în decurs de doi ani (Martie 1957—martie 1959) de la 32.238 la 24.938 [3]. Cunoscuta companie de aviație „Douglas Aircraft" a redus în acest an numărul muncitorilor de la 72 la 65 mii [4].

[1] Cum au arătat cercetătorii americani H. și A. Sommers, datorită intensității excepționale a muncii, în S.U.A. la fiecare 3 minute moare sau devine invalid cîte un muncitor și la fiecare 11 secunde un muncitor se traumatizează.

[2] „The Wall Street Journal" 24 februarie 1959.

[3] După datele publicate în numărul din 22 august 1959 al ziarului „The Wall Street Journal".

[4] „American Machinist" 22 februarie 1960, p. 85.

Procesul de îndepărtare a muncitorilor din procesul de producție se dovedește a fi, în condițiile ciclului postbelic, contemporan (în condițiile automatizării crescînde) un fenomen care însoțește nu numai perioada crizelo economice, ci și perioada de după crize, ceea ce este desigur un fenomen nou. Conform presei de specialitate din S.U.A. în ianuarie 1960 au existat 4.150.000 de șomeri completi, adică 6,1% a forțelor de muncă civile. Acest procent a fost în anii 1953, 2,9% și în 1956 4,2% [1].

Un alt aspect negativ al consecințelor revoluției tehnico-științifice contemporane în capitalism este *schimbarea structurii clasei muncitoare și în general al structurii de clasă* în țările capitaliste dezvoltate. Această schimbare se manifestă în primul rînd prin creșterea procentului de muncitori care nu prestează muncă fizică („white collar") a muncitorilor neproductivi și reducerea relativă a numărului muncitorilor productivi, care prestează munca fizică („blue collor").

Revoluția tehnico-științifică conteporană respectiv automatizarea determină dispariția unor ramuri industriale și apariția altora noi. Aceasta are, între altele, drept consecință că unele profesii dispar și apar altele noi. Aceasta pune în același timp și problema calificării, respectiv a recalificării muncitorilor.

Problema — care se discută aprig în țările capitaliste — dacă automatizarea duce sau nu la ridicarea calificării muncitorilor nu a găsit un răspuns unic din partea economiștilor burghezi. Statisticile vorbesc însă de la sine. Conform datelor oficiale americane în S.U.A. în decurs de 8 ani (1950—1958), numărul lucrătorilor neproductivi („white coller") din comerț, deservire, aparatul de stat a crescut de la 16 la 20 milioane [2], adică cu 25%, pe cînd numărul lucrătorilor muncii fizice a crescut de la 31,7 la 33 milioane adică numai cu 4% [3]. Deși interpretarea burgheză a acestui fenomen este că în acestfel crește clasa mijlocie și dispare diferența de clasă (cu toate consecințele politice pozitive pentru burghezi și capitalism), adevărul este că odată cu creșterea numărului muncitorilor care nu prestează muncă fizică crește nu clasa mijlocie, ci clasa muncitoare. În același timp se reduce și numărul muncitorilor aristrocrați care fac parte din mica burghezie [4]. Și situația funcționarilor de birou se schimbă simțitor. Numai în 1958 numărul lor s-a redus cu 2,5%, această reducere afectînd, în primul rînd, pe cei din industrie. Toate acestea duc nu la împăcarea contradicțiilor de clasă, ci la ascuțirea lor.

---

[1] „Political Affairs", iulie 1959, p. 9.

[2] În Germania occidentală, în perioadele 1939—1950, de la 9,5 la 11,2 milioane.

[3] — „Economic Notes". August 1959, p. 3.

[4] Fenomenul descreșterii treptate a claselor mijlocii și a creșterii numerice a clasei muncitoare rezultă și din următoarele date. Greutatea specifică a salariaților în raport cu populația activă a S.U.A. a crescut, în perioada 1929—1950, de la 63% la 82,1%; în Anglia la 90%, în Germania occidentală la 70%, în Franța la 64,3%, în Canada și Australia la 80%.

În acest fel rezultă că *revoluția tehnico-științifică contemporană* și în particular automatizarea, în capitalism se dezvoltă într-un mod contradictoriu, este frînată de însuși natura privat-capitalistă a producției și determină întărirea caracterului inegal și anarhic al folosirii rezultatelor ei; *duce la întărirea monopolurilor, la creșterea profiturilor lor, la exploatarea accentuată a muncitorilor și intensificarea extremă a muncii; duce la creșterea șomajului cronic, la schimbarea structurii clasei muncitoare, la ascuțirea contradicțiilor de clasă, a contradicțiilor dintre muncă și capital.* În condițiile capitalismului — se spune în Declarația consfătuirii reprezentanților partidelor comuniste și muncitorești de la Moscova, din noiembrie 1960, — automatizarea și „raționaliarea" aduc noi calamități oamenilor muncii.

Cu totul altele sînt *consecințele social-economice ale revoluției tehnico-științifice contemporane în socialism.* Asupra cîtorva mai importante ne vom opri aci. Datorită relațiilor de producție socialiste revoluția tehnico-științifică are posibilități nelimitate de dezvoltare și într-un ritm rapid ceea ce are drept consecință creșterea continuă a *productivității muncii sociale.* Or aceasta este tocmai acel factor (principal) care determină creșterea continuă a bunurilor materiale, necesare (în primul rînd) pentru construirea socialismului, construirea comunismului.

Este cunoscut rolul productivității muncii în dezvoltarea societății omenești, importanța pe care i-au acordat-o clasicii marxism-leninismului în construirea societății socialiste, comuniste. Este știut de asemenea că de-a lungul secolelor factorii care au influențat, determinat în principal sau cu precădere ridicarea productivității muncii au fost diferiți în epoci istorice diferite. Astfel în societatea sclavagistă acest factor a fost forța fizică a omului și a animalelor, în producția manufacturieră factorul principal (nu și unic) a fost diviziunea muncii, iar în condițiile marei producții industriale factorul principal în creșterea productivității muncii devine știința și tehnica. Aceasta datorită faptului că forța fizică a omului se înlocuiește tot mai categoric de către forțele naturii, ceea ce se înfăptuiește tocmai cu ajutorul științei. Cum spunea Marx: *„știința pune forțele naturii în slujba muncii"* [1]. Știința acționează asupra productivității muncii atît prin intermediul producătorilor nemijlociți ai bunurilor materiale, fără însușirea cunoștințelor științifice de către aceștia neputînd avea loc producția modernă [2], cît și prin intermediul ridicării productivității factorilor materializați ai producției (uneltele de muncă, tehnica).

Revoluția tehnico-științifică contemporană reprezentînd un salt în procesul de transformare a forțelor materiale ale naturii în forțe de producție sociale, reprezintă în același timp un salt nou și deosebit de important în influențarea, ridicarea de către aceste mari realizări ale

[1] — K. Marx, F. Engels. Opere alese. Vol. I, E.S.P.L.P., 1955, p. 438.

[2] — Marx spune: *„Gradul de iscusință a populației existente, — constituie întotdeauna o premiză a întregii producții, deci principala acumulare de avuție; principalul rezultat conservat al muncii anterioare, rezultat care există însă chiar în munca vie* (K. Marx: „Teorii asupra plusvalorii" Vol. III, Ediția rusă, 1936, pag. 229).

științei și tehnicii, a productivității muncii. Această influențare are un efect cu totul deosebit în socialism unde consecințele ridicării productivității muncii sociale nu sînt șomajul și mizeria crescîndă, ci crearea unui belșug de bunuri materiale, ridicarea nivelului de trai al oamenilor muncii cu reducerea concomitentă a orelor lor de muncă [1].

Marile realizări științifice și tehnice duc la o nouă *modificare* radicală a *caracterului muncii sociale,* ceea ce presupune și schimbarea esențială a caracterului relațiilor dintre om și tehnică, a caracterului participării omului la procesul de producție. Aceasta se manifestă în primul rînd, prin faptul că un șir de profesii istovitoare și periculoase au și fost suprimate în mare măsură, procesul acesta continuîndu-se neîntrerupt. Perspectivele acestui proces sînt dispariția integrală a muncii la presiuni și temperaturi înalte. Muncitorul își va folosi tot mai puțin forțele sale fizice, va participa tot mai puțin în procesele tehnologice propriu zise și se va concentra tot mai mult pe dirijarea proceselor tehnologice, pe conducerea generală a procesului de producție, la întocmirea programelor și regimurilor proceselor tehnologice, pe chibzuirea și traducerea în viață a unor idei, invenții noi în tehnică. Cu dezvoltarea automatizării forța fizică și îndemînarea muncitorului (factori deosebit de importanți în trecut) exercită o influență tot mai mică asupra eficacității procesului de producție. O importanță tot mai mare primește gradul de tehnicitate a muncii. Muncitorul încetează în acest fel, să mai fie un apendice, un sclav al mașinii.

Caracterul calitativ nou al producției industriale determinată de realizările, într-adevăr fantastice, ale revoluției tehnico-științifice contemporane în special în domeniul automatizării și chiberneticii constă deci în aceea că se trece, treptat, la predarea (transferarea) în afară de muncă fizică și arta muncitorului [2] și a altor funcții a omului în procesul de producție către mașini și aparate, respectiv și a funcțiilor de conducere și control și în al doilea rînd că — alături de înlocuirea acestor funcții fizice a omului — se vor înlocui, din ce în ce mai mult, și unele funcții ale muncii intelectuale ale omului prin mașini.

Acest fenomen se înregistrează și în capitalism, aci el are însă un caracter limitat și contradictoriu. Numai în condițiile socialismului marile realizări ale științei și tehnicii duc însă realmente la schimbarea caracterului muncii, eliberează pe muncitorul de muncile grele, istovitoare, periculoase, duce la ștergerea deosebirilor esențiale dintre munca calificată și necalificată, duce la ștergerea hotarelor dintre munca fizică și cea intelectuală. Schimbarea caracterului muncii în capitalism duce doar la adîncirea deosebirii dintre munca fizică și intelectuală. Numai în condițiile socialismului se eliberează muncitorul realmente din situația de apendice al mașinii, căci eliberarea sa, luarea în stăpînire de către

[1] — Se va înfăptui deci previziunea genială a lui Marx că societatea viitoare va începe să-și măsoare avuția nu prin timpul de muncă, ci prin timpul rămas liber în afara producției.

[2] — Marx spune: *„În sistemul automat talentul muncitorului este încetul cu încetul înlăturat"* („Capitalul" vol. I, Ed. Politică, 1957, pag. 446).

el a mașinii nu se limitează numai la aspectul pur tehnic — cum este cazul în capitalism, — ci și la cel economic, clasa muncitoare fiind stăpîna tuturor mijloacelor de producție. Numai în acest fel muncitorul va avea o atitudine plină de entuziasm și inițiativă față de muncă, va fi adînc cointeresat în eficacitatea producției automatizate, devine realmente stăpînul liber al mașinii, al producției. Cum spunea Marx: *„imperiul libertății... se găsește, deci, prin firea lucrurilor... în afara sferei de producție materială propriu zisă,* se găsește acolo unde pe baza acestei producții *începe dezvoltarea forței omenești dezvoltare care este considerată ca scop în sine"* [1].

Tot aci trebuie vorbit și despre anumite *schimbări în profilul personalului tehnico-ingineresc,* activitatea căruia devine mai bogată, mai multilaterală, complexă și, desigur, mult mai interesantă și creatoare decît înainte. Tot atunci are loc, într-o oarecare măsură, apropierea diferitelor profesii inginerești.

Datorită acestor schimbări, adică atît în privința profilului personalului tehnico-ingineresc, cît și în activitatea profesională a muncitorului se șterg treptat, deosebirile esențiale în nivelul tehnic și cultural al inginerilor, tehnicienilor și muncitorilor. În U.R.S.S. acest tip de muncitor există într-o măsură destul de mare. El și-a făcut apariția și la noi, în special în metalurgie și energia electrică. Tendința apropierii crescînde (aceasta fiind un proces îndelungat) a caracteristicilor personalului tehnico-ingineresc cu cele ale muncitorilor este un rezultat al revoluției tehnico-științifice contemporane, care se manifestă însă cu toată puterea numai în socialism.

Un efect cu totul particular și propriu condițiilor socialiste este că revoluția tehnico-științifică contemporană duce, treptat, *la trecerea* de la principiul socialist al repartiției (după muncă) *la principiul comunist al repartiției* (după nevoi). Datorită netezirii deosebirilor esențiale în ceea ce privește complexitatea și eficacitatea proceselor de producție (drept urmare a progresului tehnic), se șterge, treptat, deosebirea între aportul diferiților muncitori în crearea produselor materiale și, în consecință, se șterge, treptat, deosebirea în gradul de satisfacere a necesităților materiale, care se face încă după principiul repartiției după muncă și care se va face pe viitor, după criteriul unic al timpului de muncă. Iar aceasta după părerea economiștilor sovietici va duce la dispariția relațiilor de schimb bănești.

Rezultă în acest fel că *revoluția tehnico-științifică contemporană* și în particular, revoluția tehnică (automatizarea, chibernetica) *în socialism* se dezvoltă în mod nelimitat stimulat de natura socialistă a relațiilor de producție și de obiectivele măreție, umanistice ale comunismului, *duce la ușurarea muncii, la reducerea continuă a orelor de muncă, la îmbunătățirea crescîndă, redicală a situației materiale și la ridicarea continuă a nivelului tehnico-cultural al celor ce muncesc; duce la ridicarea simțitoare a productivității muncii sociale, la modificarea radicală a caracterului*

[1] Karl Marx „Capitalul" vol. III. E.S.P.L.P., 1955, pp. 772—773.

muncii sociale, la trecerea treptată la principiul comunist al repartiției; duce la înflorirea nemaipomenită și triumful strălucitor al ideilor și relațiilor comuniste, contribuie la trecerea mai rapidă a societății omenești de la capitalism la socialism.

★

Revoluția tehnico-științifică contemporană este unică și indivizibilă, cum unică și indivizibilă este și însăși știința, (care nu poate fi împărțită în știință socialistă și știință capitalistă). Condițiile social-economice (interne și internaționale) în care se dezvoltă revoluția tehnico-științifică contemporană (respectiv în lumea socialistă și cea capitalistă) sînt însă diferite. De aceea și ritmul dezvoltării, rezultatele și perspectivele acestei revoluții sînt diferite în cele două sisteme sociale mondiale diferite.

Caracterul unitar și indivizibil al revoluției tehnico-științifice, faptul că progresul tehnico-științific, revoluția tehnică-științifică contemporană are loc și în capitalism nu înseamnă însă cîtuși de puțin că capitalismul, imperialismul și-ar fi schimbat natura, esența, conținutul său, că teza marxistă-leninistă cu privire la stadiul de putrefacție a capitalismului nu și-ar fi păstrat justețea. Capitalismul, imperialismul nu și-a schimbat natura nici în era atomică, cosmică și a automaticii, el a rămas ce a fost — o orînduire care și-a trăit traiul, care e condamnat la pieirea inevitabilă și care dispare de pe scena istoriei, un sistem social-economic care reprezintă o frînă în dezvoltarea omenirii. Ceea ce *s-au schimbat* însă sînt *condițiile istorice în care capitalismul își trăiește ultimile sale „ore"*.

Sînt cu totul eronate deci afirmațiile unor ideologi burghezi și a reformiștilor și revizioniștilor contemporani conform cărora revoluția tehnico-științifică contemporană ar duce la însănătoșirea capitalismului, la înflorirea producției capitaliste, la creșterea nivelului material și cultural al popoarelor din țările capitaliste, la lichidarea mizeriei și foametei. Tot așa de stranii și nejuste sînt afirmațiile unui alt grup de apologeți ai capitalismului cum că revoluția tehnico-științifică contemporană ar duce de la sine, fără revoluție socialistă la transformarea spontană a capitalismului într-o nouă societate, la „trecerea automată" a capitalismului la socialism *. Toți aceștia „fundamentează" afirmațiile lor prin analogia pe care încearcă s-o facă între revoluția industrială a secolelor XVIII—XIX și revoluția tehnico-științifică contemporană. Ei afirmă că la fel cum mașina cu aburi a dus nu numai la schimbări radicale a tehnicii, ci și la schimbări radicale ale orînduirii social-economice, tot așa și astăzi energia atomică, automatizarea duce în mod

* Astfel publicistul vest-german Sternberg înfățișează progresul tehnic în sine drept o revoluție socială. El scrie: „Progresul tehnic care se exprimă prin automatizare, înseamnă în același timp o revoluție socială, deși ultima se înfăptuiește treptat și fără sînge". Vezi F. Sternberg: „Die militärische und die industrielle Revolution". Berlin und Frankfurt a /M. 1957.

automat la revoluție atît în tehnică cît și în relațiile sociale[1]. Aceste „teorii" poartă denumirea de „a doua revoluție industrială", sau „determinismul tehnologic".

Firește nimeni nu se va încumeta să nege (de altfel aceasta s-a arătat la începutul articolului) strînsa legătură ce există între marile descoperiri tehnico-științifice și dezvoltarea socială. Numai că (și aci este tot șiretlicul apologeților capitalismului) pe cînd marile descoperiri tehnico-științifice ale secolului XVIII—XIX au dus realmente la victoria orînduirii capitaliste (pe atunci progresiste) asupra feudalismului, revoluția tehnico-științifică contemporană nu mai poate duce nici la însănătoșirea acelei orînduiri care a învins cu aproape două secole în urmă și nici la transformarea sa automată prin sine însăși în socialism (fără revoluția socialistă — pașnică sau nepașnică). Burghezia are nevoie de teoria reacționară a „determinismului tehnologic" pentru a sugera muncitorilor ideea posibilității eliberării lor sociale fără lupta împotriva orînduirii capitaliste, fără revoluția socialistă.

Întreaga scamatorie a apologeților e cît se poate de șubredă căci — după cum se știe — baza relațiilor de producție este proprietatea. Or tocmai la aceasta nu renunță capitaliștii. Și dacă deci nu se schimbă prorpietatea cum se schimbă oare relațiile de producție capitaliste? Nu, teoriile de mai sus nu pot induce mult timp și multă lume în eroare. E clar că numai prin schimbarea radicală a relațiilor de producție se poate trece de la capitalism la socialism. E clar că revoluția tehnico-științifică contemporană duce nu la socialism „în cadrul capitalismului", ci la ascuțirea contradicției antagonice dintre forțele de producție și relațiile de producție, la intensificarea exploatării, la îndepărtarea din producție a unui număr tot mai mare de muncitori. Deși revoluția tehnico-științifică ușurează într-o anumită măsură, trecerea omenirii pe plan mondial de la capitalism la socialism totuși numai prin îndepărtarea revoluționară a capitalismului se vor putea pune integral marile realizări ale revoluției tehnico-științifice contemporane în slujba intregii societăți. Eliberarea energiei atomice va servi cu adevărat omenirii numai odată cu eliberarea omenirii din lanțurile exploatării.

Aceasta desigur, nu înseamnă cum s-a mai arătat, că în cadrul capitalismului n-ar avea loc un anumit progres tehnic și științific. Acest progres are loc și datorită faptului că în condițiile întrecerii celor două sisteme mondiale — socialist și capitalist — capitaliștii se văd obligați să aibe grijă de anumite perfecțiuni și aceasta datorită fricii de socialism, de înflorirea rapidă a vieții în lagărul socialist, a influenței acesteia asupra popoarelor din țările capitaliste.

Faptul că capitalismul n-a dispărut dintr-o dată, că socialismul nu s-a născut dintr-o dată pe tot globul pămîntesc[2], faptul că capitalismul

[1] Astfel în „Buletinul internațional al științelor sociale" (No. 1—1958), editat de UNESCO, se afirmă (de către Friedmann, Finrt, Hass, Grosier) că automatizarea și mecanizarea producției contemporane înseamnă o nouă revoluție industrială, care, spre deosebire de revoluția industrială din secolele XVIII și XIX va duce la soluționarea tuturor antagonismelor sociale în cadrul capitalismului.

[2] Cum de altfel nici o formațiune social-economică nu s-a născut dintr-odată, schimbarea uneia cu alta fiind un proces istoric îndelung cu caracter evolutivo-revoluționar.

mai supraviețuiește alături de lumea socialistă în plin avînt vijelios în toate domeniile vieții materiale și spirituale — aceasta a creat anumite condiții și împrejurări de care capitalismul nu numai că nu se poate izola dar de care el trebuie chiar să țină cont dacă mai vrea să-și prelungească existența.

Nu încape îndoială că coexistența pașnică și întrecerea dintre cele două sisteme — social-economice mondiale diametral opuse (deși formal și oficial aceasta nu este acceptată de lumea capitalistă, dar care există totuși într-un anumit sens în realitate) obligă pe capitaliști să ia o serie întreagă de măsuri, să ducă chiar o anumită politică, în special în domeniul tehnico-științific, menită să împiedice punerea în evidență a caracterului retrograd al capitalismului ca atare (ca sistem). E cît se poate de clar tot atunci că dacă capitalismul ar fi și astăzi un sistem unic multe din marile descoperiri tehnico-științifice ale ultimului timp n-ar fi avut loc, omenirea ar fi mult mai departe de înfăptuirea zborului în cosmos, a pătrunderii iminente în micromicrocosmos de dezlegarea tainei vieții și altele.

E cît se poate de evident că între lumea socialismului și capitalismului are loc un anumit „osmos" multilateral, sui generias ; proces în cadrul căruia socialismul acționează cu o putere și vigoare crescîndă asupra lumii capitaliste, iar puterea de acțiune, de influențare a lumii capitaliste scade vertiginos.

În primii ani ai puterii sovietice Lenin a arătat că socialismul va exercita o influență crescîndă asupra situației internaționale și aceasta prin realizările sale economice. Lenin spunea : *„În momentul de față principala noastră înrîurire asupra revoluției internaționale o exercităm prin politica noastră economică... De aceea problemele construcției eoconomice capătă pentru noi o importanță absolut excepțională"* [1].

Forța de atracție a socialismului în lume a crescut astăzi nemăsurat. Contradicția (întrecerea) dintre cele două sisteme mondiale are o influență puternică asupra întregului mers al istoriei și exercită influență și asupra ascuțirii contradicțiilor din sînul societății capitaliste. Și această influență este în continuă creștere, în raport direct proporțional cu aceste succese ale țărilor socialiste. Foarte plastic s-a exprimat N. S. Hrușciov în această privință : *„succesele țărilor socialiste reprezintă o asemenea rachetă puternică cu mai multe trepte, care neapărat va plasa popoarele întregii lumi pe orbita comunismului"* [2].

Schimbarea continuă, într-un ritm din ce în ce mai rapid și cu caracter ireversibil a raportului de forțe dintre socialism și capitalism, determinată de întrecerea, depășirea din ce în ce mai evidentă a capitalismului de către socialism în cele două domenii hotărîtoare ale activității umane — producția materială și știința și tehnica, vor exercita o influență crescîndă a lumii socialismului asupra proceselor adînci care au loc în lumea capitalistă.

---

[1] — V. I. Lenin : Opere. Vol. 32. E.S.P.L.P., 1956. p. 441.

[2] — Congresul al III-lea al P.M.R. Editura Politică, 1960, pag. 205.

Este cît se poate de limpede că întrecerea dintre cele două sisteme mondiale social-economice are un efect de accelerare asupra progresului revoluției tehnico-științifice în general, la fel cum revoluția tehnico-științifică contemporană influențează și ușurează, la rîndul ei, marile transformări sociale, contemporane, trecerea de la capitalism la socialism pe plan mondial. Aceasta însă nu înseamnă de loc — și acest lucru trebuie subliniat cu cea mai mare tărie — că această interinfluențare dintre cele două sisteme social-politice diferite ar avea un efect hotărîtor asupra *structurii* orînduirii sociale respective. Dezvoltarea țărilor capitaliste este determinată de legi interne de contradicțiile interne și de lupta clasei muncitoare determinată de aceste contradicții. Capitalismul rămîne capitalism; socialismul rămîne socialism. Capitalismul dispare nu drept consecință a influențelor din afară oricît de puternice ar fi ele, ci drept rezultat al dezvoltării interne în cadrul căreia nu știința este factorul primordial și hotărîtor dar al cărei rol totuși este foarte mare și crește neîncetat.

E cît se poate de eronat deci teza enunțată de unii sociologi burghezi cum este cea a sociologului francez R. Raron, în privința schimbării treptate a socialismului în sensul apropierii, evoluării sale spre capitalism [1], sau teza lui A. Angelopulos în ceea ce privește influența marilor realizări tehnice și științifice în direcția *„apropierii capitalismului și a comunismului.* Această apropiere va avea loc prin *„socializarea" capitalismului* și prin *„democratizarea"* (autorul înțelege aci „capitalizare") *comunismului".* În acest fel energia atomică ar deveni trăsătura de *unire a celor două sisteme opuse actualmente"* [2].

Pentru a da o oarecare satisfacție lui R. Raron în ceea ce privește schimbarea, evoluarea socialismului putem spune că socialismul într-adevăr se schimbă, evoluiază, însă nu în direcția capitalismului, ci în direcția comunismului. Aceiași satisfacție trebuie dată și lui Angelopulos în sensul că capitalismul într-adevăr se apropie, însă nu de socialism, ci de inevitabila sa prăbușire.

Nu este greu de văzut caracterul eronat și reacționar al unor asemenea afirmații, care nu sînt în esență altceva decît rezultatul înțelegerii greșite a rolului tehnicii în dezvoltarea societății. Aceasta desigur în cazul cînd am avea de-a face cu oameni bine intenționați și nu servitori conștienți ai burgheziei și ai imperialismului. Ideea „socializării" capitalismului și „capitalizării" comunismului, adică ideia amestecării a două sisteme sociale antagoniste, în fond ideia integrării capitalismului în socialism și a cărei variantă este, este însă nu rezultatul unor rătăciri ale unor oameni bine intenționați, ci o încercare conștientă și perfidă de a împăca ceea ce este de neîmpăcat, de a „uni" într-un singur tot două lucruri care se exclud reciproc, este o încercare grosolană de a estompa opoziția dintre capitalism și socialism, încercare

[1] R. Raron: „Coexistențe: fin de l'ideologie" Paris.

[2] Angelos Angelopulos: „l'Energie nucléaire va bulverser la structure geopolitique du monde". Publicat în revista „Le monde diplomatique", Paris, ianuarie 1960, p. 17.

de a zăpăci pe oamenii mai slab pregătiți și a-i face să accepte, în fond, veșnicia exploatării capitaliste.

Deși avem de-a face cu o variantă a faimoasei teorii a integrării capitalismului în socialism, „originalitatea" acesteia din urmă constă în folosirea unor fenomene realmente existente în viața socială (dezvoltarea deși foarte inegală și cu consecințe diametral opuse a revoluției tehnico-științifice în ambele sisteme mondiale social-economice) față de alte teorii care denaturează însuși fenomenele, și interpretarea lor abia ulterioară în conformitate cu interesele burgheziei.

★

Se pune întrebarea care este *atitudinea clasei muncitoare față de revoluția tehnico-științifică în țările capitaliste:* dacă această atitudine, avînd în vedere scopul final comun al întregei clase muncitoare internaționale, este același sau nu, atît în țările socialiste cît și în țările capitaliste?

Clarificarea răspunsului este foarte importantă și actuală avînd în vedere consecințele sociale diferite ale revoluției tehnico-științifice în cele două sisteme social-economice diferite. Această clarificare este însă cu atît mai complicată și complexă (în ceea ce privește țările capitaliste) cu cît se știe că clasa muncitoare nu numai că nu poate fi și nu este dușmanul progresului în general și deci nici a progresului tehnico-științific în special, ci este purtătorul său principal.

În ceea ce privește țările socialiste problema este cît se poate de clară. Clasa muncitoare la putere este motorul și purtătorul principal al acestei noi revoluții. Interesele ei atît îndepărtate cît și cele imediate dictează dezvoltarea pe un front cît mai larg și într-un ritm cît mai accelerat a revoluției tehnico-științifice. Cu cît realizările acestei revoluții sînt mai mari și mai rapide cu atît mai repede ajunge clasa muncitoare, întreg poporul la bunăstarea și fericirea visată de ele, la instaurarea „raiului pe pămînt". Între interesele clasei muncitoare și desfășurarea obiectivă a revoluției tehnico-științifice nu există și nici nu poate exista nici cea mai mică opoziție sau contradicție.

Alta este însă situația în țările capitaliste. Deși clasa muncitoare este și aci elementul principal al progresului social, atitudinea ei față de revoluția tehnico-științifică (și în primul rînd față de introducerea automatizării) nu poate fi aceeași, identică cu cea a clasei muncitoare din țările socialiste. În țările capitaliste datorită situației concrete, de clasă, a clasei muncitoare, respectiv a consecințelor sociale imediate a revoluției tehnico-științifice pentru clasa muncitoare, există o contradicție între interesele finale și imediate ale clasei muncitoare. Aceasta și determină atitudinea diferită a ei față de cea a clasei muncitoare din țările socialiste.

Înseamnă însă oare această atitudine *diferită* a clasei muncitoare din țările capitaliste în același timp și o atitudine *indiferentă* sau *negativă* a ei față de revoluția tehnico-științifică? Răspunsul la această întrebare este cît se poate de complicat, complex.

Efectele revoluției tehnico-științifice și în cadrul acesteia în primul rînd ale automatizării, în capitalism, sînt atît de evidente încît și unii reprezentanți ai burgheziei nu o mai pot nega. Introducerea noilor cuceriri ale revoluției tehnico-științifice contemporane înseamnă, pentru clasa muncitoare în țările capitaliste un grad mai ridicat al intensificării exploatării, înseamnă, reducerea numărului profesiunilor (dispariția unor serii de profesiuni ceea ce determină și ea creșterea șomajului — așa zisul șomaj tehnologic), descalificarea muncitorilor, înseamnă creșterea absolută a șomajului. Însuși întemeietorul chiberneticii, savantul american Norbert Wiener remarca că *„este absolut evident că introducerea mașinilor automate va provoca un șomaj, în comparație cu care actualul declin al producției și chiar crize din deceniul al patrulea al acestui secol vor părea glume nevinovate“* [1].

Fără îndoială că aceste condiții generează tendințe și forme ale luptei care determină încetinirea progresului tehnico-științific. Tendința constantă de a înlocui oamenii prin mașini, frica zilei de mîine, face ca muncitorul să nu fie interesat în progresul tehnic și să lupte împotriva lui. Un tot mai mare număr de specialiști burghezi recunosc că pentru această atitudine contradictorie a muncitorilor față de progresul tehnic răspunderea o are folosirea capitalistă a tehnicii moderne [2].

În capitolul de mai sus s-a vorbit despre caracterul contradictoriu al progresului și al revoluției tehnico-științifice contemporane în țările capitaliste, fapt ce determină ca această revoluție să nu atingă nivelul și amploarea din țările socialiste. Interesele diametral opuse ale muncitorilor față de capitaliști în problema progresului tehnic complică, firește, și mai mult problema și este una din piedicile (de sigur pe departe nu cea mai importantă) care contribuie la frînarea progresului și a revoluției tehnico-științifice în țările capitaliste și tot atunci este un factor care face imposibilă înfăptuirea integrală a acestei revoluții în capitalism.

În aceste împrejurări care trebuie să fie atitudinea clasei muncitoare în țările capitaliste? Poate oare clasa muncitoare să se situeze unic și exclusiv pe poziția combaterii integrale a introducerii realizărilor revoluției tehnico-științifice contemporane și deci împotriva însuși a progresului tehnico-științific? Să repete acțiunea ludiților englezi de la începutul secolului al XIX-lea, care — la fel ca și alți munciotri din țările Europei Occidentale din acele timpuri — distrugeau mașinile, considerîndu-le principala sursă a exploatării și asupririi? Să considere efectele negative ca ceva fatal, legate de însuși natura capitalismului și să se limiteze deci, în consecință, numai la lupta generală împotriva capitalismului, fără să caute căi și forme noi de luptă, corespunzătoare noii situații creată de revoluția tehnico-științifică?

Este clar că de o reeditare a acțiunii ludiților nu mai poate fi vorba. Această atitudine a lor pornea din faptul că n-au înțeles esența pro-

[1] N. Wiener: „Chibernetica și societatea“ — Moscova. 1958, pag. 166.
[2] Edward C. Bursk: „Human relations for management; the never perspective“. New York. 1956. pp. 34—35.

blemei ; n-au înțeles că lupta lor pentru apărarea intereselor lor trebuie dusă nu împotriva mașinii, ci împotriva patronilor ; n-au înțeles că nu mașinile ca atare — cum arăta Marx — sînt cauzele suferințelor lor, ci folosirea capitalistă a mașinilor. De sigur mai există și astăzi moștenitori spirituali ai ludiților, dar acesta este un fenomen izolat. Conștiința, gradul de organizare a clasei muncitoare determină ca muncitorii să ajungă astăzi la alte concluzii. Această problemă preocupă într-o măsură din ce în ce mai mare însuși partidele comuniste din țările capitaliste.

Este evident că clasa muncitoare trebuie să lupte cu cea mai mare energie împotriva urmărilor social-economice dezastruoase pentru clasa muncitoare a consecințelor revoluției tehnico-științifice ; că această luptă trebuie să ia o amploare din ce în ce mai mare în raport cu efectul distrugător crescînd al consecințelor acestei revoluții pentru clasa muncitoare. Această luptă firește nu este îndreptată împotriva progresului tehnic, a revoluției tehnico-științifice contemporane în general, ci împotriva folosirii *capitaliste* a tehnicii moderne (automatizării), împotriva intensificării exploatării clasei muncitoare cu ajutorul tehnicii noi. În rezoluția Congresului al XV-lea al P.C. Francez (1959) se spunea „...În condițiile economiei capitaliste în locul reducerii timpului de muncă, automatizarea reduce numărul muncitorilor. Ea înseamnă mărirea armatei industriale de rezervă, șomaj pentru o masă crescîndă de muncitori și funcționari".

Partidul Comunist din S.U.A. și sindicatele progresiste americane de exemplu orientează lupta muncitorimii pe linia unui program de ameliorare a șomajului tehnologic (efectul negativ principal al introducerii automatizării în producție) prin revindecarea „săptămînii de lucru scurte cu menținerea nivelului salariului". Problema asigurării cu lucru, a ridicării salariului, a asigurărilor sociale. etc. deci problema revendicărilor *parțiale,* problema apărării intereselor economice *imediate* ale oamenilor muncii este în atenția tuturor partidelor comuniste. Obiectivele concrete ale luptei sînt diferite în raport cu situația concretă (nivelul dezvoltării tehnice etc.) din fiecare țară. Aceasta este însă, cum s-ar spune, numai o latură a problemei, numai o față a medaliei. Clasa muncitoare nu poate să se limiteze numai la atît.

Clasa muncitoare nu este indiferentă față de progresul tehnic. Nu poate fi indiferentă de exemplu în problema dacă cercetările științifice sînt îndreptate înspre scopuri militare sau în scopuri pașnice. Ea luptă pentru ca cercetările științifice și aplicarea marilor realizări tehnico-științifice să nu fie canalizate în apele „războiului rece". În al doilea rînd arătînd marile posibilități ce oferă revoluția tehnico-științifică pentru progresul social multilateral al omenirii, clasa muncitoare și în primul rînd comuniștii arată totodată limitele posibilităților potențiale existente în cadrul sistemului capitalist și posibilitățile nelimitate în cadrul sistemului socialist, superioritatea din ce în ce mai accentuată și evidentă a socialismului asupra capitalismului. Ea arată că dezvoltarea vijelioasă a științei și tehnicii și care să însemne tot atunci și îmbunătă-

țirea simțitoare a nivelului de trai al clasei muncitoare va fi posibilă numai prin lichidarea orînduirii capitaliste, prin înlocuirea ei cu socialismul.

Problema atitudinii oamenilor de știință față de revoluția tehnico-științifică contemporană, respectiv față de consecințele social-economice, militare ale revoluției, față de folosirea propriei lor descoperiri, în societatea capitalistă, este mult mai complexă și grea decît cea a atitudinii muncitorilor. Elucidarea acestei probleme este însă deosebit de importantă și actuală, în special datorită faptului că, în capitalism, există o contradicție de neînlăturat între esența *umană* a științei și folosirea practică, *neumană* a rezultatelor sale.

Neînarmați (în marea lor majoritate) cu concepția materialist-istorică asupra dezvoltării societății, oamenii de știință din occident ajung la unele concluzii eronate (cînd e vorba de oameni cinstiți și nu slugi conștiente ai imperialiștilor) în privința corelației dintre știință și societate. Ei nu văd cu suficientă claritate și citeodată de loc că știința și tehnica duc, în condițiile proprietății private asupra mijloacelor de producție, pe de o parte, la progres (în sensul pregătirii condițiilor materiale pentru eliberarea omenirii), iar pe de altă parte la exploatarea crescîndă a muncitorilor, de către capitaliști, la reproducția continuă a relațiilor de exploatare. Ei nu văd că s-a creat și s-a accentuat (pe măsura dezvoltării impetuoase a progresului tehnico-științific) contradicția antagonică, de neînlăturat, în cadrul societății capitaliste, dintre știința și orînduirea capitalistă. De aci și atitudinea greșită sau șovăitoare a omului de știință din țările capitaliste față de revoluția tehnico-științifică contemporană, față de folosirea tot mai accentuată și deschisă a rezultatelor ei în scopuri nepașnice.

Unii dintre acești savanți (cinstiți în felul lor), văzînd folosirea rezultatelor marilor descoperiri științifice și tehnice (rezultatul propriei lor munci creatoare) în scopuri neumane, nepașnice, și neînțelegînd esența lucrurilor, caracterul social al științei ajung la concluzia disperată și, de sigur, cu totul falsă, că vina pentru aceasta (folosirea în scopuri barbare a relizărilor științei) ar avea nu societatea capitalistă, ci știința și tehnica în sine. De aci concluzia unora că trebuie luptat nu împotriva folosirii capitaliste a marilor realizări științifice, nu împotriva capitalismului, ci împotriva progresului științific și tehnic.

E cît se poate de greșită poziția unor asemenea oameni de știință occidentali cum sînt de ex. Ralph F. Lapp [1], G. Bardet [2], Gh. G. Darwin [3] și a multor altora care au ajuns să privească știința și tehnica ca dușmanul jurat al omenirii, văzînd în ele forțe „demonice" care nu pot fi stăpînite de oameni.

Desigur nu este vorba aci numai de folosirea direct în scopuri militare a științei și tehnicii. Chiar și folosirea pașnică a energiei atomice

[1] R. Lapp: „Atomis and people". New York 1956 („Despre atomi și oameni" E.S.P.L.P. 1956).
[2] G. Bardet: „Demain c'est l'an 2000". Paris 1952.
[3] Gh. G. Darwin: „The next million years". London 1956.

de ex. depinde de condițiile social-economice existente. Acele ramuri ale științei care nu aduc foloase directe burgheziei n-au posibilități de dezvoltare în capitalism.

Ceea ce complică însă și mai mult problema și îngreunează luarea de poziție de către oamenii de știință cinstiți din occident este faptul că, în condițiile concrete și la nivelul actual al dezvoltării științei și tehnicii este greu (dacă nu imposibil) de a trage o linie clară și precisă de demarcare între descoperirile cu caracter general (să spunem industriale) și cele cu caracter pur militar, căci ceea ce este caracteristic, între altele, pentru stadiul actual al revoluției tehnico-științifice este tocmai împletirea acestora, posibilitatea folosirii unor descoperiri din domeniul industrial în cel militar și invers. Aceasta se referă în mod cu totul deosebit la asemenea ramuri ale dezvoltării tehnico-științifice cum sînt energetica atomică, automatica, decteoria și chibernetica.

Numai înțelegerea de către acești savanți a faptului că știința este o forță nu în sine și care acționează orb, ci o forță dependentă de societate, îi va face să ajungă pe poziții juste și să fie participanți activi ai progresului istoric.

Conștienți de pericolul unor lucrări de poziție a oamenilor de știință în special astăzi, cînd contradicția dintre caracterul uman și folosirea neumană a științei se ascute la maximum și cînd oamenii de știință ar putea să-și dea seama de cauzele adevărate ale folosirii științei în scopuri neumane, unii ideologi burghezi de teapa lui Ortega Y Gasset răspîndesc, cu o deosebită insistență, ideea că pe oamenii de știință n-ar trebui să-i preocupe consecințele folosirii descoperirilor lor, că ei n-ar purta nici o răspundere pentru aceasta. După Ortega Y Gasset *„munca intelectualului este deranjată foarte serios tocmai atunci cînd el consideră că munca lui trebuie să folosească cuiva“* [1].

Spre cinstea marilor oameni de știință trebuie spus că asemenea încercări au efecte din ce în ce mai neînsemnate. Așa bună oară cei 18 oameni de știință atomiști remarcabili din Göttingen (Germania federală) dintre care și prof. Max Born, au luat poziție (în cunoscuta lor chemare) împotriva înarmării atomice a Germaniei occidentale și au declarat că ei *„nu vor să participe în nici un fel la crearea, încercarea și folosirea armelor atomice“* [2]. Iar Max Born spunea în legătură cu fizicienii atomiști la instruirea cărora el a participat că *„ar fi fost, de bună seamă, greșala mea, dacă ei n-ar fi învățat de la mine decît metoda de cercetare și nimic altceva“* [3].

Numărul savanților în Occident care se situează pe poziția că știința trebuie să slujească unic și exclusiv pacea și bunăstarea omenirii crește neîncetat.

---

[1] Ortega y Gasset: Gesamnelte Werke, vol. III, Stuttgart, 1956, p. 354.

[2] Physikalische Blätter. Nr. 5. 1957. p. 194.

[3] „Der Spiegel“. 24 aprilie 1957, p. 15.

ОБЩЕСТВЕЕНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДСТВИЯ СОВРЕМЕННОГО НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПЕРЕВОРОТА И ОТНОШЕНИЕ РАБОЧЕГО КЛАССА И ЛЮДИ НАУКИ К ЭТОМУ ПЕРЕВОРОТУ

Прилагаемый текст явдяется второй работы *„Социальные революции и научно-технические перевороты на протяжении веков и их влияние на исторический прогресс"*. В этой главе автор рассмативает некоторые аспекты общественно- экономических последствий современных научно-технических переворотов при капитализме и социализме. На основе анализа факторов, влияющих на развитие современного научно-технического перевороты, автор приходит к выводу, что он ведет к укреплению монополий, к увеличению их прибылей, к усилению эксплуатации рабочих и крайней интенсификации труда к росту хронической безработицы, к изменению состава рабочеко класса, к обострению классовых противоречий. При социилизме, напротив, современный научно-технический переворот ведет к облегчению труда, к постоянному сокращениу рабочего дня, к возрастающему коренному улучшению положения раоочих и к неперерывному повышениы культурно-технического уровня трудящихся. Происходит значительное повышение производительности труда, коренное изменение характера общественного труда, постененный переход к коммунистическому принципу распределения. Этот переворот содействует невиданному расцвету и блестящему триумфу коммунистических идей и отнощений, ускорению перехода всего человечеекого общества от капитализма к социализму.

В данной главе рассматривается также отношения рабочих социалистических и капиталистических стран к современным научно-техничееким переворотим, а также отношение к ним ученых капиталистических стран.

THE SOCIO-ECONOMIC CONSEQUENCES OF THE TECHNICAL-SCIENTIFIC REVOLUTION OF OUR DAYS AND THE ATTITUDE OF THE WORKING CLASS AND MAN OF SCIENCE TOWARDS THIS REVOLUTION

The text constitutes Chapter II, of the study entitled „Social and Technical-Scientific Revolutions along the Centuries and Their Impact on Historical Progress". In this Chapter the author dwells on some aspects of the socio-economic consequences of the tehcnical-scientific revolutions of our days under capitalism and under socialism. Analysing the factors bearing upon the unfolding of the technical-scientific revolution in our days, the author reaches the conclusion that, under capitalism, if leads to a strengthening of the monopolies, to a rise in the latter's profits, to

an increase dexploitation of the workers and the extreme speedup of operations, to a growth in chronic unemployment, to a change in the structure of the working class, to the sharpening of class contradictions. Under socialism, on the other hand, the technical-scientific revolution of our days results in making work easier, in steadily shortening working hours, in the radical, ever-growing improvement of the living standards of the working people and in the continuous raising of their technical knowledge and cultural level ; if leads, furthermore, to a considerable rise in the productivity fo social labour, to a deep-going change in the nature of social labour, to the gradual transition to the communist principle of distribution ; if leads to an unprecedented flourishing and the brilliant triumph of communist ideas and relations, and helps mankind to pass more quickly from capitalism to socialism.

Moreover, an analysis is mad eof the attitude of the workers in the socialist and capitalist countries towards the technical-scientific revolutions of our days, as well as of the attitude of man and women of scrience in the capitalist countries.

LES CONSÉQUENCES SOCIALES-ÉCONOMIQUES DE LA RÉVOLUTION TECHNIQUE-SCIENTIFIQUE CONTEMPORAINE ET L'ATTITUDE DE LA CLASSE OUVRIÈRE ET DES HOMMES DE SCIENCE ENVERS CETTE RÉVOLUTION

Le texte compris sous ce titre représente le II-e chapitre de l'etude *„Les révolutions sociales et techniques-scientifiques le long des siècles et leur influence sur le progrès historique"*. Dans ce chapitre l'auteur s'occupe de certains aspects des conséquences sociales-économiques des révolutions techniques-scientifiques contemporaines dans les conditions du capitalisme et du socialisme. En analysant les facteurs qui influent sur le développement de la révolution technique-scientifique contemporaine dans les conditions du capitalisme, l'auteur conclue que cette révolution mène au renforcement des monopoles, à l'augmentation de leurs profits, à l'exploitation de plus en plus accentuée des ouvriers et à l'intensification extrême du travail, à l'augmentation du chômage chronique, à la modification de la structure de la classe ouvrière, à l'aggravation des contradictions de classe. Par contre, la révolution technique-scientifique contemporaine dans les conditions du socialisme, fait que le travail devienne plus aisé le nombre des heures de travail se réduite continuellement, la situation matérielles des travailleurs s'améliore radicalement et de plus en plus, leur niveau technique et culturel s'accroît continuellement ; cette révolution a comme résultat le sensible accroissement de la productivité du travail social, la modification radicale du caractère du travail social, elle permet le passage progressif au principe comuniste de la repartition, l'essor sans précédent et l'éclatant triomphe des idées et des

relations comunistes. La révolution technique-scientifique contribue au passage plus rapide de la société du capitalisme au socialisme.

Dans ce chapitre l'auteur analyse la position des auvriers des pays socialistes et capitalistes envers les révolutions techniques-scientifiques contemporaines, de même que la position des hommes de science des pays capitalistes envers ces révolutions.

DIE SOZIAL-ÖKONOMISCHEN AUSWIRKUNGEN DER TECHNISCH-WISSENSCHAFTLICHEN REVOLUTION DER GEGENWART UND DIE EINSTELLUNG DER ARBEITERKLASSE UND DER WISSENSCHAFTLER ZU DIESER REVOLUTION

Der vorliegende Text bildet das II. Kapitel der Schrift *„Die im Laufe der Jahrhunderte erfolgten sozialen und technisch-wissenschaftlichen Revolutionen und ihr Einfluss auf den historischen Fortschritt"*. In diesem Kapitel behandelt der Verfasser Aspetke der sozial-ökonomischen Auswirkungen der gegenwärtigen technisch-wissenschaftlichen Revolution im Kapitalismus und im Sozialismus. Auf Grund der Analyse der Faktoren, die die Entwicklung der gegenwärtigen technisch-wissenschaftlichen Revolution beeinflussen, gelangt der Verfasser zum Schluss, dass sie zur Erstarukung der Monopole, zum Anwachsen ihrer Profite, zur verstärkten Ausbeutung der Arbeiter und äussersten Intensivierung der Arbeit führt, ferner zum Ansteigen der chronischen Arbeitslosigkeit, zur Veränderung der Struktur der Arbeiterklasse und zur Verschärfung der Klassenwidersprüche. Im Sozialismus hingegen bewirkt die gegenwärtige technisch-wissenschaftliche Revolution die Erleichterung der Arbeit, die ständige Herabsetzung der Arbeitsstunden, die zunehmende, grundlegende Verbesserung der materiellen Lage und die stetige Hebung des technisch-kulturellen Niveaus der Werktätigen; sie bewirkt die fühlbare Erhöhung der Produktivität der gesellschaftlichen Arbeit, die radikale Wandlung des Charakters der gesellschaftlichen Arbeit, sie führt zum allmählichen Übergang zum kommunistischen Prinzip der Verteilung; zur unerhörten Blüte und zum glänzenden Sieg der komunistischen Ideen und Verhältnisse, und trägt dazu bei, dass die menschliche Gesellschaft rascher von Kapitalismus zum Sozialismus übergeht.

Die Einstellung der Arbeiter in den sozialistischen und kapitalistischen Ländern zu den gegenwärtigen technischwissenschaftlichen Revolutionen sowie die Einstellung der Wissenshaftler in den kapitalistischen Ländern wird einer Analyse unterzogen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

MATEMATICA

ASUPRA TRANSFORMĂRILOR CORESPONDENTE

de CONSTANTIN IONESCU - BUJOR

III *)

Lanțuri de transformări corespondente

32° *Definiții*

Considerăm mulțimea de transformări $[T]$ perfect simetrică (simetrică) în raport cu mulțimea de transformări $[\tau]$.

Notăm T_n corespondenta de ordin n a transformării $T_0 \in [T]$ în raport cu transformarea $\tau \in [\tau]$, adică transformarea

$$T_n = \tau^n T_0 \tau^{-n} \qquad (n \text{ întreg pozitiv}).$$

$[T]$ fiind perfect simetrică în raport cu $[\tau]$,

T_0 este corespondenta de ordin n a unei transformări $T_{-n} \in [T]$, pe care o numim corespondenta de ordin $-n$ a transformării T_0 în raport cu τ. T_0 este corespondenta sa de ordin zero în raport cu τ.

Vom numi lanț de transformări corespondente în raport cu τ, *generat de* T_0, *mulțimea tuturor corespondentelor transformării* T_0 *în raport cu* τ *și vom nota această mulțime* $[T_0]_\tau$. Avem

$$[T_0]_\tau \subset [T]$$

Un lanț $[T_0]_\tau$ de transformări corespondente în raport cu τ poate fi:

1) *lanț ciclic de ordin* i, dacă T_n sînt distincte pentru $0 \leqslant n \leqslant i-1$ și $T_{K+i} = T_K$, oricare ar fi k;

2) *lanț normal*, dacă n este orice număr întreg și $T_n \neq T_m$, oricare ar fi $n \neq m$ întreg;

3) *șir de transformări corespondente*, dacă $n, m \geqslant -p$ (p întreg pozitiv) și $T_n \neq T_m$ oricare ar fi $n \neq m$.

În acest caz T_{-p} este o *transformare primă* a șirului.

Exemple:

1) Considerăm mulțimea $[H]$ a omotetiilor plane și mulțimea $[R]$ a rotațiilor de unghi $\frac{2\pi}{n}$ (n întreg $\neq 0$).

*) Continuarea notelor publicate în Buletinul Institutului Politehnic București. Tomul XXI. Fasc 1, 2.

Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a Institutului Politehnic București din 17 dec. 1960.

Lanțul $[H_0]_R$ *de transformări corespondente în raport cu o rotație* $R \in [R]$ *de centrul O, generat de omotetia* $H_0 \in [H]$ *al cărei centru este punctul* C_0 *și raport k, este un lanț ciclic de ordin n.*

În adevăr, corespondenta de ordin $p<n$ a omotetiei H_0 în raport cu transformarea R este omotetia

$$H_p = R^p H_0 R^{-p},$$

al cărei centru este punctul C_p, transformatul lui C_0 prin R^p și al cărei raport este k. Astfel transformările H_p $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$ sînt distincte. Apoi

$$H_{p+n} = R^{p+n} H_0 R^{-(p+n)}$$

și cum $R^n = 1$,

$$H_{p+n} = R^p H_0 R^{-p} = H_p.$$

2) Considerăm mulțimea $[H]$ a omotetiilor plane și mulțimea $[T]$ a translațiilor plane.

Lanțul $[H_0]_T$ *de transformări corespunde în raport cu o translație* $T \in [T]$ *de vector v, generat de omotetia* $H_0 \in [H]$ *al cărei centru este punctul* C_0 *și raport k, este un lanț normal.*

În adevăr, oricare ar fi p întreg, omotetia H_0 are o corespondentă H_p în raport cu T

$$H_p = T^p H_0 T^{-p},$$

H_p fiind omotetia de raport k al cărei centru C_p este transformatul punctului C_0 prin T^p.

Dacă $p \neq q$ și

$$H_q = T^q H_0 T^{-q},$$

$H_p \neq H_q$ întrucît centrele lor C_p, C_q sînt transformatele punctului C_0 prin tranlațiile T^p, T^q de vectorii $p\,v$, $q\,v$.

3) Se dă semiplanul π mărginit de dreapta $\triangle$. Considerăm mulțimea omotetiilor plane $[H]$ ale căror centre sînt în semiplanul π, mulțimea translațiilor plane $[T]$ și translația $T \in [T]$ al cărei vector v aplicat într-un punct la dreptei $\triangle$ este cuprins în π (fără a avea direcția $\triangle$).

Lanțul $[H_0]_T$ *de transformări corespondente în raport cu T, generat de omotetia* $H_0 \in [H]$ *avînd centrul în* C_0 *și raportul k, este un șir de transformări corespondente.*

Fie p cel mai mare număr întreg pentru care C_{-p} transformatul punctului C_0 prin translația T^{-p} este cuprins în semiplanul π.

Omotetia

$$H_{-p} = T^{-p} H_0 T^p$$

este corespondenta de ordinul cel mai mic negativ pe care o poate avea H_0. Ca în exemplul precedent se arată că H_n, H_m în care $n, m \geqslant -p$ sînt distincte dacă $n \neq m$. Rezultă că $[H_0]_T$ este un șir de transformări corespondente, avînd pe H_p ca transformare primă.

Notă. 1) Întrucît fiecare transformare a mulțimii de omoterii $[H]$ considerată în acest exemplu admite o corespondentă în raport cu $T \in [T]$, dar există omotetii ale mulțimii $[H]$ ca H_{-p} care nu sînt corespondente ale

vreunei omotetii ale mulțimii $[H]$ în raport cu T, rezultă că mulțimea $[H]$ este simetrică în raport cu $[T]$, dar nu este perfect simetrică în raport cu $[T]$.

2) Fiind dată o mulțime de transformări $[T]$ perfect simetrică în raport cu mulțimea de transformări $[\tau]$, lanțurile de transformări corespondente în raport cu transformările mulțimii $[\tau]$, generate de orice $T \in [T]$ nu pot fi șiruri de transformări corespondente:

Într-adevăr, dacă ar exista o transformare $T_0 \in [T]$, astfel încît $[T_0]_\tau$ să fie șir de transformări corespondente, acesta ar avea o transformare primă $T_{-p} \in [T]$, adică o transformare care nu este corespondenta vreunei transformări $T' \in [T]$, ceea ce este absurd, pentrucă $[T]$ este perfect simetrică în raport cu $[\tau]$.

3) Fiind dată o mulțime de transformări $[T]$ simetrică în raport cu $[\tau]$, dar nu perfect simetrică, ea conține transformări T^x care nu au corespondente de ordin -1 în raport cu o transformare $\tau \in [\tau]$. Aceste transformări sînt transformările prime ale mulțimii $[T]$ în raport cu τ și ele generează șirurile de transformări corespondente în raport cu τ ale mulțimii $[T]$. Dacă $[T^x]$ este mulțimea transformărilor prime în raport cu τ ale mulțimii $[T]$, avem

$$[T^x] \subset [T].$$

33°. *Lanțuri de transformări corespondente egale.*

a) *Teoremă. Fiind dată mulțimea de transformări $[T]$, perfect simetrică (simetrică) în raport cu $[\tau]$ și $T_0 \in [T]$, $t_0 \in [T]$, dacă lanțurile de transformări corespondente $[T_0]_\tau$, $[t_0]_\tau$ au un element comun, ele sînt egale,*

$$[T_0]_\tau = [t_0]_\tau .$$

Dacă $T_n \in [T_0]_\tau$, $t_n \in [t_0]_\tau$ și

$$T_n = t_n ,$$

atunci, cum

$$T_n = \tau^n T_0 \tau^{-n} \text{ și } t_n = t^n t_0 \tau^{-n} ,$$

rezultă

$$T_0 = t_0 ,$$

deci că $[T_0]_\tau$, $[t_0]_\tau$ au același element generator. Ca urmare, pentru orice k întreg

$$T_k = t_k$$

și astfel

$$[T_0]_\tau = [t_0]_\tau .$$

Dacă $T_n \in [T_0]_\tau$, $t_p \in [T_0]_\tau$ și

$$T_n = t_p \qquad (n \neq p),$$

atunci, cum

$$T_n = \tau^n T_0 \tau^{-n} , \quad t_p = \tau^p t_0 \tau^{-p} ,$$

rezultă

$$t_0 = \tau^{n-p}\, T_0\, \tau^{p-n}\,.$$

Astfel t_0 este corespondenta de ordin $(n-p)$ a transformării T_0 în raport cu τ. Ca urmare,

$$t_0 \in [T_0]_\tau\,.$$

Atunci, luînd

$$t_k \in [t_0]_\tau\,,$$

întrucît

$$t_k = \tau^k\, t_0\, \tau^{-k}\,,$$

avem

$$t_k = \tau^k\,(\tau^{n-p}\, T_0\, \tau^{p-n})\,\tau^{-k} = \tau^{n+k-p}\, T_0\, \tau^{p-n-k}$$

și t_k este corespondenta de ordin $(n+k-p)$ a transformării T_0, deci

$$t_k \in [T_0]_k\,.$$

Conchidem că

$$[t_0]_\tau \subset [T_0]_\tau\,.$$

La fel arătăm că

$$[T_0]_\tau \subset [t_0]_\tau$$

și astfel

$$[T_0]_\tau = [t_0]_\tau\,.$$

b) *Consecințe.* Dacă $[T_0]_\tau$, $[t_0]_\tau$ sînt lanțuri de transformări de tipuri diferite (ciclic, normal, șir de transformări corespondente), ele nu pot avea nici un element comun, deci sînt disjuncte.

Dacă $[T_0]$ $[t_0]_\tau$ sînt lanțuri de transformări ciclice de ordine diferite, ele sînt de asemenea disjuncte.

c) *Concluzie.* Două lanțuri de transformări corespondente $[T_0]_\tau$, $[t_0]_\tau$ generale de $T_0 \in [T]$, $t_0 \in [T]$ sînt sau egale sau disjuncte.

d) *Teoremă. Fiind dată mulțimea de transformări $[T]$, simetrică în raport cu $[\tau]$, condiția necesară și suficientă ca două șiruri de transformări corespondente ale mulțimii $[T]$ în raport cu $\tau \in [\tau]$ să fie egale, este ca ele să aibă aceiași transformare primă.*

Fie T_0, t_0 două transformări prime în raport cu τ ale mulțimii $[T]$ și $[T_0]_\tau$, $[t_0]_\tau$ șirurile de transformări corespondente în raport cu τ generate de T_0, t_0.

Dacă $T_0 = t_0$, evident

$$[T_0]_\tau = [t_0]_\tau\,.$$

Dacă $[T_0]_\tau$ și $[t_0]_\tau$ sînt egale, atunci sau

$$T_n = t_p\ (n \neq p) \quad \text{sau} \quad T_n = t_n\,.$$

Prima ipoteză nu poate fi acceptată, întrucît în acest caz dacă $n > p$,

$$t_0 = \tau^{n-p}\, T_0\, \tau^{p-n}$$

și astfel t_0 este corespondenta de ordin $(n-p)$ a transformării T_0 în raport cu τ. Ca urmare, t_0 este corespondenta în raport cu τ a transformării

$$T_{n-p-1} = \tau^{n-p-1}\, T_0\, \tau^{p-n+1}$$

deci t_0 nu este transformare primă.

Rămîne valabilă numai ipoteza

$$T_n = t\ ,$$

de unde conchidem că

$$T_0 = t_0\ .$$

34°. *Descompunerea unei mulțimi de transformări în lanțuri de transformări corespondente.*

a) *Dacă o mulțime de transformări $[T]$ este perfect simetrică (simetrică) în raport cu mulțimea de transformări $[\tau]$, atunci — față cu o transformare $\tau \in [\tau]$ — $[T]$ este o reuniune de lanțuri de transformări corespondente în raport cu τ, disjuncte.*

Orice element al mulțimii $[T]$ aparține unui lanț al acestei mulțimi și numai acelui lanț.

Să presupunem că $[T]$ este perfect simetrică în raport cu $[\tau]$. Un element oarecare $T_0 \in [T]$ poate fi considerat ca element generator, al unui lanț de transformări corespondente (ciclic sau normal) $[T_0]$ în raport cu τ. Deci orice element al mulțimii $[T]$ aparține unui lanț al mulțimii $[T]$ în raport cu τ. T_0 nu poate aparține unui alt lanț de transformări corespondente în raport cu τ, $[T'_0]_\tau$, distinct de $[T_0]_\tau$ pentrucă apartenența lui T_0 la $[T_0]_\tau$ și $[T'_0]_\tau$ ne-ar da

$$[T_0]_\tau = [T']_\tau\ .$$

Rezultă că $[T]$ este reuniunea tuturor lanțurilor de transformări corespondente în raport cu τ, pe care o vom nota

$$U\,[T_0]_\tau\ .$$

Demonstrație similară în cazul $[T]$ simetrică în raport cu $[\tau]$.

b) *Dacă $[T]$ este o mulțime de transformări perfect simetrică în raport cu mulțimea de transformări $[\tau]$, dacă $\tau \in [\tau]$ este o transformare involutivă de ordin n, iar $\tau^k\, T \neq T\, \tau^k$ pentru orice k nemultiplu de $(n+1)$ și pentru orice $T \in [T]$, atunci mulțimea $[T]$ este o reuniune de lanțuri ciclice de ordin $(n+1)$ în raport cu τ.*

Fie T_0 o transformare oarecare a mulțimii $[T]$ și T_{n+1} corespondenta sa de ordin $(n+1)$. Deoarece τ este involutivă de ordin n, avem (§ 6°)

$$T_{n+1} = T_0\ .$$

De asemenea

$$T_k \neq T_0\ ,$$

deci $[T_0]_\tau$ este un lanț ciclic de ordin $(n+1)$.

Exemple. 1) Să considerăm mulțimea $[H]$ a omotetiilor din plan de raport λ ale căror centre aparțin unui cerc (C) cu centul în O și mulțimea $[R]$ a rotațiilor plane de centru O.

Fie R rotația de unghi $\frac{2\pi}{n+1}$ (n întreg) a mulțimii $[R]$. Ea este o transformare involutivă de ordin n.

O omotetie $H_0 \in [H]$ generează un lanț ciclic $[H_0]_R$ de ordin $(n+1)$ în raport cu transformarea R. Centrele omotetiilor acestui lanț sînt vîrfurile unui poligon regulat cu $(n+1)$ laturi înscris în cercul (C). Fiecare poligon regulat cu $(n+1)$ laturi înscris în cercul (C) are vîrfurile centre ale unor omotetii ale mulțimii $[H]$ care formează un lanț ciclic în raport cu transformarea R. Reuniunea acestor lanțuri ciclice formează mulțimea $[H]$.

2) Să considerăm mulțimea $[H]$ a omotetiilor din plan de raport λ și mulțimea $[R]$ a rotațiilor planului. Fie R rotația de centru O și unghi $\frac{2\pi}{n+1}$ (n întreg). Omotetiile mulțimii $[H]$ ale căror centre sînt vîrfurile unui poligon regulat cu $(n+1)$ laturi de centru O formează un lanț ciclic de ordin $(n+1)$ în raport cu transformarea R.

Însă omotetia H_0 de centru O, deoarece

$$R\,H_0 = H_0\,R$$

este propria sa corespondentă în raport cu transformarea R, deci ea generează un lanț ciclic de ordin 1.

c) *Dacă $[T]$ este o mulțime de transformări perfect simetrică în raport cu mulțimea de transformări $[\tau]$ și dacă $\tau \in [\tau]$ nu este involutivă, atunci mulțimea $[T]$ este formată din v reuniune de lanțuri normale de transformări corespondente în raport cu τ și o reuniune de lanțuri ciclice de transformări corespondente în raport cu τ generate de transformări $T_0 \in [T]$ care satisfac o relație de forma*

$$\tau^k\,T_0 = T_0\,\tau^k\,, \quad (k \text{ întreg})$$

ordinul lanțului ciclic respectiv fiind k.

În adevăr, dacă $T \in [T]$ nu satisface relația

$$\tau^k\,T = T\,\tau^k \quad (k \text{ întreg})$$

atunci, notînd T_k corespondenta de ordin k a transformării T în raport cu τ,

$$T_k \neq T$$

și $[T]_\tau$ nu poate fi lanț ciclic. $[T]_\tau$ este deci un lanț normal.

Pentru $T_0 \in [T]$, care satisface relația

$$\tau^k\,T_0 = T_0\,\tau^k\,,$$

știm § 6⁰ că

$$T_k = T_0$$

sau

$$\tau^k\,T_0\,\tau^{-k} = T_0\,,$$

de unde

$$\tau^{k+p}\,T_0\,\tau^{-(k+p)} = \tau^p\,T_0\,\tau^{-p}\,, \quad (p \text{ întreg})$$

deci

$$T_{k+p} = T_p \text{, oricare ar fi } p \text{ întreg.}$$

Dacă $m < n$ sînt numere întregi pozitive mai mici decît K, $T_m \neq T_n$ întrucît echivalența

$$T_n = T_m$$

ar da

$$\tau^n T_0 \tau^{-n} = \tau^m T_0 \tau^{-m}$$

sau

$$\tau^{n-m} T_0 = T_0 \tau^{n-m}$$

relație pe care prin ipoteză T_0 nu o satisface.

Astfel $[T_0]_\tau$ este un lanț ciclic de ordinul k în raport cu τ.

Deci $[T]$ este reuniunea lanțurilor normale de forma $[T]_\tau$ și a lanțurilor ciclice de forma $[T_0]_\tau$.

Exemplu. Fie $[H]$ mulțimea omotetiilor plane de raport λ și $[T]$ mulțimea translațiilor plane. Dacă $T \in [T]$ este o translație de vector v, atunci lanțul de transformări corespondente în raport cu T, generat de o omotetie $H_0 \in [H]$ este un lanț normal. Centrele omotetiilor acestui lanț sînt pe o dreaptă a cărei direcție este direcția vectorului v.

Astfel, $[H]$ este reuniunea unei infinități de lanțuri normale de omotetii în raport cu T.

d) *Grupul de transformări ale geometriei euclidiene plane se descompune într-o infinitate de moduri în lanțuri ciclice de transformări corespondente de ordin n și 1.*

Am arătat (§ 30°) că $[g]$, grupul principal al geometriei euclidiene plane este autosimetric. Ca urmare, R fiind o rotație definită de centrul O și de unghiul $\frac{2\pi}{n}$ orice transformare $g_0 \in [g]$ are corespondente de ordin n în raport cu transformarea R (n întreg).

Fie ϱ o rotație de centru O și unghi β. Deoarece

$$R\varrho = \varrho R,$$

ϱ este corespondența sa în raport cu transformarea R. Rotația ϱ generează deci un lanț ciclic de ordinul 1 raportat la R.

Omotetia H de centru O este corespondenta sa în raport cu transformarea R, de asemenea transformarea ϱH.

Rezultă că toate rotațiile $[\varrho]$ de centru O, toate omotetiile $[H]$ de centru O și transformăriile mulțimii $[\varrho H]$ generează în raport cu transformarea R lanțuri ciclice de ordin I.

Celelalte transformări ale grupului $[g]$ nu satisfac relații de forma

$$R^k g = g R^k, \quad (k \text{ întreg} \neq M n).$$

Ca urmare, întrucît rotația R este o transformare involutivă de ordin $n - 1$, aceste transformări g generează lanțuri ciclice de transformări corespondente de ordin n în raport cu transformarea R.

În concluzie, $[g]$ este o reuniune de lanțuri ciclice de ordin n și 1 față de R.

Cum $[g]$ conține o infinitate de rotații de unghi $\frac{2\pi}{n}$, descompunerea lui $[g]$ în astfel de lanțuri ciclice se poate realiza într-o infinitate de feluri.

Observație. Proprietate identică pentru grupul principal de transformări al geometriei euclidiene a spațiului.

35°. *Asupra inverselor transformărilor unei mulțimi perfect simetrice (simetrice) în raport cu o mulțime de transformări* $[\tau]$.

a) *Dacă* $[T]$ *este o mulțime de transformări perfect simetrică (simetrică) în raport cu mulțimea de transformări* $[\tau]$, *iar* $[T^{-1}]$ *este mulțimea formată de inversele transformărilor mulțimii* $[T]$, *atunci* $[T^{-1}]$ *este perfect simetrică (simetrică) în raport cu* $[\tau]$. (Presupunem că între mulțimile $[T]$, $[T^{-1}]$ este o corespondență biunivocă, fiecărei transformări $T \in [T]$ corespunzîndu-i o transformare $T^{-1} \in [T^{-1}]$ și numai una și reciproc).

Dacă $[T]$ este perfect simetrică în raport cu $[\tau]$, pentru orice $T \in [T]$ și $\tau \in [\tau]$ corespund două transformări $T_1 \in [T]$, $T_{-1} \in [T]$, astfel încît

$$T_1 = \tau T \tau^{-1} \tag{1}$$

(T_1 este corespondenta transformării T în raport cu τ) și

$$T_{-1} = \tau^{-1} T \tau \tag{2}$$

(T este corespondenta transformării T_{-1} în raport cu τ).

Rezultă

$$T_1^{-1} = \tau T^{-1} \tau^{-1} \tag{1'}$$

$$T_{-1}^{-1} = \tau^{-1} T^{-1} \tau, \tag{2'}$$

relații care arată că T_1^{-1} este corespondentă transformării T^{-1} în raport cu τ și că T^{-1} este corespondenta transformării T_{-1}^{-1} în raport cu τ. Astfel $[T^{-1}]$ este perfect simetrică în raport cu $[\tau]$.

Dacă $[T]$ este simetrică în raport cu $[\tau]$, există numai relația (1) pentru orice $T \in [T]$ și $\tau \in [\tau]$, deci (1'). Relația (2') nu poate exista pentru orice $T^{-1} \in [T^{-1}]$, întrucît existența acestei relații pentru orice T^{-1}, ar antrena existența relației (2) pentru orice $T \in [T]$, deci $[T]$ ar fi perfect simetrică în raport cu $[\tau]$. Conchidem astfel că $[T^{-1}]$ este simetrică în raport cu $[\tau]$.

Exemplu: Fie $[H]$ mulțimea omotetiilor plane care au raportul λ și $[R]$ mulțimea rotațiilor plane de centru O. $[H]$ este perfect simetrică în raport cu mulțimea $[R]$. De asemenea $[H^{-1}]$, mulțimea omotetiilor plane de raport $\frac{1}{\lambda}$, inverse ale omotetiilor mulțimii $[H]$ este perfect simetrică în raport cu mulțimea $[R]$.

b) *Fie* $[T]$ *o mulțime de transformări perfect simetrică (simetrică) în raport cu mulțimea de transformări* $[\tau]$ *și* $[T^{-1}]$ *mulțimea formată de inversele transformărilor mulțimii* $[T]$.

Dacă $[T_0]_\tau$ *este lanțul de transformări corespondente în raport cu* $\tau \in [\tau]$, *generat de* $T_0 \in [T]$, *atunci inversele transformărilor acestui lanț formează lanțul de transformări corespondente* $[T_0^{-1}]_\tau$, *generat de* $T_0^{-1} \in [T^{-1}]$.

Lanțurile de transformări corespondente $[T_0]_\tau$, $[T_0^{-1}]_\tau$ *sînt de același tip (ciclice de același ordin, normale sau șiruri de transformări corespondente).*

Fie T_n corespondenta de ordin n a transformării T_0 în raport cu τ și T_n^{-1} inversa sa. Deoarece.

$$T_n = \tau^n T_0 \tau^{-n},$$

rezultă

$$T_n^{-1} = \tau^n T_0^{-1} \tau^{-n}.$$

Astfel T_n^{-1} este corespondenta de ordin n a transformării T_0^{-1}, deci aparține lanțului $[T_0^{-1}]_\tau$.

c) *Dacă* $[T^{-1}] = [T]$ și $T_0 \in [T]$ are drept corespondentă de ordin n *în raport cu* τ *pe* T_0^{-1} *(n fiind cel mai mic număr pozitiv pentru care este îndeplinită această condiție), atunci* $[T_0]_\tau$ *este lanț ciclic de ordin n sau* $2n$.

Avem

$$T_0^{-1} = \tau^n T_0 \tau^{-n} \tag{3}$$

și cum $[T_0]_\tau$, $[T_0^-]_\tau$ au transformarea T_0^{-1} comună,

rezultă

$$[T_0]_\tau = [T_0^{-1}]_\tau.$$

1) *Dacă* T_0 *este transformare involutivă de ordin 1, atunci* $[T_0]_\tau$ *este lanț ciclic de ordin n.*

În adevăr, din

$$T_0^{-1} = T_0$$

rezultă

$$T_i^{-1} = T_i \qquad (0 < i \leqslant n-1).$$

De asemenea

$$T_i \neq T_0 \qquad (0 < i \leqslant n-1) \tag{4}$$

întrucît

$$T_i = T_0$$

ar conduce la

$$T_i = T_0^{-1},$$

deci la concluzia că T_0^{-1} este corespondenta de ordin $i < n$ a transformării T_0 în raport cu τ, ceea ce este contrar ipotezei.

Din (3) rezultă și

$$T_{n+i} = T_i \tag{5}$$

oricare ar fi i.

Relațiile (4) și (5) arată că $[T_0]$ este lanț ciclic de ordin n.

Consecință. Lanțul $[T_0]_\tau$ fiind ciclic de ordin n rezultă sau că τ^n este o transformare involutivă de ordin $(n-1)$ sau că produsul $\tau^n T_0$ este comutativ.

2) *Dacă T_0 nu este transformare involutivă de ordinul 1.*

Deoarece prin ipoteză

$$T_n = T_0^{-1},$$

avem și

$$T_{2n} = T_n^{-1}.$$

Dar $T_n^{-1} = T_0$, deci

$$T_{2n} = T_0$$

și astfel

$$T_{2n+i} = T_i. \tag{6}$$

De asemenea

$$T_i \neq T_0 \tag{7}$$

pentru orice $0 < i \leqslant 2n - 1$.

În adevăr ipoteza

$$T_i = T_0 \qquad 0 < i \leqslant n - 1$$

ar duce la concluzia că T_0^{-1} este corespondenta de ordin $(n - i)$ a lui T_0, ceea ce este contrar ipotezei.

Dacă am avea

$$T_n = T_0,$$

ar urma

$$T_0^{-1} = T_0.$$

Ori am admis că T_0 nu este transformare involutivă de ordin 1.

Dacă am admite

$$T_{n+i} = T_0, \quad \text{pentru orice} \quad 0 < i \leqslant n - 1,$$

ar urma

$$T_i^{-1} = T_0 \qquad \text{sau}$$

$$T_i = T_0^{-1},$$

adică T_0^{-1} ar fi corespondenta de ordin i a transformării T_0, contrar ipotezei.

Condițiile (6), (7) arată că $[T_0]_\tau$ este lanț ciclic de ordin $2n$.

Exemple: 1) Fie $[S]$ mulțimea simetriilor plane ale căror axe trec printr-un punct O și $[R]$ mulțimea rotațiilor plane de centru O. Mulțimea de transformări $[S]$ este perfect simetrică în raport cu mulțimea $[R]$. Dacă $S_0 \in [S]$ este simetria definită de axa $\triangle_0$ și $R \in [R]$ o rotație de unghi $\frac{\pi}{n}$ (n întreg), S_0 are drept corespondentă de ordin n pe S_0^{-1}. Cum S_0 este o transformare involutivă de ordin 1, lanțul $[S_0]_R$ este lanț ciclic de ordin n.

2) Fie $[T]$ mulțimea translațiilor plane și $[R]$ mulțimea rotațiilor plane.

Dacă $T_0 \in [T]$ este translația de vector $\bar{v}$ și $R \in [R]$ este rotația de centru O și unghi $\frac{\pi}{n}$, deoarece T_0^{-1} este corespondenta de ordin n a trans-

lației T_0 în raport cu transformarea R și întrucît T_0 nu este transformare involutivă de ordin 1, lanțul de transformări corespondente $[T_0]_R$ este lanț ciclic de ordin $2n$.

36°. *Asupra produselor de transformări ale lanțurilor de transformări corespondente.*

a) *Fie* $[u]$, $[v]$ *două mulțimi de transformări perfect simetrice (simetrice) în raport cu mulțimea de transformări* $[\tau]$ *și* $[u\ v]$ *mulțimea formată din produsul fiecărei transformări a mulțimii* $[v]$ *cu fiecare transformare a mulțimii* $[u]$.

Produsul $u_n\ v_n$ *al termenilor de același rang n din lanțurile de transformări corespondente* $[u_0]_\tau$ $[v_0]_\tau$ *unde* $u_0 \in [u]$, $v_0 \in [v]$, $\tau \in [\tau]$ *este termen de rang n al lanțului de transformări corespondente* $[u_0\ v_0]_\tau$, *generat de* $u_0\ v_0$.

Se știe {§ 12°, 13°} că $[u\ v]$ este perfect simetrică (simetrică) în raport cu $[\tau]$, deci $[u_0\ v_0]_\tau$ există.

Întrucît

$$u_n = \tau^n\ u_0\ \tau^{-n} \quad , \quad v_n = \tau^n\ v_0\ \tau^{-n} ,$$

rezultă

$$u_n\ v_n = \tau^n\ u_0\ v_0\ \tau^{-n} ,$$

deci $u_n\ v_n$ este corespondenta de ordin n a transformării $u_0\ v_0$, adică termenul de rang n al lanțului de transformări corespondente $[u_0\ v_0]_\tau$.

Observare. La fel se arată că $u_{n+i}\ v_n$ este termen de rang n al lanțului de transformări corespondente $[u_i\ v_0]_\tau$, generat de $u_i\ v_0$ și că $u_n\ v_{n+i}$ este termen de rang n al lanțului de transformări corespondente $[u_0\ v_i]_\tau$, generat de $u_0\ v_i$.

b) *Dacă* $[u_0]_\tau$, $[v_0]_\tau$ *sînt lanțuri ciclice de ordin n, atunci submulțimea* $[P] \subset [u\ v]$, *formată din produsele elementelor lanțurilor* $[u_0]_\tau$, $[v_0]_\tau$ *se poate descompune în cel mult n lanțuri ciclice de ordin n sau divizor de n.*

Fie

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

matricea formată din transformările lanțului $[u_0]_\tau$ și

$$V = (v_0\ v_1 \ldots v_{n-1})$$

matricea formată de transformările lanțului $[v_0]_\tau$.

Produsul $U\ V$ al celor două matrici,

$$\begin{pmatrix} u_0 v_0 & u_0 v_1 & u_0 v_2 & \ldots & u_0 v_{n-1} \\ u_1 v_0 & u_1 v_1 & u_1 v_2 & \ldots & u_1 v_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1} v_0 & u_{n-1} v_1 & u_{n-1} v_2 & \ldots & u_{n-1} v_{n-1} \end{pmatrix} ,$$

conține ca elemente toate transformările mulțimii $[P]$.

Să notăm $[P_{0,0}]$ mulțimea elementelor aflate pe diagonala matricii $U\ V$, $[P_{0,i}]$ mulțimea elementelor cuprinse pe paralela diagonalei, dusă

prin elementul $u_0\ v_i$ și $[P_{j,0})$ mulțimea elementelor matricii, cuprinse pe paralela la diagonala dusă prin elementul $u_j\ v_0$.

1) $[P_{0,0}]$ *este lanț ciclic de transformări corespondente în raport cu* τ, *de ordin* n *sau divizor de* n, *generat de* $u_0\ v_0$.

Conform proprietății precedente $[P_{0,0}]$ este lanț de transformări corespondente. Să arătăm că este lanț ciclic.

În adevăr, din ipoteză rezultă că pentru orice p, care îndeplinește condiția

$$0 \leqslant p \leqslant n-1\ ,$$

avem

$$u_p \neq u_0\ , \qquad v_p \neq v_0\ ,$$

iar

$$u_{k+n} = u_k\ , \quad v_{k+n} = v_k\ , \quad \text{oricare ar fi } k\ ,$$

deci

$$u_n\ v_n = u_0\ v_0\ . \tag{8}$$

Ca urmare, dacă

$$u_p\ v_p \neq u_0\ v_0\ ,$$

deoarece

$$u_{k+n}\ v_{k+n} = u_k\ v_k\ , \quad \text{oricare ar fi } k\ ,$$

rezultă că $[P_{0,0}]$ *este lanț ciclic de ordin* n.

Dacă avem

$$u_p\ v_p = u_0\ v_0\ , \tag{9}$$

unde p este cel mai mic număr pozitiv mai mic decît n care satisface această relație, avînd în vedere și relația (8), deducem că p trebuie să fie un divizor al lui n. În acest caz, din (9) rezultă

$$\tau^p\ u_0\ v_0\ \tau^{-p} = u_0\ v_0\ ; \tag{10}$$

deci sau $\tau^p = 1$, ceea ce este absurd, pentru că ar duce la concluzia că $[u_0]_\tau$ este lanț ciclic de ordin $p < n$, concluzie contrară ipotezei, sau

$$\tau^p\ u_0\ v_0 = u_0\ v_0\ \tau^p\ . \tag{11}$$

În condițiile relației (9) sau (11)

$$u_m\ v_m \neq u_0\ v_0 \qquad (0 \leqslant m \leqslant p-1);$$

de asemenea

$$u_{k+p}\ v_{k+p} = u_k\ v_k\ , \quad \text{oricare ar fi } k$$

(această ultimă relație rezultă din (10) înmulțind la stînga cu τ^k și la dreapta cu τ^{-k}).

Astfel $[P_{0,0}]$ *este lanț ciclic de ordin* p (p divizor al lui n).

2) *La fel se arată că* $[P_{0,i}]\ U\ [P_{n-i,0}]$ *este lanț ciclic de ordin* n *sau divizor de* n.

Cum i poate lua $(n-1)$ valori, conchidem că $[P]$ se descompune în n lanțuri ciclice, dacă acestea sînt disjuncte.

Este însă posibil ca unele dintre cele n lanțuri ciclice ale mulțimii $[P]$ să fie egale.

Catedra de Matematică
din Institutul Politehnic București

О СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

III

ЦЕПИ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Краткое содержание

Предполагая множество преобразований $[T]$ совершенно симметричным (просто симметричным), обозначается через T_n соответствие порядка преобразований $T_0 \in [T]$ относительно преобразования $\tau \in [\tau]$, и T_{-n} соответствие порядка $(-n)$ для T_0 относительно τ, т. е. преобразование множества $[T]$, преобразованием которого порядка n относительно τ является T_0.

Цепью соответствующего преобразования относительно τпорожденной T_0 явля- ется множество $[T_0]_\tau$ преобразования T_n (n — целя). T_0 является :

1. *Циклическая цепь порядка i*, если преобразования T_n является особый для $0 \leqslant n \leqslant i-1$ и $T_{k+i} = T_k$ для любого K.

2. *Нормальная цепь*, если n является любым целым числом и $T_n \neq T_m$ для $n \neq m$.

3. *Ряд соответствующих преобразований* если $n, m \geqslant -p$ (p — целое, положительное) и $T_n \neq T_m$ для $n \neq m$. В этом случае T_{-p} является простым преобразованием.

В этой заметке представлены некоторые свойства цепей соответствующих преобразований. Так демонмтрируотся теоремы (§ 35°).

Пусть $[T]$ *множество совершенно симметричных преобразований относительно* $[\tau]$. Если $[T_0]_\tau$, $[t_0]_\tau$ (где $T_0 \in [T]$, $t_0 \in [T]$) имеют общий елемент, тогда $[T_0]_\tau = [t_0]_\tau$. Делается заключение, что $[T]$, сформировано из соединений цепей соответствующих раздельных преобразований относительно τ.

CORRESPONDING TRANSFORMATIONS

III

THE CHAINS OF CORRESPONDING TRANSFORMATIONS.

(Summary)

Considering the aggregate of transformations $[T]$ perfect symmetric (symmetric) in connexion with the aggregate $[\tau]$, we denote T_n the corresponding transformation of order n of the transformation $T_0 \in [T]$ in con-

nexion with a transformation $\tau \in [\tau]$ and T_{-n}, the correspondent transformation of order $(-n)$ of T_0 in connexion with τ, namely the transformation of $[T]$ whose corresponding transformation of order n in connexion with τ is T_0.

The chain of corresponding transformations in connexion with τ formed by T_0 is the aggregate $[T_0]_\tau$ of the transformations T_n (n integer).

$[T_0]_\tau$ is:

1) *a cyclical chain of order i,* if the T_n are distincts for $0 \leqslant n \leqslant i-1$ and $T_{k+i} = T_k$ for every k;

2) *a normal chain,* if we have T_n for every n and $T_n \neq T_m$ for $n \neq m$;

3) *a set of corresponding transformations,* if $n, m \geqslant -p$ (p integer positive) and $T_n \neq T_m$ for $n \neq m$. In this case T_{-p} is a prime — transformation.

In this note we present some problems on the chains of corresponding transformations. So we demonstrate the theorem (§ 35°):

Let $[T]$ be an aggregate of transformations perfect symmetric (symmetric) in connexion with $[\tau]$. If $[T_0]_\tau$, $[t_0]_\tau$ ($T_0 \in [T]$, $t_0 \in [T]$) have an common element, then $[T_0]_\tau = [t_0]_\tau$.

So $[T]$ is formed by the union of chains of corresponding transformations in connexion with τ, disjuncts.

SUR LES TRANSFORMATIONS CORRESPONDANTES

III *)

LES CHAINES DE TRANSFORMATIONS CORRESPONDANTES

(Résumé)

En considérant l'ensemble de transformations $[T]$ parfaitement symétrique (symétrique) par rapport à l'ensemble $[\tau]$, on note T_n la correspondante d'ordre n de la transformation $T_0 \in [T]$ par rapport à une transformation $\tau \in [\tau]$ et T_{-n}, la correspondante d'ordre $(-n)$ de T_0 par raport à τ, à savoir la transformation de l'ensemble $[T]$ dont la transformation d'ordre n par rapport à τ est T_0. La chaîne de transformations correspondantes par rapport à τ engendrée par T_0, , c'est l'ensemble $[T_0]_\tau$ des transformations T_n (n entier). $[T_0]_\tau$ est:

1) *une chaîne cyclique d'ordre i,* si les T_n sont distinctes pour $0 \leqslant n \leqslant i-1$ et $T_{k+i} = T_k$ pour tout k;

2) *une chaîne normale,* si n est n'importe quel nombre entier et $T_n \neq T_m$ pour $n \neq m$;

3) *Une suite de transformations correspondantes,* si $n, m \geqslant -p$ (p entier positif) et $T_n \neq T_m$ pour $n \neq m$. Dans ce cas T_{-p} est une transformation première.

*) La suite des notes parues dans le Buletin de l'Institut Polytechnique de Bucarest Tome XXI, Fasc. 1, 2.

Dans cette note nous présentons quelques propriétés des chaînes de transformations correspondantes. Ainsi on démontre le théorème (§, 35°) :

Soit [T] un ensemble de transformations parfaitement symétrique (symétrique) par rapport à $[\tau]$. Si $[T_0]_\tau$, $[t_0]_\tau$ *(où* $T_0 \in [T]$, $t_0 \in [T]$*) ont un élément commun, on a*

$$[T_0]_\tau = [t_0]_\tau .$$

On conclut que [T] est formée par la réunion des chaînes de transformations correspondantes par rapport à τ, *disjointes.*

ÜBER DIE ENTSPRECHENDEN TRANSFORMATIONEN

III

Die Ketten von entsprechenden Transformationen

(Zusammenfassung)

Betrachtend die vollkommensymetriche (symetrische) Menge von Transformationen $[T]$ in Beziehung auf die Menge von Transformationen $[\tau]$, notiert man T_n die entsprechende Transformatione *n-ter* Ordnung der Transformation $T_0 \in [T]$ in Beziehung auf eine Transformation $\tau \in [\tau]$ und T_{-n}, die entsprechende Transformation $(-n)$-ter Ordnung der T_0 in Beziehung auf τ, nämlich die Transformation der Menge $[T]$ deren Transformation n-ter Ordnung, in Beziehung auf τ, T_0 ist.

Die Kette von entsprechenden Transformationen in Beziehung auf τ_n von T_0 gezeugt, ist die Menge $[T_0]_\tau$ der Transformationen T (n ganze Zahl).

$[T_0]_\tau$ ist :

1) *eine geschlossene Kette i-ter Ordnung,* ob die T_n unterschieden für $0 , \leqslant n \leqslant i-1$ und $T_{k+l} = T_k$ für alle k ist;

2) *eine normale Kette,* ob n jede ganze Zahl ist und $T_n \neq T_m$ für $n \neq m$;

3) *eine Reihe von entsprechenden Transformationen,* ob n, $m \geqslant -p$ (p ganze, pozitive Zahl) und $T_n \neq T_m$ für $n \neq m$. In diesem Falle T_{-p} ist eine Primtransformation.

In dieser Schrift geben wir einige Sätze der Ketten von entschprechenden Transformationen. Z. B. gibt man den Satz (§, 35°) :

Es sei $[T]$ eine vollkommensymetrische (symetrische) Menge von Transformationen in Beziehung auf $[\tau]$. Ob $[T_0]_\tau$, $[t_0]_\tau$ (wo $T_0 \in [T]$, $t_0 \in [T]$) ein gemeines Element haben, auch

$$[T_0]_\tau = [t_0]_\tau .$$

Also $[T]$ wird von die Vereinigung der Ketten von entsprechenden Transformationen in Beziehung auf τ gebildet, die gemeine Transformationen nicht haben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

ORGANIZAREA ȘI PLANIFICAREA ÎNTREPRINDERILOR

CONTRIBUȚII PRIVIND METODOLOGIA DE CALCUL A CAPACITĂȚII DE PRODUCȚIE PENTRU SECȚIILE DE PRELUCRĂRI MECANICE *)

HOMOȘ TUDOR, ST. BÎRLEA, GH. MĂRGĂRIT

Partidul Muncitoresc Romîn călăuzindu-se după învățătura marxist-leninistă cu privire la construirea socialismului, acordă o atenție deosebită industrializării socialiste a țării. Directivele adoptate de cel de al III-lea Congres cu privire la planul economic pe 6 ani prevăd un ritm anual de creștere a producției industriale de cca. 13%.

Un rol important in îndeplinirea acestei sarcini îl au întreprinderile industriale existente prin a căror modernizare, reorganizare, reutilare, reconstrucție și dezvoltare, se va realiza peste 80% din totalul producției industriale a anului 1965. De aici rezultă pe lîngă altele necesitatea descoperirii și folosirii rezervelor interne ale întreprinderilor industriale și a adoptării măsurilor tehnico-organizatorice corespunzătoare, în vederea mai justei utilizări a mijloacelor tehnice existente.

Utilizarea rațională și cît mai completă a capacităților de producție a întreprinderilor socialiste are o însemnătate deosebită, deoarece ea contribuie la îndeplinirea cerințelor legii economice fundamentale a socialismului, ale legii dezvoltării planice proporționale a economiei naționale, influențînd și asupra creșterii productivității muncii, reducerii prețului de cost și a rentabilității întreprinderii.

Descoperirea și justa folosire a rezervelor întreprinderii depinde în mare măsură de stabilirea corectă a capacității de producție. Ținînd seama de importanța pe care o acordă documentele de Partid și de Stat acestei probleme, lucrarea de față își propune să sistematizeze și să prezinte succint unele probleme noi ce vor trebui să stea la baza calculelor de capacitate.

I. *Capacitatea de producție, factorii care influențează asupra ei.*

„Capacitatea de producție este producția maxim posibilă în expresie naturală ce poate fi dată de o unitate de producție — întreprindere, secție, atelier, mașină unealtă — stabilită pe baza folosirii depline a suprafețelor de producție, a utilajului și a timpului anual de întrebuințare a acestuia pe baza aplicării normelor tehnice de folosire a utilajului de producție

*)Lucrare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București din 17—18 decembrie 1960.

ținînd seama de succesele întreprinderilor cu tehnica cea mai înaintată, cu buna organizare a muncii și fără luarea în calcul a „locurilor înguste" din producție *).

Fundamentarea calculului științific al capacității de producție este legată de cunoașterea temeinică a disponibilităților unității productive, a consumurilor ce le implică elaborarea produselor, precum și a nivelului de pregătire și calificare al forței de muncă. Toate acestea se pot sintetiza în 3 elemente fundamentale: fondul disponibil (mașini — ore, ore-normă, m^2), consumul pe unitate de produs (timp, greutate, suprafață etc.) și coeficientul de îndeplinire a normelor. La rîndul lor elementele arătate mai sus sînt condiționate de o serie de factori a căror influență se face resimțită într-o măsură mai mare sau mai mică asupra capacității de producție însăși:

a) înzestrarea tehnică a unității productive, cantitatea, calitatea utilajelor și regimul de funcționare al lor;

b) tehnologia folosită și normele tehnice de consum;

c) gradul de calificare și experiența personalului de bază, auxiliar și tehnico-inginerese;

d) sistemul de organizare a fabricației în timp și spațiu. Cunoașterea temeinică a acestor factori și în mod deosebit a influenței lor asupra capacității de producție, poate fi considerată ca una din problemele cele mai importante care stau în fața colectivelor de muncitori, ingineri și tehnicieni din unitățile productive.

Este însă necesar ca măsurile ce se preconizează pentru sporirea capacității de producție să fie temeinic studiate, să se aprecieze eficacitatea lor economică și să fie fundamentate pe schimbările de ordin calitativ și cantitativ ale factorilor care influențează asupra mărimii ei.

Prin însăși esența ei noțiunea de capacitate așa cum rezultă din definiția prezentată anterior, este un indicator tehnico-economic ce se caracterizează prin cantitatea de produse, subansamble, semifabricate, etc. elaborate de o unitate productivă într-un interval de timp dat. De aici rezultă concluzia firească că unitățile productive identice, care elaborează aceleași produse trebuie să aibă și aceiași capacitate.

Spre exemplu, este normal ca două strunguri fabricate de Uzina „Iosif Rangheț" care efectuează prelucrarea exterioară a pistoanelor pentru motorul autocamionului „Steagul Roșu" să fie caracterizate de aceiași mărime a capacității indiferent de faptul că unul dintre ele se află la Uzina „V. Tudose" Colibași, iar celălalt într-un atelier de reparații auto. Trebuie să precizăm că acest principiu privit prin prizma actualei metodologii a calculului capacității de producție nu poate fi respectat deoarece *se condiționează cele trei elemente fundamentale ale capacității (disponibilități, necesar, și situația îndeplinirii normelor) de factorii specifici fiecărei unități productive.*

Formula generală de calcul a capacității de producție utilizată pînă în prezent este:

$$C = \frac{F}{t} K$$

*) Conform H.C.M. din 1953.

unde F = fondul de timp disponibil
t = consumul de timp pe bucată sau unitate convențională
K = coeficientul de îndeplinire a normelor.

În această situație capacitatea de producție a celor două strunguri din exemplul anterior ar fi diferită întrucît între regimurile de lucru, mărimea întreruperilor din funcționarea utilajelor, consumul de timp pe bucată, calificarea muncitorilor ca și sistemul de organizare a fabricației, la cele două întreprinderi pot exista în aceiași perioadă deosebiri esențiale.

Ținînd seama de interpretarea principială a definiției capacității de producție și de situația concretă expusă mai sus, apare evident contradictoriu faptul *că două unități productive identice dau producții maxim posibile diferite.*

Eliminarea acestei contraziceri este posibilă numai dacă vom privi noțiunea de capacitate sub un dublu aspect și anume :

a) ca măsură a posibilităților maxime ale întreprinderii ;

b) ca măsură a posibilităților condiționate ale întreprinderii în funcție de regimul de funcționare, gradul de intensitatea muncii, etc.

În primul caz plecăm de la ideia că toate unitățile productive ar putea folosi la maximum condițiile de care dispun, respectiv utilizarea a trei schimburi pe zi, a normelor tehnice avansate și a unei forțe de muncă cu calificare corespunzătoare. În calculul disponibilităților trebuiesc avute în vedere toate utilajele în stare de funcționare, normele tehnice calculate la nivelul realizărilor obținute de fruntași, iar folosirea extensivă a capacității trebuie calculată în raport cu indicatorii maximi.

Capacitatea calculată în acest fel ar reprezenta întradevăr producția maxim posibilă a unității respective și în același timp ar fi egală pentru toate unitățile productive identice (mașini unelte, secții, ateliere, întreprinderi etc.). Această noțiune o vom defini *CAPACITATEA TEHNICĂ.*

În cel de al doilea caz va trebui să avem în vedere condițiile specifice în care se desfășoară activitatea fiecărei unități și în primul rînd regimul de funcționare al utilajelor, normativele întreprinderii și situația concretă a participării forței de muncă în producție exprimată prin coeficientul de îndeplinire al normelor. Capacitatea calculată în acest fel o vom defini *CAPACITATEA DE REGIM.*

Introducerea acestei noi interpretări a noțiunii de capacitate influențează direct și asupra metodelor care stau la baza calculului ei. Astfel, în calculul capacității tehnice coeficientului de îndeplinire a normelor nu mai joacă nici un rol ;

$$C_T = \frac{F_{teh}}{t_{teh}}$$

unde $F\,teh$ este fondul disponibilităților maxim posibile.

t_{teh} — norma tehnică pe unitate de produs.

Întrucît fondul tehnic nu se modifică decît în cazul introducerii în funcțiune de noi unități, iar norma tehnică este constantă pe intervale de timp destul de lungi, rezultă că și *capacitatea tehnică trebuie să fie privită ca o mărime constantă în timp.*

În ceea ce privește capacitatea de regim formula de calcul devine:

$$C_R = \frac{Fr}{tn} K_i$$

unde Fr — este fondul de regim
tn — norma de timp pe unitate de produs calculată în uzină
K_i — coeficientul mediu de îndeplinire a normelor pe uzină, secție, atelier etc.

Avînd în vedere faptul că aceste elemente se modifică continuu în timp potrivit condițiilor concrete ale unității respective *putem considera capacitatea de regim ca un factor evolutiv.*

II. *Utilizarea capacității tehnice și de regim în repartizarea sarcinilor de plan.*

Diferențierea noțiunii de capacitate prezentată anterior nu trebuie privită numai prin prisma teoretică deoarece ea are consecințe deosebite și pentru activitatea practică. Capacitatea tehnică reprezintă indicatorul de bază care măsoară posibilitățile maxime ale unei unități productive; după părerea autorilor ea trebuie calculată periodic pentru a se cunoaște disponibilitățile atît pe scară locală (atelier, secție, întreprinderi etc.) cît și pe scară centrală, departament, minister. Ea servește de asemeni ca mijloc de echivalență în compararea unităților productive.

Spre exemplu: dacă luăm în studiu unitățile productive,

$$A, B, C. D, - - - - - - - - - - K$$

ale căror capacități tehnice exprimate în unități comparabile sînt:

$$C_{T_A}; \quad C_{T_B}; \quad C_{T_C}; \quad C_{T_D} - - - - - - C_{T_K}$$

rezultă că greutatea specifică a fiecărei unități este:

$$g_{ci} = \frac{C_{T_i}}{\sum C_{T_i}}$$

Prin esența lui aceasta nu este altceva decît un *coeficient de proporționalitate a capacităților* care, dacă activitatea unităților productive se desfășoară în mod normal trebuie să fie regăsit și în proporționalitatea celorlalți indicatori ai activității lor economice.

Această concluzie apare deosebit de evidentă dacă ne gîndim la posibilitatea utilizării coeficientului de proporționalitate a capacităților în defalcarea planului de producție.

Astfel, dacă întreprinderile care elaborează produse similare X, Y, Z, au capacitățile tehnice $C_{T_X}; C_{T_Y}; C_{T_Z}$ atunci defalcarea planului de producție pe întreprinderi în așa fel încît să încarce și să mobilizeze uniform toate unitățile este absolut necesar să se facă în raport cu *capacitățile tehnice* care reprezintă posibilitățile maxime ale fiecărei unități și nu în raport cu *capacitățile de regim* care reprezintă posibilitățile condiționate ale între-

prinderii. Dacă nu se pleacă de la acest principiu înseamnă că repartizarea cifrelor de plan, va fi făcută în condiții de solicitare diferită a unităților productive — unele vor fi suprasolicitate, iar altele — vor rămîne cu importante rezerve interne neutilizate.

Spre exemplu: Dacă luăm spre comparație trei mașini unelte identice: M_x; M_y; M_z; care aparțin întreprinderilor X, Y, Z și elaborează produsele A. B. C, se pot ivi următoarele situații:

1. În cele trei întreprinderi ca urmare a unor regimuri de lucru diferite fondurile de timp disponibile ale fiecărei mașini vor diferi (deși mașinile sînt identice). Vom avea deci:

$$F_{r_x};\ F_{r_y};\ F_{r_z}$$

2. Consumurile de timp pentru elaborarea produselor diferă de la întreprindere la întreprindere, în funcție de anumiți factori specifici (deși se elaborează aceleași produse).

Astfel, timpii normați pe unitate de produs vor fi:

$t_{A_x}\ t_{B_x}\ t_{C_x}$ Pentru întreprinderile X

$t_{A_y}\ t_{B_y}\ t_{C_y}$ Pentru întreprinderile Y

$t_{A_z}\ t_{B_z}\ t_{C_z}$ Pentru întreprinderile Z

3. În aceste condiții este firesc să avem și capacități de regim diferite chiar dacă proporția în care se fabrică produsele va fi aceiași la toate întprinderile (vezi metodologia de calcul a consumului pe unitate convențională), vor rezulta capacitățile de regim:

$$C_{R_X};\ C_{R_Y};\ C_{R_Z}$$

Dacă departamentul căruia îi sînt subordonate aceste întreprinderi are un plan de producție N_A; N_B N_C; și defalcarea planului pe întreprinderi se face în funcție de capacitățile de regim, va rezulta următoarele cifre de plan:

$$N_{A_X};\ N_{A_Y};\ N_{A_Z}$$

$$N_{B_X};\ N_{B_Y};\ N_{B_Z}$$

$$N_{C_X};\ N_{C_Y};\ N_{C_Z}$$

Această defalcare nu este însă mobilizatoare, deoarece ea ține seama de anumite diferențieri ale capacității pentru unități productive identice, ceea ce așa cum s-a demonstrat anterior este un fapt contradictoriu. Dacă în acest exemplu s-ar fi folosit repartizarea sarcinilor de plan în raport cu capacitatea tehnică atunci fondurile de timp ar fi fost:

$$F_{t_x} = F_{t_y} = F_{t_z} \text{ iar } \begin{matrix} t_{A_x} = t_{A_y} = t_{A_z} \\ t_{B_x} = t_{B_y} = t_{B_z} \\ t_{C_x} = t_{C_y} = t_{C_z} \end{matrix}$$

și deci $C_{T_x} = C_{T_y} = C_{T_z}$. În aceste condiții defalcarea cifrelor de plan ar fi încărcat uniform mașinile unelte mărimea lor fiind :

$$N'_{Ax} = N'_{Ay} = N'_{Az}$$

$$N'_{Bx} = N'_{By} = N'_{Bz}$$

$$N'_{Cx} = N'_{Cy} = N'_{Bz}$$

În practica întreprinderilor constructoare de mașini, se întîlnesc situații mult mai complexe în funcție de marea varietate a sortimentelor ce se produc, a stadiului diferit de organizare a fabricației și în mod deosebit gradul de înzestrare tehnică.

În aceste condiții justa defalcare a planului de producție poate fi efectuată pe etape în baza următoarei metodologii :

a) Calculul capacităților tehnice ; se efectuează folosind relația $C_T = \frac{Fteh}{t_{teh}}$. Va rezulta pentru fiecare unitate productivă.

$$C_{T_A}\ ;\ C_{T_B}\ ;\ C_{T_C}\ ; - - - - - - - - - - - - - - - - C_{T_K}$$

b) Calculul coeficienților de proporționalitate cu ajutorul relației : rezultă

$$g_{c_i} = \frac{C_{T_i}}{\Sigma C_{T_i}} - \text{rezultă}$$

$$g_{c_A}\ ;\ g_{c_B}\ ;\ g_{c_C}\ ;\ g_{c_D} - - - - - - - - - - - - - g_{c_K}$$

c) Calculul cifrelor de plan pentru fiecare întreprindere cunoscîndu-se bineînțeles sarcinile forului tutelar (N) exprimate în unități comparabile. Se efectuează cu ajutorul relației :

$$N_i = \frac{N \cdot g_{c_i}}{\Sigma g_{c_i}} \text{ de aici va rezulta}$$

$$N_A\ ;\ N_B\ ;\ N_C\ ; - - - - - - - - - - - N_K$$

Trebuie făcută observația că mărimea lui N care se stabilește în conformitate cu cerințele economiei naționale și disponibilitățile existente trebuie să respecte condiția :

$$\Sigma C_{T_i} > N\ (I)$$

de unde rezultă că și $C_{T_i} > N_i$ întrucît $N = \Sigma N_i$ diferența dintre ΣC_{T_i} și N respectiv C_{T_i} și N_i reprezintă rezervă de capacitate.

De asemeni trebuie să facem precizarea că această condiție nu exclude obligativitatea existenței unei corespondențe și între capacitățile de regim și planurile de producție.

De aceea, după efectuarea calculelor de mai sus trebuie făcută și verificarea condiției :

$\Sigma C_{R_i} > N$ iar (II)

$K_{u_i} C_{R_i} > N_i$ unde K_u este indicele de utilizare a capacității de regim în raport cu sarcina de plan.

În verificarea acestei condiții pot apare următoarele cazuri :

1) $\Sigma C_{R_i} > N$ iar
$K_{u_i} C_{R_i} = N_i$ pentru toate unitățile productive

2) $\Sigma C_{R_i} > N$ iar
$K_{u_i} C_{R_i} > N_i$ pentru toate unitățile productive

3) $\Sigma C_{R_i} > N$ iar
$K_{u_i} C_{R_i} > N_i$ pentru anumite unități
$K_{u_i} C_{R_i} = N_i$ pentru alte unități
$K_{u_i} C_{R_i} < N_i$ pentru celelalte unități

4) $\Sigma C_{R_i} < N$ iar
$K_{u_i} C_{R_i} < N_i$ pentru toate unitățile

5) $\Sigma C_{R_i} < N$ iar
$K_{u_i} C_{R_i} > N_i$ pentru o serie de unități productive.
$K_{u_i} C_{R_i} = N_i$ pentru o altă serie de unități.
$K_{u_i} C_{R_i} < N_i$ pentru celelalte unități.

Fiecare din aceste cazuri are o anumită semnificație pentru activitatea forului tutelar și o altă semnificație pentru unitățile subordonate.

Cazurile 1 ; 2 ; 3 ; pentru forul tutelar, corespunde posibilității îndeplinirii planului. Pentru cazul 1 acest lucru este posibil fără vreo măsură deosebită reprezentînd cazul ideal cînd toate întreprinderile în raport cu capacitățile de regim sînt uniform încărcate. Pentru cazul 2, îndeplinirea planului este posibilă, dar unitățile productive nu sînt solicitate la posibilitățile lor ; în general N este mic în raport cu posibilitățile direcției. Pentru cazul 3 îndeplinirea sarcinii pentru forul tutelar este condiționată de stabilirea unor măsuri concrete pentru creșterea capacității de regim a unităților care se găsesc în situația $K_{u_i} C_{R_i} < N_i$. Cazurile 4; 5; semnifică în general imposibilitatea îndeplinirii planului, la nivelul forului tutelar. În cazul 4 acest lucru este valabil atît la nivelul forului tutelar cît și la nivelul tuturor unităților productive. Pentru cazul 5, acest lucru nu este valabil, decît la nivelul anumitor întreprinderi și al forului tutelar. În ambele situații trebuiesc luate măsuri concrete de creștere a capacităților de regim, acest lucru fiind posibil întrucît capacitatea tehnică (condiția I) indică existența rezervelor interne necesare.

Metoda prezentată este destul de simplă în raport cu eficacitatea ei, deoarece calculul capacității tehnice se poate efectua cu ușurință cînd normele și fondurile tehnice sînt cunoscute.

Trebuie să facem observația că ea poate fi aplicată ca mijloc de comparație și pentru întreprinderi cu profil diferit cu condiția ca exprimarea capacității să se facă în unități comparabile (convenționale, greutate, valoric etc.). De asemeni, poate fi aplicată și extinsă și la nivelul întreprinderilor, secțiilor, atelierelor.

IV. *Noțiunea de „dinamică a capacității de producție"*

Ținînd seama de faptul că de la o perioadă la alta schimbările condițiilor în care se desfășoară procesele de producție, influențează sensibil asupra mărimii capacității de regim ceea ce se reflectă în ultima instanță în însăși volumul de producție realizat de unitățile productive (secție, întreprindere, atelier, mașină, rezultă necesitatea introducerii noțiunii de *„dinamică a capacității de producție.*

Prin „dinamică" a capacității de producție" înțelegem *legea de variație a capacității de regim, a unei unități productive constructoare de mașini, în decursul unei perioade date.* Spre exemplu dacă în decursul perioadei T admitem că toate elementele producției rămîn constante, cu excepția coeficientului de îndeplinire al normelor care are o variație lineară, rezultă că formula de calcul a capacității de producție devine :

$$C_R = \frac{F_r}{t_n} \cdot K_i$$ unde : F_r = fondul de timp (constant)

t_n = timpul normat/buc. (constant)

K_i = coeficientul de îndeplinire a normelor variabilă liniară) în timp, deci :

$$K_i = Hxt$$

Notînd $H\frac{F_r}{t_n} = A$ fiind în condițiile noastre un element constant rezultă că:

$C_R = At$ (adică ecuația unei drepte ce trece prin origine

În realitate însă de fiecare dată pornim de la o situație existentă a întreprinderii căreia îi corespunde o mărime inițială a capacității — deci dinamica — devine :

$C_R \pm At + C_0 = 0$ ecuația unei drepte al cărei coeficient unghiular este :

$t_g \varphi_2 = \pm A$

Am ales acest exemplu simplu pentru a arăta că și în acest caz simplu dinamica capacității are un rol deosebit (vezi graficul 1) deoarece ea condiționează evoluția unor indicatori de bază ai producției.

1. În condițiile unei juste eșalonări a planului de producție el trebuie să aibă tot o variație lineară al cărui coeficient unghiular trebuie să fie același.

2. Depășirile de plan în condițiile respectării principiului ritmicității dinamice trebuie să aibe aceiași evoluție (o dreaptă) al cărui coeficient

unghiular va fi mai mare(se adaugă $t_g \varphi_2$). Condiția care trebuie respectată izvorîtă din logica lucrurilor — respectiv depășirile de plan vor fi totdeauna mai mici decît evoluția capacității este următoarea:

$$T_g \varphi_1 < T_g (\varphi_1 + \varphi_2) \text{ unde } F_g (\varphi_1 + \varphi_2) < \frac{C_f - N_{op}}{T}$$

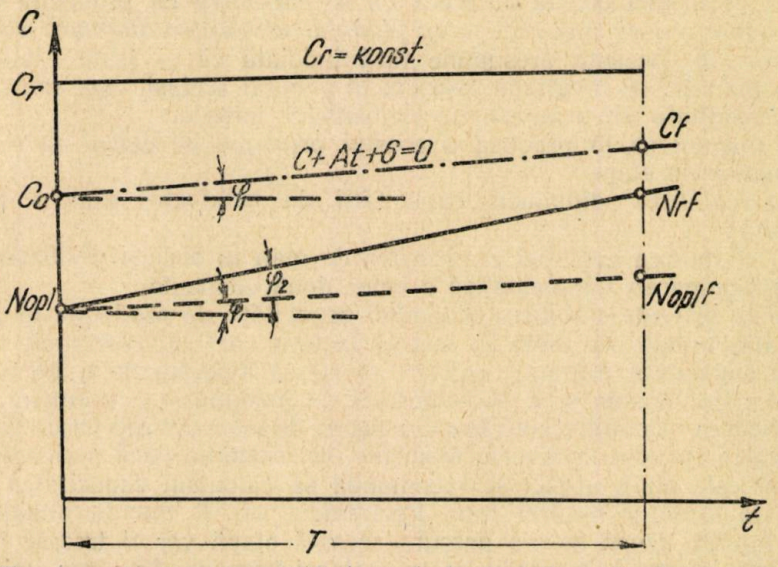


Fig. 1. — Creșterea capacității de producție în ipoteza că singura variabilă este îndeplinirea normelor iar toate celelalte elemente rămîn neschimbate

C_T = capacitatea tehnică
C_F = capacitatea de reg. la finele perioadei
$Nplf$ = sarcina finală de plan
Nrf = realizarea finală a planului.

3. Din grafic se observă că atîta vreme cît se respectă condițiile impuse capacitatea tehnică este constantă.

T = perioada de plan
$Nopl$ = planul inițial
Co = capac. de reg. inițială
Condiția de ritmicitate se respectă.

$$\text{tg } \varphi_1 < \text{Tg } (\varphi_1 + \varphi_2) < \text{tg } 2\varphi_1$$

Este necesar să subliniem că așa cum s-a arătat în capitolele anterioare, capacitatea de producție este influențată de factori numeroși și de o mare complexitate. Intrucît acești factori se reflectă în elementele care stau la baza calculului capacității în general, rezultă că legea de variație a capacității de producție poate fi considerată ca o funcție de trei variabile independente.

În prezenta lucrare ne vom opri numai la două aspecte ale influenței dinamicii capacității asupra fabricației și anume :

1. Folosirea dinamicii capacității în aprecierea ritmicității fabricației ;
2. Folosirea dinamicii capacității de producție în justa eșalonare în timp a planului de producție.

În ceea ce privește primul aspect trebuie să arătăm că baza principială a problemei constă în aceea că se consideră că producția este ritmică numai atunci cînd *realizarea planului urmărește dinamica capacității de producție*. Aceasta presupune fără îndoială că și justa eșalonare în timp a planului de producție respectă în general aceiași lege, sau cel puțin pe cea rezultată din cunoașterea elementelor inițiale.

Transpunerea în practică a acestui principiu de calcul se realizează în următoarele etape :

a) Stabilirea dinamicii capacității de producție pentru perioada analizată ;

b) Stabilirea evoluției realizărilor de plan în aceiași perioadă ;

c) Compararea matematică a celor două elemente.

În ce privește stabilirea dinamicii capacității de producție în perioada analizată, trebuie să avem în vedere factorii care au contribuit la modificarea capacității inițiale, respectiv creșterea fondului de timp, reducerea normelor de consum și a coeficientului de îndeplinire a normelor. Pentru simplificarea calculului vom lua din datele de evidență ale producției situația fiecărui element la diferite momente, de exemplu, dacă perioada supusă analizei este anul, atunci se recomandă să calculăm capacitatea de producție la sfîrșitul fiecărei luni. Rezultatele vor fi trecute într-un grafic (vezi fig. 2). După ce s-a parcurs această etapă vor fi trecute în grafic realizările planului de producție la aceleași termene. În urma unirii punctelor obținute vor rezulta două curbe : prima reprezintă dinamica capacității de producție iar a doua reprezintă realizările de plan. Compararea acestor două curbe se poate efectua ținînd seama de suprafețele limitate de fiecare dintre ele, ceea ce reprezintă în fapt *noul criteriu propus pentru aprecierea ritmicității fabricației* (vezi explicațiile la grafic).

T = perioada supusă analizei (12 luni)
X_i reprezintă diferite momente de calcul ale capacității în perioada dată T.

$$C_{x_i} = \frac{F_{ri}}{t_{n_i}} K_i \text{ unde}$$

Fr_i = fondul de regim pentru momentul i
T_{n_i} = norma de timp/buc, pentru momentul i
K_i = coeficientul de îndeplinire a normelor
N_o = planul inițial
Np_i = cifrele de plan la momentul i
Nr_i = realizările de plan la momentul i

Din grafic rezultă că fiecare curbă limitează anumite suprafețe a căror mărime exprimă în fond diferiți indicatori ai producției. Astfel, suprafața

S_1 limitată de curba de plan, abscisă și ordonată pe conturul O, A, și Npk reprezintă planul de producție. Pentru a aprecia ritmicitatea fabricației în baza principiului enunțat anterior vom trasa o *curbă de comparație* (care are aceiași formă cu cea a dinamicii capacității avînd drept punct de plecare No). Ea reprezintă evoluția pe care trebuie să o aibă realizările de plan în condițiile respectării ritmicității.

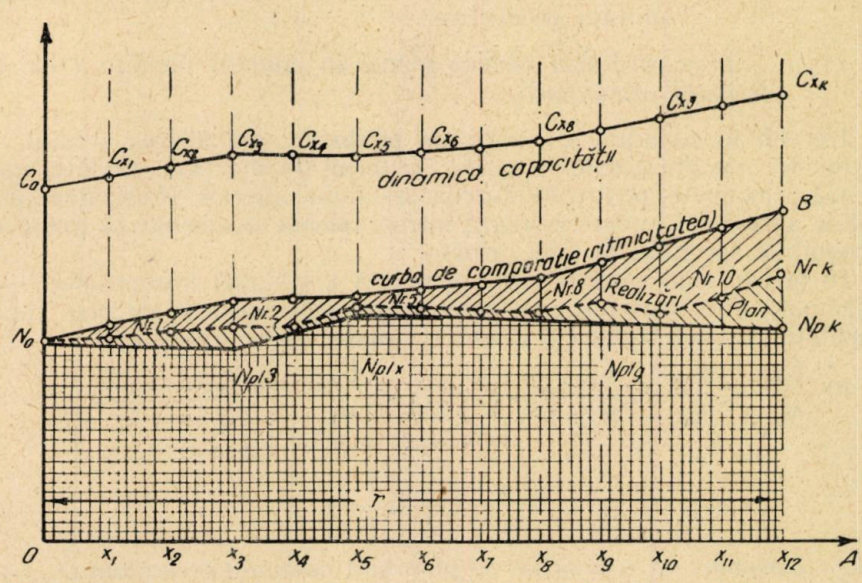


Fig. 2. — Aprecierea ritmicității fabricației pe baza dinamicii capacității de regim (trasarea curbei de comparație)

Scriind această condiție rezultă că trebuie satisfăcută relația :

$$\frac{C_{x_1}}{N_{C_1}} = \frac{C_{x_2}}{N_{C_2}} = \frac{C_{x_3}}{N_{C_3}} = \frac{C_{x_4}}{N_{C_4}} = \ldots\ldots \frac{C_{x_k}}{N_{C_K}} = \text{Konstant}$$

de aici se desprinde concluzia că raportul dintre suprafețele limitate de dinamica capacității și cea limitată de curba de comparație poate fi considerat drept coeficientul de bază al ritmicității, deci :

$$\frac{S\,(Co,\ O,A,\ C)}{S\,(No,\ O,A,\ B)} = \beta \text{ (condiția de ritmicitate)}$$

În același timp raportul dintre suprafețele limitate de curba de comparație și suprafața limitată de curba realizărilor de plan este indicele de neritmicitate, deci :

$$\frac{S\,(No,\ O,A,\ N_{r_k})}{S\,(No,\ O,A,\ B)} = \varepsilon \text{ (coeficientul de neuniformitate)}$$

Dacă comparăm acești doi coeficienți rezultă că pot exista 3 situații:

a) $\frac{\varepsilon}{\beta} < 1$ — ceea ce reprezintă producția neritmică. Cu cît acest raport este mai mic cu atît producția este mai neritmică.

b) $\frac{\varepsilon}{\beta} \geq 1$ — producția ritmică: realizată cu o solicitare optimă a unității productive.

c) $\frac{\varepsilon}{\beta} \geq 1$ — producția ritmică numai în anumite condiții (vezi graficele următoare).

Întrucît în condițiile concrete ale producției pot apărea situații mult diferite de cele prezentate în grafic, criteriul de mai sus, rămîne, numai ca bază principială, pentru efectuarea calculului ulterior. Precizarea cu certitudine a modului în care lucrează întreprinderea se efectuează ținînd cont de condițiile specifice, în felul următor:

În primul rînd caracterizarea generală a situației întreprinderii poate fi efectuată prin raporturile în care se găsesc realizările de plan față de capacități. Aici pot apărea 3 cazuri și anume (vezi graficele).

a) $$\frac{C_{x_1}}{N_{r_1}} < \frac{C_{x_2}}{N_{r_2}} < \frac{C_{x_3}}{N_{x_3}} < \ldots\ldots < \frac{C_{x_k}}{N_{r_k}}$$

deci:

$$\frac{C_{x_i}}{N_{r_i}} < \frac{C_{x_i}+1}{N_{r_i}+1}$$

ceea ce înseamnă că realizările de plan sînt continuu crescătoare.

Grafic situația se poate prezenta în felul următor:

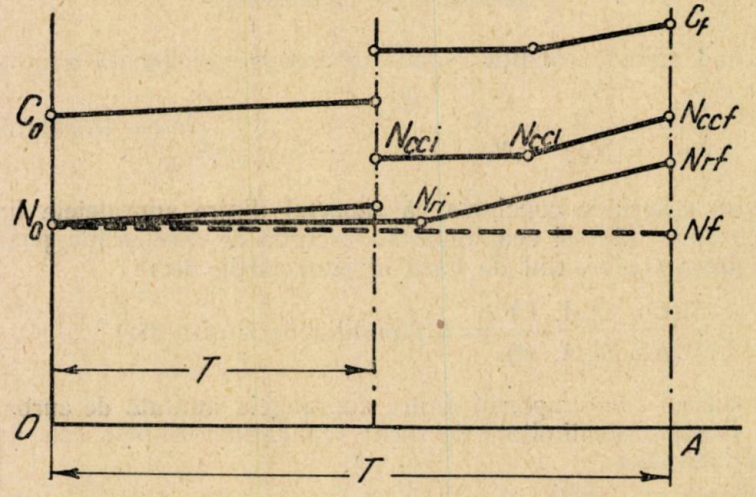


Fig. 3. — Reprezentarea grafică a curbei de comparație cînd se respectă condiția ca $\frac{Cx_i}{Nr_i} < \frac{Cx_i+1}{Nr_i+1}$ iar $Nor = Nopl$

Este evident că în acest caz se poate aprecia ritmicitatea în baza criteriului amintit mai sus fără alte condiții ; Momentul T' (reprezintă intrarea în funcțiune a unei noi capacități).

b) Condiția ca $\frac{C_{x_i}}{N_{r_i}} < \frac{C_{x_i}+1}{N_{r_i}+1}$ se respectă ; dar realizarea inițială a cifrelor de plan diferă față de sarcina planificată inițial.

Grafic situația se va prezenta sub două aspecte, după cum urmează :

1) N realizat $>$ N_0 planificat.

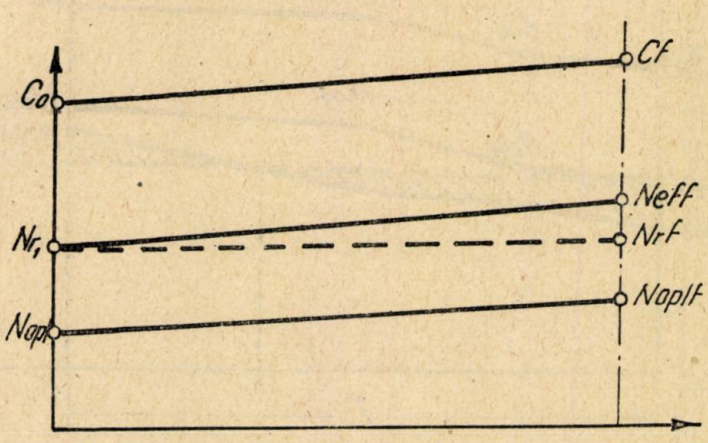


Fig. 4, — Reprezentarea grafică a curbei de comparație cînd se respectă condiția ca $\frac{Cxi}{Nri} < \frac{Cxi+1}{Nri+1}$ iar Nor $>$ Nopl

În acest caz pentru o justă intepretare a ritmicității, curba de comparație va avea drept bază de plecare nu N_{opl} ci N_0 realizat. După aceea se aplică metoda de calcul fără nici o modificare. Trebuie precizat faptul că în acest caz se poate face și observația că întreprinderea a avut un plan prea mic față de posibilitățile ei.

2) N_0 realizat $<$ N_0 planificat.

În acest caz se observă că în momentul X_1 curba realizărilor de plan intersectează curba de plan, respectiv curba de comparație.

Pentru calculul lui ε_2 trebuie să ținem seama că în mod practic ritmicitatea de producție este cu atît mai puțin respectată cu cît curba realizărilor va depăși intervalul cuprins între curba de plan și curba de comparație. Aceasta presupune că suprafețele S_1 și S_2 vor trebui scăzute din suprafața totală limitată de curba realizărilor deci devine :

$$\varepsilon = \frac{S\,(Nor,\, O,\, A,\, B) - (S_1 + S_2)}{S\,(Nopl,\, O,\, A,\, B')}$$

după terminarea în acest fel a lui calculul va decurge fără alte modificări.

c) Condiția ca $\frac{C_{x_i}}{N_{r_i}} < \frac{C_{x_i}+1}{N_{r_i}+1}$ nu se respectă.

În această situație pot exista 5 cazuri concrete și anume:

1) $Npl < Nri < Nci$ Nci (ordonata curbei de comparație) pentru toate cazurile

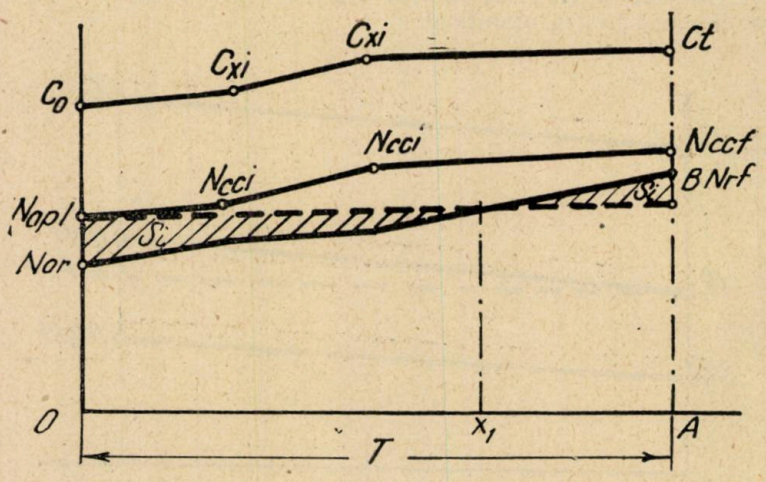


Fig. 5. — Reprezentarea grafică a curbei de comparație cînd se respectă condiția ca $\frac{Cxi}{Nri} < \frac{Cxi+1}{Nri+1}$ iar $Nor < Nopl$

2) $Opli > Nri$ pentru toate cazurile
3) $Npli > Nri$ pentru anumite cazuri
iar $Ncci > Nri$
4) $Nri > Nci$ pentru toate cazurile
5) $Nri > Nci$ pentru anumite cazuri
iar
$Npli > Nci$ pentru alte cazuri

Principiul care stă la baza calculului lui ε în toate cazurile este acela că se vor scădea din suprafața totală a realizărilor toate suprafețele ce depășesc în sens pozitiv sau negativ curba de comparație precum și toate suprafețele ce depășesc în sens negativ curba de plan. De asemeni curba de comparație are ca element inițial mărimea inițială maximă indiferent dacă este vorba de cifră de plan inițială sau realizări inițiale. (vezi graficele).

Calcul fără modificări. Se vor scădea S_1 și S_2.
Se vor scădea S_1, S_2, S_3, S_4,

Concluzii: Luată în ansamblul ei metoda grafică prezentată este destul de precisă. Ea așa cum am arătat plecînd de la noi principii, eli-

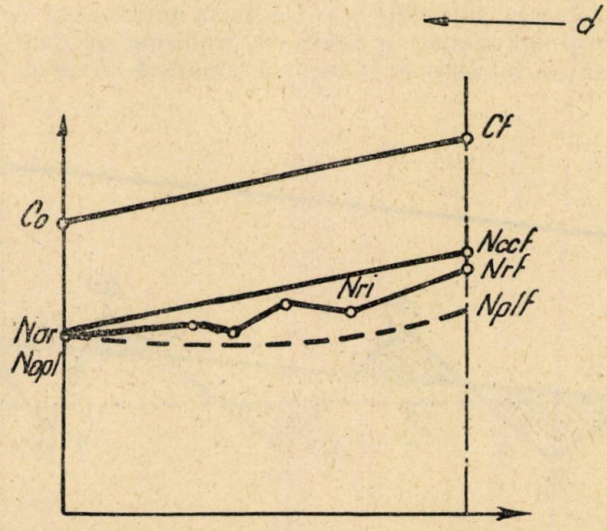


Fig. 6. — Reprezentarea grafică a curbei de comparație cînd nu se respectă condiția ca $\frac{Cxi}{Nri} < \frac{Cxi+1}{Nri+1}$ dar $Npli < Nri < Nci$

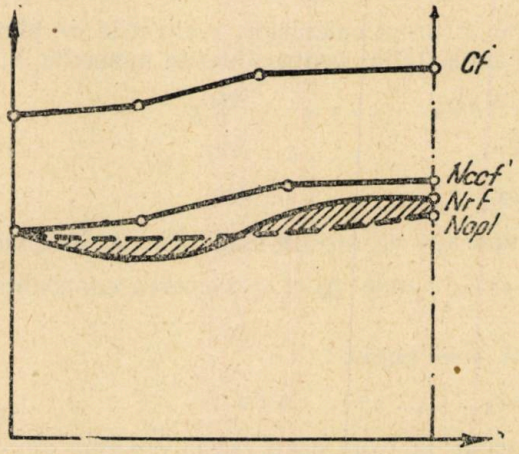


Fig. 7. — Reprezentarea grafică a curbei de comparație cînd nu se respectă condiția ca $\frac{Cxi}{Nri} < \frac{Cxi+1}{Nri+1}$ iar $Nrk < Nplk$ pentru unele intervale și $Nplk < Nrk < Nck$ pentru celelalte intervale

mină marea majoritate a neajunsurilor celorlalte metode existente. Totuși această metodă este destul de laborioasă, (necesită întocmirea graficelor la scară și planimetrarea suprafețelor). De aceia ținînd cont de posibilitatea rezolvării cu mici aproximări a aceleiași probleme pe cale analitică este recomandabil să se folosească și metoda analitică în felul următor:

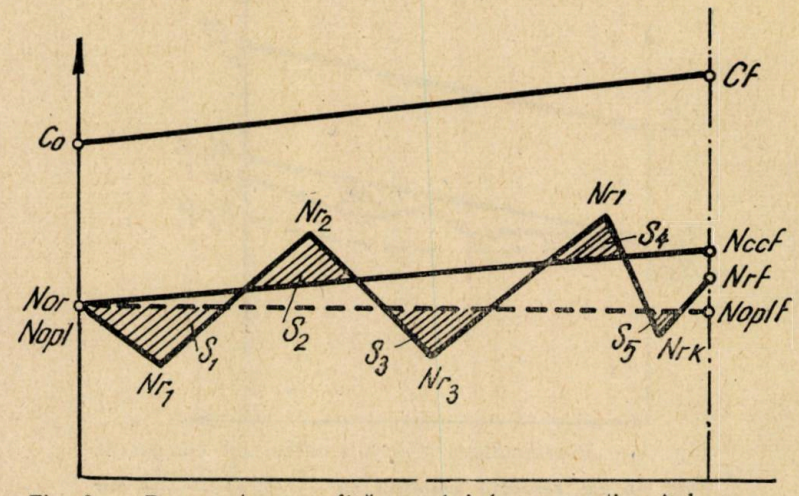


Fig. 8. — Reprezentarea grafică a curbei de comparație cînd nu se respectă condiția $\frac{Cxi}{Nri} < \frac{Cxi+1}{Nri+1}$ iar Nr oscilează înafara cîmpului cuprins între Nplk și Nck

Sînt cunoscute în urma calculelor, realizările de plan, cifrele de plan și se pot calcula capacitățile pentru diferite momente X, vom avea deci:

$N\,plo,\ Nplx,\ Nplx_2 \ldots\ldots\ldots Npl_k$

$Nro,\ Nrx_1.\ Nrx_2 \ldots\ldots\ldots Nr_k$

$Co,\ Grx_1,\ Crx_2 \ldots\ldots\ldots Cr_k$

Curba de comparație va rezulta stabilind mai întîi mărimile:

$\Delta\ C_i = C_{r_{x_i}} - C_0$ unde $\Delta\ c_i$ = creșterea capacității de reg.

În acest mod vom obține:

$\Delta\ c_1,\ \Delta\ c_2,\ \Delta\ c_3 \ldots\ldots\ldots \Delta\ ck$

Adăugînd aceasta la Nopl dacă există condiția ca:

$Nopl = Nor$ sau la Nor dacă se respectă condiția ca:
$Ndpl = Nor$ rezultă mărimile ordonatei curbei de comparație la momentele date, deci:

$No + \Delta 1;\ \ No + \Delta_2;\ \ No + \Delta_3 \ldots\ldots No + \Delta_k$

Suprafața de sub curbă va fi egală cu

$$\Sigma (No + \Delta i)$$

iar suprafața de sub curba realizărilor va fi :

$\Sigma (Nri)$ bineînțeles că în cazul în care N_{r_i} nu respectă condiția

$$Npli < Nri < Ncci$$

atunci se ia pentru mărimea respectivă numai valorile de minime ale lui Nri, iar pentru valorile maxime va fi luate $Ncci$ la momentul X_i

De aici rezultă indicele de neritmicitate, va fi :

$$\frac{\Sigma (Nri)}{\Sigma (No + \Delta i)} = \varepsilon$$

Metoda analitică deși mai puțin precisă este mult mai operativă și se recomandă a fi folosită ca punct de plecare în calculele de ritmicitate.

Folosirea dinamicii capacității pentru justa eșalonare în timp a planului de producție

Așa cum a rezultat din prezentarea anterioară a influenței dinamicii asupra metodelor de calcul a ritmicității fabricației toate problemele se refereau de o perioadă trecută. Deci, calculele puteau fi executate cu preciziune în baza tuturor datelor existente consemnate în scriptele întreprinderii. În cazul în care punem problema ca *eșalonarea în timp* a planului de producție să fie conformă cu creșterea disponibilităților, rezultă, că în fond întregul principiu depinde de stabilirea evoluției capacității. Este evident însă că în stabilirea dinamicii pentru o perioadă viitoare în condițiile în care se pot cunoaște cel mult evoluțiile probabile, reprezintă o aproximare de aceia vom defini această evoluție : *dinamica probabilă* a capacității de producție.

Ținînd cont de faptul că așa cum am arătat capacitatea de regim este o funcție de trei variabile, vom avea în vedere ca în calcule să luăm în considerare pe rînd evoluția unui singur factor considerînd pe ceilalți doi constanți. Astfel, vom presupune că :

$\frac{K_i}{t_n}$ = Const, și variabile este (fondul de regim) apoi $Fr \cdot K_i =$ = constant iar variabilă este t_n

și în sfîrșit vom considera constant $\frac{Fr}{t_n}$ iar k_i va fi variabil în timp. Pe rînd vom trece într-un grafic influența fiecărei variabile asupra capacității, apoi tot pe cale grafică vom ridica curba generală de evoluție a capaci-

tății, deci dinamica probabilă (vezi graficul). În baza planului de producție primit (*N*) din partea Ministerului și a coeficientului de utilizare a capacității de producție Ku se stabilește No cu ajutorul relației Nopl=Ku Co, apoi se trasează curba planificată cu o alură asemănătoare cu cea a dinamicii capacității de producție.

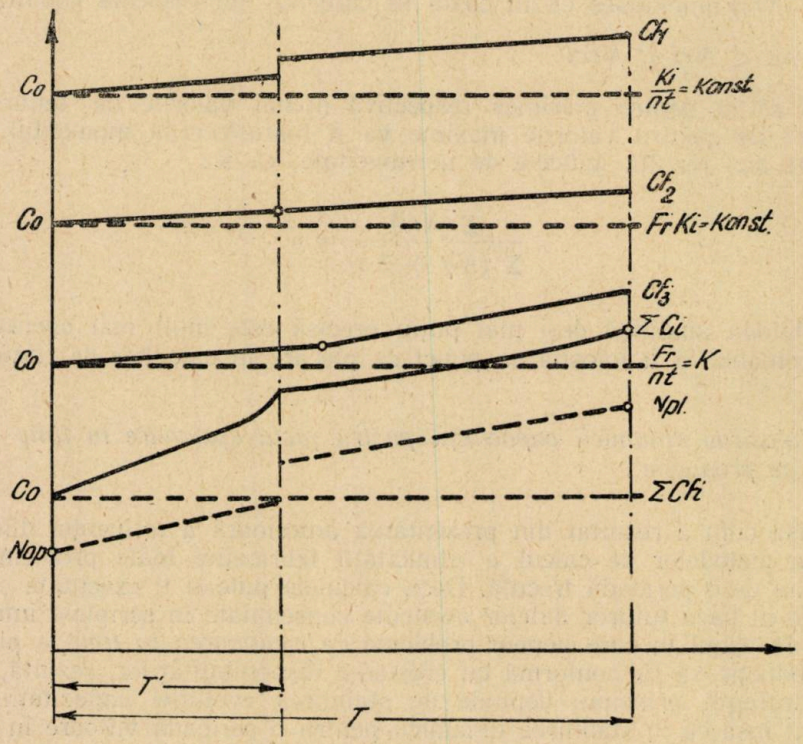


Fig. 9. — Reprezentarea grafică a dinamicii probabile a capacității de producție
T' (reprezintă modificarea C_{teh}) introducerea unei noi capacități)

Principiile metodologice ale determinării capacităților de producție la secțiile de prelucrare mecanică

Potrivit principiilor determinării capacităților de producție, trebuie să facem distincție între :

a) metodologia determinării fondului de timp de lucru al utilajelor, mașinilor unelte, instalațiilor și agregatelor etc.

b) metodologia determinării timpului de muncă necesar pentru elaborarea unui produs.

a) *Metodologia determinării fondului de timp al mașinilor și instalațiilor.*

În calculul fondului de timp se ia în considerare :

1. Întregul utilaj repartizat și amplasat în secțiile și atelierele de producție.

2. Utilajul care nu funcționează temporar și care este scos provizoriu de pe fundație pentru reparații preventive planificate sau modernizare.

3. Utilajul mobil, nefixat pe un anumit loc de muncă.

Nu se ia în considerare utilajul atelierului de reparații al sculăriilor, al atelierelor școală care nu execută produse din planul uzinei, utilajul de rezervă din depozite sau instalat.

La stabilirea capacității de producție a mașinilor și agregatelor, a liniilor tehnologice, a secțiilor și întreprinderii se pornește de la utilizarea cît mai bună a mijloacelor de bază ținîndu-se seama fără excepție de toate posibilitățile de mărire a producției și luîndu-se în considerare toate rezervele. În determinarea capacității de producție nu este permis să se cuprindă nici un fel de pierdere nejustificată în folosirea tehnicii determinată de deficiențe în activitatea utilajului.

Trebuie luat însă în considerație timpul minim necesar pentru reparațiile prevenite planificate, fără de care nu se poate asigura pe viitor funcționarea normală a utilajului.

Fondurile de timp se calculează în modul următor :

a) fondul calendaristic anual ; $Fc = 365 \times 24 = 8760$ ore calendarist.

b) fondul tehnic anual ; $Ft = Fc - Tr$

unde T_r timpul minim pentru reparațiile preventiv planificate ale utilajului.

Timpul minim necesar pentru întreruperi în vederea reparațiilor preventive planificate se extrage din graficul existent la serviciul mecanicului șef și investiții.

În cazul în care acest timp se ia din normative, el trebuie corectat cu coeficientul îndeplinirii normelor.

Timpul pentru reparații se mai calculează și în funcție de procentul $\alpha = (3—6)\%$ care indică întreruperile față de fondul de regim.

$Fr = Z \times h \times ksch$; unde : Fr = fondul de regim
Z = nr. de zile lucrătoare dintr-un
h = nr. de ore lucrătoare dintr-un schimb
$Ksch$ = coeficientul de schimburi.

$Z = 365 - 52 - 6 = 307$ zile lucrătoare

unde : 52 reprezintă numărul de duminici dintr-un an, iar 6 sărbătorile legale

$$Tr = Fr \times \frac{\alpha}{100} = Z \times h \times Ksch \times \frac{\alpha}{100} \text{ mașină-ore.}$$

Timpul de oprire al utilajului pentru reparațiile preventive planificate se ia în considerare prin procentul de timp α din fondul de regim, numai

acolo unde din anumite motive nu sînt timpi normați pentru reparații. Aceste date orientative se folosesc cu rezultate bune în antecalcule preliminare pentru stabilirea sarcinilor de plan în domeniul folosirii utilajului. Valori orientative se dau în tabelul 1.

Tabelul 1

Felul mașinilor unelte	Utilaj nou Nr. de schimb de lucru			Utilaj vechi
	Ksch = 1	Ksch = 2	Ksch = 3	
Mici și mijlocii	3—3,5%	4%	5—5,5%	5—6%
Mari și complexe	5%	6%	6%	

Pentru determinarea normei de folosire a utilajului în perioada concretă de plan se calculează fondul de regim disponibil al mașinilor unelte (Fr.d). Aceasta se obține scăzînd din fondul de regim timpul minim necesar întreprinderilor pentru reparații.

$$Fr.d. = Fr - Tr = Z \times h \times Ksch - z \times h \times Ksch \frac{\alpha}{100} =$$

$$= Z \times h \times ksch \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) \text{ mașină} - \text{ore.}$$

Metodologia determinării necesarului de timp de muncă pentru fabricarea unui produs

La baza determinării capacității tehnice stau normele tehnice verificate de experiența fruntașilor în producție.

Normele tehnice de timp pentru executarea unei operații depind de tehnologia stabilită și de nivelul productivității muncii realizat de muncitorii fruntași în întrecerea socialistă.

La bazele determinării capacității de regim stau normele de timp trecute în fișele tehnologice și coeficientul de îndeplinire a lor.

În stabilirea gradului de îndeplinire a normelor ne servim de doi coeficienți:

1. Coeficientul îndeplinirii normelor orare (al îndeplinirii normei după timpul lucrat).

2. Coeficientul îndeplinirii normei de schimb (al îndeplinirii normei după timpul calendaristic).

Primul coeficient arată gradul în care sînt realizabile normele existente (cînd nu există nici-o deficiență de ordin organizatoric). El arată, de asemeni, eficacitatea muncii în acord (fără timpul întreruperilor, timpul consumat pentru rebuturi) etc.

Al doilea coeficient caracterizează îndeplinirea normei de schimb în funcție de condițiile concrete ale unității producției.

În calculul celor doi coeficienți folosim două mărimi:

a) mărimea timpului normat;

b) mărimea timpului cheltuit efectiv;

Procedeul general de calcul al coeficienților îndeplinirii normelor este dat de relația următoare:

$$Kî.\,n. = \frac{\text{timp normat (om ore necesar)}}{\text{timp efectiv lucrat (om-ore)}}$$

Acest procedeu de calcul ilustrat mai sus, este însă complicat de o serie întreagă de factori suplimentari, strîns legați de determinarea mărimii timpului normat și a timpului efectiv lucrat, prin raportarea cărora se obține coeficientul îndeplinirii normelor.

La coeficientul normei de schimb spre exemplu în mărimea timpului efectiv lucrat se include întreruperile din activitate (în cadrul schimbului) precum și timpul folosit în decursul zilei pentru alte lucrări retribuite după timpul lucrat. Datorită lipsei unei evidențe precise a elementelor necesare pentru calculul coeficienților îndeplinirii normei orare și pe schimb se calculează coeficientul îndeplinirii normei lunare.

În acest caz, în timpul efectiv lucrat se înregistrează și timpul întreruperilor în decursul schimburilor din cauze tehnico-organizatorice, deoarece acest timp se ia după fișele de pontaj ale muncitorilor.

Acest mod de determinare a coeficientului îndeplinirii normelor denaturează realitatea și conduce la rezultate eronate.

Pentru a elimina această eroare datorită greutăților legate de stabilirea timpului efectiv lucrat se procedează la cronometrarea duratei reale a operației.

Întrucît parametri care influiențează durata operației sînt extrem de numeroși, singura posibilitate pentru a ști cîte cronometrări trebuiesc făcute este teoria probabilităților (v. Normarea Tehnică).

Datele de bază necesare în calculul capacităților de producție — unități de măsură.

În calculul capacităților de producție sînt necesare următoarele:

a) planul de producție al uzinei (secție, atelier) pentru perioada respectivă în care este trecut sortimentul și cantitatea producției ce urmează a fi fabricate;

b) fișele tehnologice sau planurile de operații care furnizează datele privind cheltuiala de muncă necesară fiecărui produs;

c) documentele serviciului mecanic șef și investiții care furnizează datele privind utilajul instalat;

d) experiența înaintată a întreprinderilor similare, a indicilor tehnico-economici superiori realizați în ramura respectivă.

Drept unitate de măsură a capacității de producție a unei întreprinderi, se consideră cantitatea de producție care poate fi fabricată în cursul anului pe sortimente și în proporțiile cantitative stabilite prin plan.

În cazul producției omogene capacitatea se măsoară în unități naturale, bucăți : piese fabricate sau ansamble, mașini finite.

În secțiile care fabrică o producție eterogenă capacitățile de producție se exprimă în unități convenționale.

Echivalarea unităților naturale cu cele convenționale se face în majoritatea cazurilor cu ajutorul unor coeficienți, valorile numerice ale acestora calculîndu-se în majoritatea cazurilor în funcție de manopera necesară.

Modul de calcul al capacității de producție

În funcție de specificul fabricației, particularitățile utilajului, de formele de organizare etc., metodele de calcul capătă forme diferite. În primul rînd se ține seama de structura de producție și de tipul de producție. Principiile de bază ce izvorăsc din conținutul, caracterul, destinația și sarcinile capacităților de producție rămîn neschimbate.

În cazul fabricației omogene formula de calcul a capacității poate fi exprimată prin :

$C_t = \frac{F_t}{t_t}$; în care F_t și F_{rd} fondul tehnic și de regim disponibil în mașină-oră

$C_R = \frac{F_{rd}}{t_n} K$ t_t și t_n timnul tehnic și timpul normat pe unitate de produs.

În marea majoritate a cazurilor însă nu întîlnim decît o fabricație eterogenă, cu un mare număr de sortimente.

În acest caz și în special în situațiile cînd sortimentele din plan sînt exprimate în unități de măsură diferite (bucăți, tone, etc.), calculul capacității de producție se desfășoară în două etape :

a) *în prima etapă :*

Se calculează capacitatea de producție în unități convenționale pe baza relației :

$C_t = \frac{F_t}{t_{t \cdot mc}}$; unde $t_{tm \cdot c}$ este timpul tehnic mediu conevuțional necesar pentru fabricarea unei unități convențiobale.

Timpul tehnic mediu convențional se calculează cu relația :

$$t_{tmc} = \sum_{1}^{k} \frac{\gamma_i \times t_{ti}}{100}$$

în care :

t_{ti} — timpii tehnici pentru diversele sortimente la grupa de mașini și operația dată.

γ_i — greutatea specifică a fiecărui sortiment în cadrul planului.

Greutatea specifică sau ponderea fiecărui produs în cadrul planului se calculează cu ajutorul formulei :

$$\gamma_{i_t} = \frac{t_{ti} \times N_i}{\sum_{1}^{k} t_{ti} \times N_i} 100\%$$

unde N — este programa anuală pentru fiecare sortiment.

iar i = poate lua valori de la 1 la K sortimente conform programei anuale.

b) *Etapa a doua*

În cadrul acestei etape se determină capacitatea de producție în unități naturale, pe sortimente de producție conform sarcinilor stabilite.

În acest scop capacitatea de producție în unități convenționale rezultată se repartizează proporțional cu cheltuielile de muncă necesară pentru fabricarea fiecărui produs din programă, ținînd seama de raportul dintre timpul tehnic mediu convențional și timpul tehnic pentru fiecare produs din programă, astfel :

$$C_{t\,(u.n.)} = C_{t\,(u.c.)} \times \frac{\gamma\,\%}{100} \times \frac{t.m.c.}{tn} \text{ (buc.)}$$

$$C_{r\,(u.n.)} = C_{r\,(u.c.)} \times \frac{\gamma\,\%}{100} \times \frac{t.m.c.}{tn} \text{ (buc.)}$$

Rezultatele obținute se verifică prin condiția :

a) $\sum_{1}^{k} Cr_i \times t_{u_i} \geq Fr.d.$

b) $\frac{N_1}{N_2} = \frac{C_{r_1}}{C_{r_2}}$ ș.a.m.d.

În acest mod se calculează capacitatea fiecărei mașini unelte în parte sau a fiecărei grupe de mașini unelte omogene, (interșanjabile). La mașinile unelte sau agregatele care prelucrează repere, piese, etc. care nu se mai prelucrează și la alte mașini unelte în interiorul secției sau întreprinderii, capacitatea de producție se obține însumînd capacitatea mașinilor unelte sau agregatelor omogene.

Aceasta presupune că nu există un proces tehnologic diferențiat cu un ciclu de fabricație lung.

În cazul pieselor cu un lung itinerariu tehnologic cu operații diferențiale, separate, capacitatea liniilor tehnologice cu flux de serie, a secțiilor,

nu se va mai obține prin însumare ci în funcție de capacitatea maximă posibilă comună majorității verigilor respective.

În acest scop capacitatea fiecărui fel de utilaj se analizează, se compară, se pune de acord cu ajutorul măsurilor tehnico-organizatorice, stabilindu-se capacitatea liniilor cu flux de serie, a atelierelor și secțiilor. Compararea capacităților de producție a diferitelor grupe, de utilaje cu ajutorul metodei balanței de capacități, permite descoperirea locurilor înguste. Capacitatea de producție nu este dictată însă de locurile înguste, în acest sens capacitatea de producție se stabilește în funcție de utilajul conducător, a secției principale. Rezumîndu-ne numai la compararea capacităților de producție a diferitelor utilaje nu se poate considera că este soluționată problema complet.

În cadrul procesului de producție se utilizează energie și combustibil în scopuri tehnologice, (energie electrică, apă, aburi, aer comprimat, lichid de răcire etc.). Acestea sînt produsele de surse interne sau externe, (sala mașinilor compresoare, centrale electrice, cazane de forță, instalații, transformatoare) etc.

Pentru ca posibilitățile maxime de producție ale mașinilor unelte, liniilor etc., să se realizeze este necesar ca acest utilaj să fie asigurat pe deplin cu energie și combustibil necesar.

Compararea necesarului de energie pentru funcționarea cu întreaga capacitate a utilajului, cu productivitatea maximă posibilă a instalațiilor secțiilor auxiliare și de deservire, permite să determinăm capacitatea liniilor, secțiilor și a întregii întreprinderi.

În cazul existenței unei neconcordanțe trebuiesc luate urgent măsuri tehnico-organizatorice, pentru eliminarea acestora, pentru coordonarea producției diferitelor verigi de bază, auxiliare și de deservire.

Confruntînd capacitatea fiecărui fel de utilaj cu capacitatea utilajului director, conducător sau capacitatea fiecărei linii și secții, cu capacitatea liniei și secției conducătoare, se stabilește care utilaj, linie, secție, rămîne în urmă în ceea ce privește productivitatea și limitează posibilitatea de producție a altora.

Criteriul de bază care ne ajută în determinarea mașinilor unelte, a liniilor, secțiilor principale, conducătoare, este faptul că acestea hotărăsc volumul producției, determină posibilității maxime ale întreprinderii. Rolul utilajului conducător se apreciază în funcție de importanța lui în producție și în primul rînd de caracterul și condițiile specifice în care se desfășoară producția.

Utilajului, liniilor și secțiilor conducătoare le revin de executat cel mai mare procent din volumul de muncă total.

Reprezentînd grafic succesiunea tehnologică a amplasării și capacitatea utilajului se obține un tablou sugestiv cu privire la raportul dintre utilajul cu cea mai mare și cea mai mică capacitate și cu privire la întregul volum al producției cel poate elabora întregul sistem de mașini al unității productive (vezi anexa IV).

Capacitatea diferitelor feluri de mașini unelte, grupe, linii, secții reprezentate grafic trebuie exprimată în unități comensurabile pentru a se putea face comparația necesară.

VI. *Metodologia de calcul a indicilor de folosire a capacității de producție*

Capacitatea de producție arată posibilitățile unei unități de producție și nu trebuie confundată cu norma tehnică de folosire a utilajului, în perioada de plan.

Stabilirea gradului de folosire a capacității în perioada de plan se face cu ajutorul coeficienților de utilizare.

Aceștia se obțin raportînd capacitatea de regim la capacitatea tehnică care arată limita superioară maximă.

$$Ku = \frac{C_r}{C_t} = \frac{F_{r \cdot d}}{t_{mp}} : \frac{F_t}{t_t} = \frac{F_r}{F_t} \times \frac{t_t}{t_{mp}} \qquad (I)$$

Fondul de regim disponibil stabilit corespunzător regimului de lucru planificat trebuie să asigure realizarea programei de producție.

Acest lucru este posibil numai respectînd condiția:

$F_{r \cdot d} \geqslant F_n$ unde F_n = fondul de timp necesar pentru realizarea planului

Se pot ivi două situații:

a) $F_{r \cdot d} = F_n$ și b) $F_{r \cdot d} > F_n$

Înlocuind în formula capacității de regim „$Fn = N \cdot t_{mp}$" obținem:

a) $C_r = \frac{F_{r \cdot d}}{t_{mp}} = \frac{N \cdot t_{mp}}{tmp} = N$

În condițiile unei juste planificări a regimului de lucru în perioada de plan rezultă:

a) $C_r = N$ și b) $C_r > N$

Înlocuind în formula (*I*) „$F_{r \cdot d}$" cu „F_n" adică cu N_{tmp}, se obține:

a) $K_u = \frac{N \cdot t_{mp}}{F_t} \times \frac{t_t}{t_{mp}}$ și b) $K_u = \frac{F_{r \cdot d}}{F_t} \times \frac{t_t}{t_{mp}}$

Notăm: $Kext = \frac{N \cdot t_{mp}}{F_t}$ și $Kint = \frac{t_t}{t_{mp}}$

$Ku = Kext \times Kint$ unde: $Kext$ = este coeficientul folosirii extentive care caracterizează folosirea în timp (ca durată) față de limita fizică a timpului de lucru al utilajului.

$Kint$ = este coeficientul folosirii intensive care indică gradul folosirii utilajului în cadrul unei singure unități de timp.

Coeficienții de utilizare planificați și realizați în cazul unei producții omogene

$$K_p ext = \frac{\Sigma N_p x tmp}{F_t} \quad ; \quad K_p int = \frac{K^p_{int}}{tmp} = \frac{t_{mp}}{t_t}$$

$$K_r ext = \frac{\Sigma N_r x^t tef}{F_t} \quad ; \quad K_r int = \frac{t_t}{t_{e_f}}$$

Coeficienții de utilizare planificați și realizați în cazul unui sortiment divers

$$K^p_{ext} = \frac{\Sigma N^p_i \times tmp_i}{F_t} \quad ; \quad K_p int = \frac{\Sigma N_{pi} \times t_t}{N_{pi} \times tmpi}$$

$$K^r ext = \frac{\Sigma N^r_i \times tef.i}{F_t} \quad ; \quad K_p int = \frac{\Sigma N_i \times t_{tl}}{\Sigma Ni \times t_{efi}}$$

În cazul în care se pleacă de la raportarea fondului necesar față de fondul de regim se înlocuiește „F_t" cu„ F_{rd}" peste tot în formulele coeficienților extensivi.

În acest caz coeficienții folosirii extensivi vor arăta cît se folosește din fondul de regim disponibil pentru realizarea planului.

Pentru producția omogenă

$$K^p ext = \frac{N_p x tmp}{Fr.d} \quad ; \quad K^r ext = \frac{N^r t_{tef}}{F_{r \cdot d}}$$

Pentru producția cu un sortiment divers

$$K^p ext = \frac{\Sigma N_i \times tmpi}{Fr.d} \quad ; \quad K^r_{ext} = \frac{\Sigma N_i \times t_{ef \cdot i}}{Fr.d}$$

Pentru aprecierea completă a folosirii tehnicii existente nu este suficient numai să calculăm coeficienții extensivi și intensiv, ci trebuie stabilit gradul folosirii puterii mecanice a mașinilor unelte.

Aceasta ne arată cît s-a folosit din puterea instalată a mașinilor unelte pentru realizarea planului și se obține raportînd :

Pentru producția omogenă

$$Kmec = \frac{Pn}{Pi}$$; unde : Pn — puterea normată conform regimului de aschiere pentru prelucrarea unui produs.

Pi — puterea instalata a motoarelor electrice a mașinilor unelte.

Pentru producția cu un sortiment divers

$Kmec = \frac{\Sigma\, Pni \times tmas_i}{\Sigma\, Pi \times tmas._i}$; unde : $tmaş$ — este timpul de mașină de bază.

Folosirea completă a capacității de producție este caracterizată de coeficientul integral ;

$Kinteg = Kext \times Kint \times Kmec.$

CALCULUL CAPACITĂȚII DE PRODUCȚIE ÎNTR-O SECȚIE DE PRELUCRĂRI MECANICE

Secția de prelucrări mecanice din cadrul uzinei „M_2" *) este secția de bază, conducătoare a uzinei în cadrul căruia se execută cea mai mare parte din manopera necesară produselor.

Așa cum s-a arătat în prima parte particularitățile de calcul ale capacității de producție sînt în legătură strînsă cu structura și tipul producției respective.

Structura de producție a secției de prelucrări mecanice din uzina „M_2" este determinată de principiul de organizare tehnologic corespunzător căruia mașinile unelte sînt amplasate pe grupe de mașini. De aceea capacitatea de producție va trebui calculată pe grupe de mașini, care execută prelucrări de același fel.

Prelucrîndu-se un sortiment eterogen în serie mare, calcul capacității de producție va fi în „unități convenționale". În calcule au fost utilizate formulele stabilite anterior. Spre exemplificare se arată calculul detaliat al capacității de producție pentru grupa strunguri paralele. (datele necesare sînt trecute în anexele II și III).

Exemplu numeric :

$C_t^{str.} = \frac{F_{teh}}{t_{teh_{mc}}}$

$Fteh = M \times F_{teh}$; M — Numărul de mașini unelte — 63 bucăți.
F_{teh} — Fondul tehnic anual al unei mașini unelte — 8234 m — ore

$M \times F_{teh} = 63 \times 8234 = 518742$ mașină — ore

$t_{mc} = \frac{\Sigma\, t_{tehi} \times \gamma_i}{100}$; t_{tehi} — consumul de manoperă pentru un set de piese necesare fiecărui produs.

γ_i — greutatea specifică a fiecărui produs în plan.

*) Pentru a concretiza unele aspecte teoretice prezentate în prima parte și pentru a servi ca model pentru rezolvarea unor probleme similare, a fost conceput acest exemplu cu date concrete cît mai aproape de gradul de complexitate întîlnit în uzinele constructoare de mașini.

$$\gamma_A = \frac{N_A \times t_A}{\sum_1^k N_i \, xti} 100\% \; ; \quad N_A$$ — Programa de producție anuală a primului produs din planul secției.

t_A — consumul de muncă pentru un set de piese al produsului respectiv la grupa strungului. (ore/set)

K — Numărul de produse în plan.

$$\gamma_A = \frac{5\,300 \times 33{,}1}{5\,300 \times 33{,}1 + 1\,740 \times 9{,}16 + 100 \times 34{,}63 + 700 \times 4{,}44 + 563 \times 23{,}2} 100 =$$

$$= \frac{5\,300 \times 33{,}1}{211\,001} \times 100 = \frac{175\,430}{211\,001} 100 = 83{,}12\,\%$$

$$\gamma_B = \frac{1\,740 \times 9{,}16}{211\,001} \times 100 = \frac{15\,938}{211\,001} 100 = 7{,}54\%$$

$$\gamma_C = \frac{100 \times 34{,}63}{211\,001} \times 100 = \frac{3\,463}{211\,001} 100 = 1{,}642\,\%$$

$$\gamma_D = \frac{700 \times 4{,}44}{211\,001} \times 100 = \frac{3\,108}{211\,001} 100 = 1{,}508\,\%$$

$$\gamma_E = \frac{563 \times 23{,}2}{211\,001} \times 100 = \frac{13\,162}{211\,001} 100 = 6{,}1\,\%$$

$$t_{mc.} = \frac{33{,}1 \times 83{,}12 + 9{,}16 \times 7{,}54 + 34{,}63 \times 1{,}643 + 4{,}44 \times 1{,}508 + 232 \times 6{,}19}{100} =$$

$$= 30{,}18 \text{ ore/u.c.}$$

$$C_{teh\,u.c.} = \frac{518\,742}{30{,}18} = 17\,300 \text{ u.c.}$$

Capacitatea în unități naturale (seturi) se obține cu relația:

$$C_{teh\,A} = C_{teh\,u.c.} \frac{\gamma_A^{\%}}{100} \times \frac{tmc}{t_A} \qquad (I)$$

Întrucît „γ_i" s-a calculat pentru fiecare grupă de mașini formula (I) se poate scrie mai simplu

Din formula capacității:

$$F_{teh.} = C_{teh.} \times t_{mc.}$$

Dacă înlocuim în formula (I) aceasta devine:

$$C_{teh.I} = \frac{F_{teh.}}{t_A} \cdot \gamma_A = \frac{519743}{33{,}1} \times 0{,}8312 = 13\,025 \text{ buc.}$$

În mod similar se calculează și pentru celelalte:

$$C_{teh}.\,II = \frac{518\,742}{9{,}16}\,0{,}00754 = 4\,268 \text{ buc.}$$

$$C_{teh}.\,III = \frac{518\,742}{34{,}63}\,0{,}01642 = 248 \text{ buc.}$$

$$C_{teh}.\,IV = \frac{518\,742}{4{,}44}\,0{,}01508 = 1\,762 \text{ buc.}$$

$$C_{teh}.\,V = \frac{518\,742}{23{,}3}\,0{,}0619 = 1\,364 \text{ buc.}$$

Verificarea acestui mod de calcul se efectuiază prin condiția:

a) $\Sigma\, C_{teh}.\, i \times t_{teh}.\, i = F_{teh}.$ (al fiecărei grupe de mașini unelte)

înlocuind aceasta obținem:

$$F_{nec} = 13\,025 \times 33{,}1 + 4\,268 \times 9{,}16 + 248 \times 34{,}63 + 1\,762 \times 4{,}44 + \\ + 1\,384 \times 23{,}2 = 518\,743 \text{ ore}$$

deci:

$$F_{nec} = F_{teh}.$$

b) De asemenea capacitățile noi calculate trebuie să respecte proporțiile sortimentelor din plan (deci să aibe aceloși γ).

Trebuie respectat următorul raport:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{C_{teh}.\,I}{C_{teh}.\,II}\;;\quad \frac{5\,300}{1\,740} = 3{,}06\;;\quad \frac{13\,025}{4\,268} = 3{,}06$$

$$\frac{N_2}{N_3} = \frac{C_{teh}.\,II}{C_{teh}.\,III}\;;\quad \frac{1\,740}{100} = 17{,}4\;;\quad \frac{4\,268}{248} = 17{,}4 \text{ ș. a. m. d.}$$

Rezultă că se respectă și această condiție.

În mod analog s-a calculat pentru toate grupele de mașini; capacitatea tehnică $C_{teh}.$; capacitatea de regim C_{r_1} și C_{r_2} (pentru $K_{sch} = 2$ și $K_{sch} = 3$) iar rezultatele sînt centralizate în anexa III.

Capacitatea secției este dată de capacitatea grupului de utilaj conducător (director).

Din analiza structurei parcului de utilaje rezultă următoarea situație:

Din totalul de 121 mașini unelte cea mai mare pondere o au strungurile paralele (52,15%) urmate de freze cu 9,925% ș.a.m.d. (v. tab. 3).

Analizînd și consumul de muncă pentru prelucrarea reperelor la fiecare grupă de mașini unelte rezultă:

La grupa strunguri revine cel mai mare procent 46,4%, urmat de freze 17,08% (v. tab. 4).

Grupa de mașini unelte conducătoare care hotărăște în ultimă instanță soarta producției, este în cazul de față grupa strunguri. Capacitatea de

producție nu poate fi stabilită pe baza locului îngust (Borwerk, Freze, M. Găurit) ci după grupa conducătoare, strunguri). (Vezi anexa III) cu balanța capacităților la grupa conducătoare (strunguri) de unde reies clar

Tabelul 3

Nr. crt.	Tipul mașinii	Nr. de bucată	Greutatea specifică
1	Strungurile	63 bucăți	52,12%
2	Freze	12 „	9,925
3	Mașini găurit	12 „	9,925
4	Revolvere	10 „	8,26
5	Mașini de rectificat	8 „	6,6
6	Mașini pentru tăiat roți dințate	5 „	4,14
7	Shaping	3 „	2,48
8	Morteze; mașini de filetat; Borwerk	6 } câte 2 din	1,55
9	Raboteze și mașini pentru broșat	2 } fiecare	0,027

aceste lucruri). Datele privind capacitățile de producție a grupei conducătoare sînt centralizate în tabelul nr. 5.

Analizînd datele din tabelul nr. 5 se poate constata că mărirea sarcinei de plan la nivelul capacității de regim „C_{r_2}“ (k_{sch} =2) se poate face cu eforturi nu prea mari.

Tabelul 4

Nr. crt.	Grupa de mașini unelte	Volumul de muncă (ore)	Gr. specific. %
1	Strunguri	104,53	46,40
2	Freze	38,41	17,08
3	Mașini de găurit	24,05	10,64
4	Revolvere	29,62	13,13
5	Mașini de rectificat	7,81	3,42
6	M. T. Roți dințate	4,82	2,13
7	Shaping	8,7	1,63
8	Morteze; mașini de filetat; Borwerk	8,08	3,52
9	Raboteze și mașini pentru broșat	4,58	2,05
	Total	225,55	100%

Pentru aceasta va trebui ca la grupele de mașini ce constituie loc îngust să se ia măsuri tehnico-organizatorice (mașinile de găurit, freze, borwek, v. graficul cu balanța capacităților pt. produsul „A“ — anexa IV, pentru sporirea capacității de producție. În mod similar se întocmesc grafice și pentru celelalte produse B, C, D și E. Datele necesare sînt centralizate în anexa III.

Întrucît în practica uzinelor constructoare de mașini calculul capacității pentru fiecare grupă de mașini unelte, secție, necesită calcule numeroase care nu pot fi efectuate numai de un singur economist, sau un anumit serviciu, autorii propun ca mersul lucrărilor ce se întocmesc periodic

Tabelul 5

Sortimente	Elemente de comparație	Plan (buc.)	Capacitatea de producție		
			Tehnică (Ct)	Regim$_2$ ($k_{sch}=3$) (Cr_1)	Regim$_1$ ($k_{sch}=2$) (Cr_2)
A		5.300	13.020	10.980	7.300
B		1.740	4.275	3.600	2.395
C		100	244	206	137
D		700	1.695	1.428	950
E	(Piese de schimb)	563 (to)	1.378 (to)	1.160 (to)	772 (to)

în această direcție, să fie executate în paralel de mai multe servicii, conform schemei prezentate în anexa I.

Calcularea periodică a capacităților de producție a unităților productive precum și a indicilor de folosire a acestora, vor arăta direcția în care trebuie acționat în viitor în vederea sporirii capacității de producție.

BIBLIOGRAFIE :

1. *G. V. Teplov :* „Planificarea în uzinele de construcții de mașini". Ed. Tehnică.
2. *G. Ghilels :* „Capacitățile de producție ale întreprinderilor și folosirea lor".
3. Prof. *C. Atanasiu :* „Organizarea și planificarea producției în uzinele constructoare de mașini". Curs predat la Facultatea de Mecanică a Institutului Politehnic București.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа : О способах расчёта обьёма производдства для цехов механической обработки.

(Краткое содержание)

Работа. О способах расчёта производдства для цехов механической оьработки содержит кроме синтеза проблеми существующих в специальнои библиографии и некоторые иовые выводы связанные с использованием расчётов обьема в равномерном распрелеленин и направлении плановых задании и с оценкой ритмики производдства.

Вэтой работе авторы исходят из принципа различия понятия обьема — обьём технический и обьъм режимоый

Ведение этого разлчия обеспечивает как возможность сравнения различных единиц происводства на основании технического обьёма такивозможность устаиовления некаторых аналитических методов расчёта распредиления производственного плана ритмического выполнения на основе динамики обьёма режимного.

Таким образом работа представляет собой систематизацию этапов расчёта, обьема произвдства на основании конкретиных примеров.

CONTRIBUTION ON THE METHODS FOR COMPUTING THE PRODUCTION CAPACITIES OF MECHANICAL PROCESSING DEPARTMENTS

(Abstract)

The work „Contributions on the Methods for Computing the Production Capacities of Mechanical Processing Departments" includes a synthesis of the problems to be found in specialized literature and some new aspects connected with the utilization of capacity computation in the correct distribution and scheduling of plan targets, as well as in estimating the regularity of manufacture. The authors proceed from the principle of differentioting the notion of capacity — according to the magnitudes it determines — into: TECHNICAL CAPACITY AND WORKING CAPACITY. The introduction of this differentiation ensures the possibility of comparing the various industries from the viewpoint of technical capacity, as well as the possibility of establishing analytical methods for computing the schedules unde the production plan, in order to ensure its rhythmical fulfilment on the basis of the evolution of working capacities. The work also offers a systemization of the stages for computing production capacities, through concrete examples.

CONTRIBUTIONS POUR LES METHODES DE CALCUL DES CAPACITES DE PRODUCTION POUR LA SECTION MECANIQUE

(Résumé)

L'ouvrage „Les contributions pour les méthodes de calcul des capacités des production pour la section mécanique" comprend à part une synthèse des problèmes existents dans la bibliographie de spécialité, certains aspects nouveaux se rattachant à l'utilisation des calculs de capacité dans la juste répartition etléchellonement des taches du plan ainsi que dans l'appréciation de la rythmicité de la fabrication. Dans ce travail les auteurs

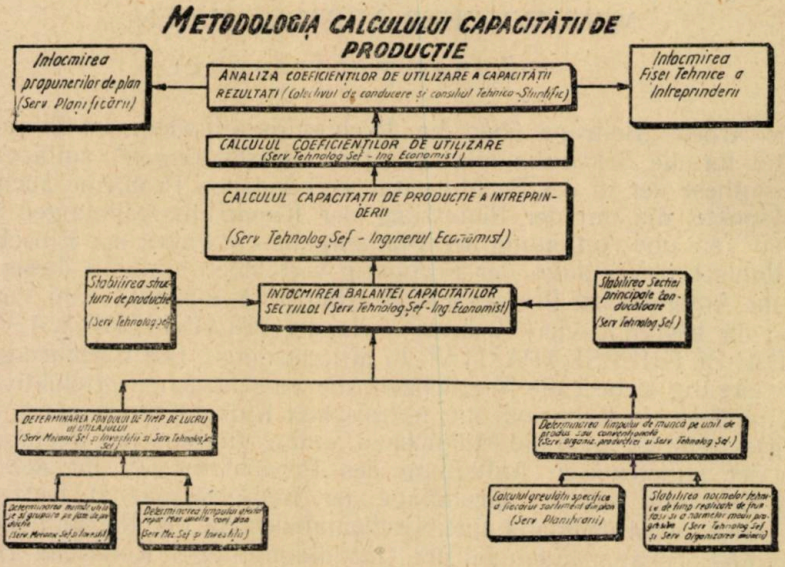
partent du principe de la division de la notion de capacité — selon l'étendue qu'elle détermine — en CAPACITE TECHNIQUE ET CAPACITE DE REGIME. L'introduction de cette différence permet de comparer les différentes unités productrices selon le critérium des capacités techniques, ainsi que d'établir une méthode analytique de calcul de l'échellonement du plan de production en vue de son accomplissement rythmique à partir de la dynamique des capacités de régime. Le travail présente aussi une systématisation des étapes de calcul des capacités de production basée sur des exemples concrets.

BEITRÄGE UBER DIE RECHUNGSMETODEN DER PRODUCTIONSKAPAZITATEN FÜR DIE SECTIONEN MECHANISCHER VERARBEITUGEN

(Zusammenfassung)

Die Arbeit „Beiträge über die, Rechnungsmethoden der Produktionskapazität für die Sektionen mechanischer Verarbeitungen" umfasst neben einer Synthese der in der Fachliteratur vorhandenen Probleme auch einige neue Aspekte, die mit der Benutzung der Kapazitäts-rechnungen bei der richtigen Ver- und Aufteilung der Planaufgaben sowiebei der Einschätzung des rythmischen Verlaufes der Fertigung verbunden sind. In dieser Arbeit gehen die Autoren vom Prinzip aus, den Begriff Kapazität — im Verhältnis der von ihr bestimmenden Grössen — in die TECHNISCHE KAPAZITÄT UND DIE BETRIEBSKAPAZITÄT zu differenzieren. Die Einführung dieser Differenzierung sichert die Möglichkeit, die verschiedenen produktiven Einheiten, in dem als Kriterium die technischen Kapazitäten benutzt werden, zu vergleichen, als auch die Möglichkeit, einige analytisches Rechnungsmethoden der stufenweisen Aufteilung des Produktionsplas für seine rythmische Erfüllung auf der Grundlage der Betriebskapazität festzulengen. In der Arbeit wird ebenfalls eine Systhematisierung der Rechnungsetappen der Produktionskapazitäten auf der Grundlage einiger Konkreter Beispiele dargelegt.

ANEXA I


METODOLOGIA CALCULULUI CAPACITĂȚII DE PRODUCȚIE
Întocmirea propunerilor de plan (Serv. Planificării)
ANALIZA COEFICIENȚILOR DE UTILIZARE A CAPACITĂȚII REZULTATI (Colectivul de conducere și consiliul Tehnico-Științific)
Întocmirea Fișei Tehnice a Întreprinderii
CALCULUL COEFICIENȚILOR DE UTILIZARE (Serv. Tehnolog Șef - Ing. Economist)
CALCULUL CAPACITĂȚII DE PRODUCȚIE A ÎNTREPRINDERII (Serv. Tehnolog Șef - Inginerul Economist)
Stabilirea structurii de producție (Serv. Tehnolog Șef)
ÎNTOCMIREA BALANȚEI CAPACITĂȚILOR SECȚIILOR (Serv. Tehnolog Șef - Ing. Economist)
Stabilirea Secției principale (echivalente) (Serv. Tehnolog Șef)
DETERMINAREA FONDULUI DE TIMP DE LUCRU AL UTILAJULUI (Serv. Mecanic Șef și Energeticianul Șef și Serv. Tehnolog Șef)
Determinarea normelor de timp pe unitatea de produs (Serv. Normare-Salarizare)
Determinarea timpului efectiv lucrat (Serv. Mec. Șef și Tehnolog)
Determinarea timpului de muncă pe unit. de produs (Serv. Organiz. producției și Serv. Tehnolog Șef)
Calculul greutății specifice a fiecărui sortiment de oțel (Serv. Planificării)
Stabilirea normelor tehnice de lung. respectiv de timp folosite în diferitele moduri prelucrate (Serv. Tehnolog Șef și Serv. Organizarea muncii)

ANEXA II

TABEL CENTRALIZATOR CU DATELE PRIVIND PROGRAMUL DE PRODUCȚIE, NORMELE DE TIMP ȘI PARCUL DE UTILAJE

Nr. crt.	Grupe de mașini unelte / Indicatori	Programa anuală (bucăți)	Mașini de găurit		Strunguri	Revolvere	Freze		Borwek	Mașini de filetat	Raboteze	Shaping	Mașini tăiat roți dințate		Morteze	Mașini broșat	Mașini derectificat			
			092	096	102	162	312	332	213	472	412	415	412	446	418	450	502	508	513	516
1	Produsul A	5300	4,39	2,10	33.10	3,40	6,01	0,461	0,5	0,21	0,67	0,80	0,49	0.68	0,22	0.297	0,49	0,17	1,34	0,02
2	„ B	1740	4,28	1,22	9,16	2,96	2,53	0,19	5,74	0,09	1,75	0 23	—	—	0,68	0.59	0 28	0,30	1,15	0,44
3	„ C	100	4,32	0,74	34,63	4,19	3,85	—	—	0,22	—	0,77	0,495	2,02	0,72	0,38	0,69	1,39	0,42	0,45
4	„ D	700	0,50	0,60	4,44	0,97	0,27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,11	0,36	—	—
5	Piese schimb	563 (tone)	1,50	4,40	23,20	18,10	7,00	18,10	—	2	0,54	1,90	0.33	0,80	—	—	—	—	—	—
6	Numărul de mașini unelte		7	5	63	10	9	3	2	2	1	3	1	4	2	1	2	2	3	1
7	Fondul tehnic anual (mașină-oră)		58957	41610	518742	83220	74898	24966	16468	16644	8234	25158	8234	32936	16772	8322	16468	16644	24702	8234
8	Fondul de regim anual (mașină-oră) ($K_s = 3$)		49585	35000	436338	70000	63000	21000	13852	14000	6920	21118	6926	27704	14072	7000	13852	14000	20778	6926
9	Fondul de regim disponibil (mașini-ore) ($K_s = 2$)		33060	23330	290934	46660	41194	13998	9236	9332	4618	14070	4618	18472	9380	4666	9236	9332	13854	4618

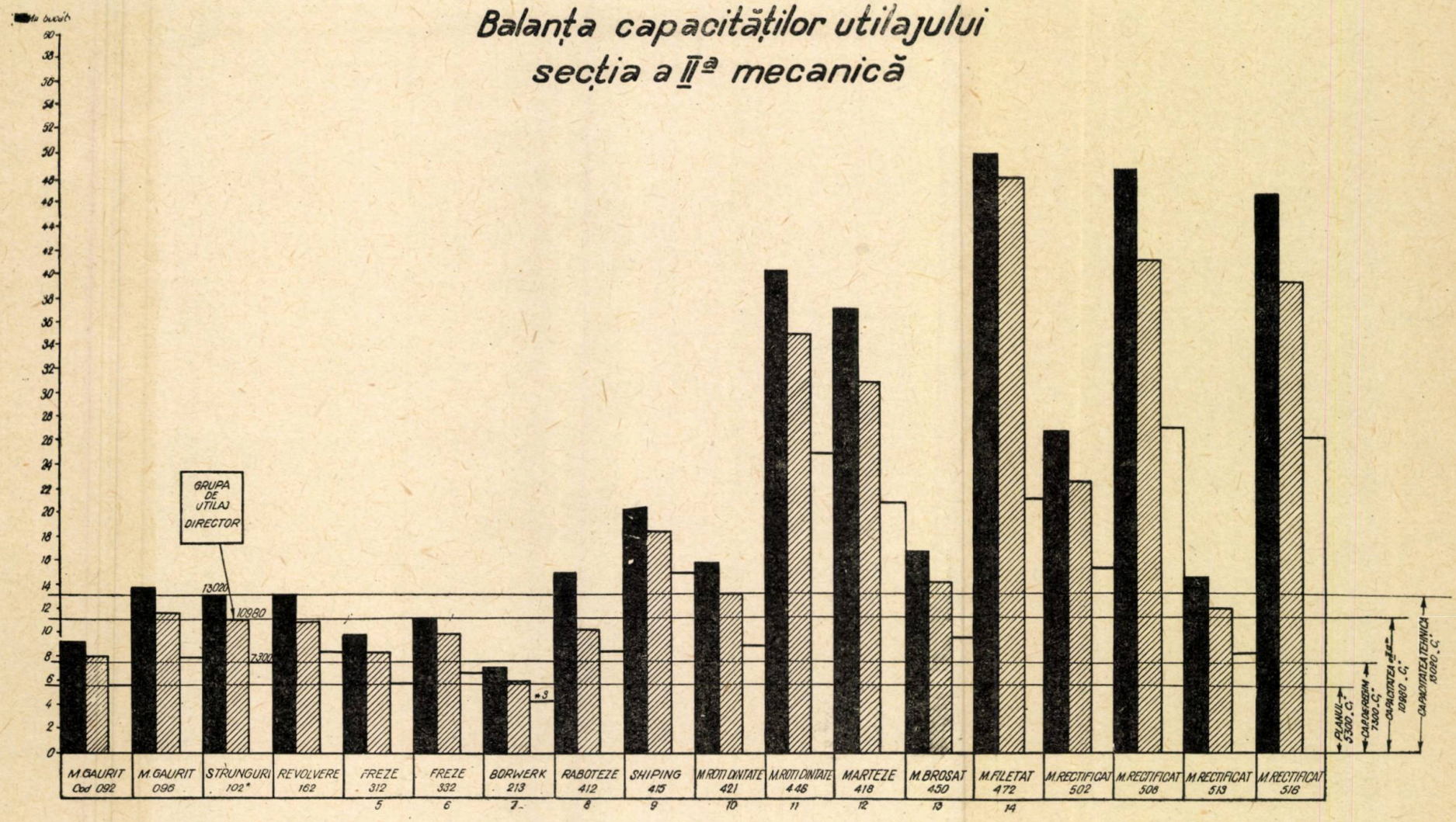
ANEXA III

TABEL CENTRALIZATOR AL CAPACITĂȚILOR DE PRODUCȚIE

Nr. crt.	Grupe de mașini unelte / Indicatori	Denumirea	Mașini de găurit		Strunguri	Revolvere	Freze		Borwek	Mașini de filetat	Raboteze	Shaping	Mașini p. roți dințate		Morteze	Mașini broșat	Mașini de rectificat			
			092	096	102	162	312	332	213	472	412	415	412	446	418	450	502	508	516	513
1	Produsul A	γ %	72	68,66	83,12	52,4	78,25	21,15	21	74	51,5	73	92	88,6	47,9	59,7	80,28	49,55	12,40	77,63
		C_t	9160	13600	13025	12820	9750	11500	6925	58600	12640	22900	15480	42900	37000	16720	26900	49150	46500	14420
		C_{r1}	8140	11520	10908	10801	8215	9700	5810	48400	11050	19350	13000	36100	31000	14100	22770	41400	39400	12050
		C_{r2}	5440	7620	7300	8300	5475	6440	3880	32820	7080	12820	8670	24100	20750	9380	15020	27550	26250	8090
2	Produsul B	γ %	23	13,05	7,54	14,8	10,7	2,75	79	10,3	44,3	6,95	—	—	49	38,9	15,97	28,75	82,9	21,88
		C_t	3160	4470	4268	4175	3160	3600	2270	19500	4160	7660	—	—	12100	5490	9370	16100	15400	4680
		C_{r1}	2670	3760	3600	3500	2660	3038	1910	16400	3640	6440	—	—	10350	4610	7900	13600	12950	3940
		C_{r2}	1775	2500	2395	2375	1755	2020	1272	10920	2330	4285	—	—	6775	3075	5250	9000	8640	2620
3	Produsul C	γ %	1,33	0,45	1,642	1,23	9,3	—	—	15,7	—	1,45	1,7	0,4	2,98	1,4	2,16	7,7	4,7	0,49
		C_t	182	252	248	244	181	—	—	11660	—	476	283	652	700	309	5150	923	870	288
		C_{r1}	153	212	206	206	155	—	—	9820	—	400	238	550	586	260	430	776	730	242
		C_{r2}	102	101	137	137	103	—	—	6585	—	267	158	366	378	173	2880	516	487	161
4	Produsul D	γ %	1,05	2,59	1,508	1,97	0,46	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,39	14	—	—
		C_t	1238	1800	1762	1690	1275	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3580	6500	—	—
		C_{r1}	1040	1510	1428	1420	1075	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3010	5460	—	—
		C_{r2}	704	1008	950	948	715	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2000	3640	—	—
5	Piese de schimb	γ %	2,62	12,25	6,19	29,6	9,66	7,61	—	—	4,2	18,6	6,6	11	—	—	—	—	—	—
		C_t	1060	1440	1384	1362	1030	1048	—	—	1280	2365	1650	4525	—	—	—	—	—	—
		C_{r1}	867	12 5	1160	1145	868	883	—	—	1120	2064	1384	3810	—	—	—	—	—	—
		C_{r2}	576	807	772	764	568	587	—	—	718	1380	925	2540	—	—	—	—	—	—

ANEXA IV

Balanța capacităților utilajului secția a II-a mecanică



BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

UNELE PROBLEME PRIVIND HIDRODINAMICA STRATULUI FLUIDIZAT *)

ION TEOREANU și VIORICA CIMPU

Cunoașterea fenomenului de fluidizare presupune în primul rînd studierea atentă a hidrodinamicii stratului fluidizat. Din punct de vedere practic, cel mai important lucru este să se poată determina cu precizie pierderea de presiune la trecerea agentului de fluidizare prin strat, precum și expandarea stratului, luîndu-se în considerație influența pe care o prezintă asupra fenomenului toți parametrii stratului fluidizat.

În lucrarea de față, ne propunem să explicăm și să verificăm pe baza unor date experimentale suplimentare expresia stabilită în lucarea [1] pentru fracția de goluri a unui strat fluidizat cvasi-omogen — expresie valabilă și pentru stratul fluidizat omogen. De asemeni este luată în discuție problema factorului de formă, introdus pentru caracterizarea straturilor formate din particule a căror formă este diferită de cea sferică.

1. Într-o lucrare precedentă [2] se sublinia faptul că se poate considera un strat fluidizat omogen ca fiind într-o anumită măsură o continuare a stratului fix. Ca urmare, considerînd că mișcarea particulelor nu afectează într-o măsură prea mare căderea de presiune într-un strat fluidizat, s-a scris — prin analogie cu stratul fix că :

$$\Delta P = \lambda_f \frac{L}{r_h} \cdot \frac{u^2}{2 g \varepsilon^2} \cdot \gamma_f \tag{1}$$

în care λ_f — factor de frecare, este o funcție de numărul lui Reynolds Re^*, iar r_h este raza hidraulică definită prin :

$$r_h = \frac{\varepsilon V}{A} \tag{2}$$

Pentru particule sferice :

$$r_h = \frac{1}{6} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} d_p \tag{2'}$$

*) Lucrare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București din 17—18 decembrie 1960.

Dar, întrucît pierderea de presiune într-un strat fluidizat omogen este aproximativ egală cu greutatea stratului, se scrie:

$$\Delta P \approx (\gamma_s - \gamma_f)(1-\varepsilon) L \tag{3}$$

Din (1) și (3) rezultă că

$$\lambda_f \frac{L}{r_h} \cdot \frac{u^2}{2g\varepsilon^2} \gamma_f \approx (\gamma_s - \gamma_f)(1-\varepsilon) L, \tag{4}$$

care după cîteva transformări conduce la:

$$2(1-\varepsilon) Ar^* \cdot Re^{*-2} = \lambda_f = f(Re^*) \tag{4'}$$

unde $A_r^* \equiv \frac{r_h^3 g}{\nu^2} \cdot \frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_f}$ și

$$R_e^* \equiv \frac{r_h u}{\varepsilon \nu}$$

Din (4) rezultă că:

$$\varepsilon = f_0(Ar^*, Re^*) \tag{5}$$

Date experimentale existente în literatură [3] ca și date experimentale proprii, au pus în evidență și influența altor factori — cum ar fi parametrii geometrici ai stratului, în special diametrul acestuia — asupra fracției de goluri. Această influență — mai puțin importantă de altfel — poate fi explicată prin anizotropia de expandare a stratului fluidizat, fapt neluat în considerație în cele de mai sus. Într-adevăr dacă stratul ar prezenta o expandare uniformă în toate direcțiile, atunci presupunerea pe baza căreia stratul fluidizat omogen este considerat ca o continuare a stratului fix, ar corespunde mai bine realității. De fapt însă expandarea stratului are loc într-o măsură mai mare în direcția verticală decît în cea radială. Apare deci, din acest punct de vedere, o anizotropie a stratului fluidizat, care face ca raza hidraulică așa cum a fost ea definită prin relația (2), în care se presupune o expandare uniformă a stratului în toate direcțiile, să nu corespundă realității. Ca urmare, considerăm potrivit ca raza hidraulică să fie definită printr-o expresie de forma [1])

$$r_a = k\, r_h \tag{6}$$

unde k este un factor, care ține seama de anizotropia de expandare a stratului fluidizat.

Rezultă de aci că, expresia fracției de goluri poate fi scrisă corect sub forma:

$$\varepsilon = f(k, Ar^*, Re^*) \tag{7}$$

---

[1]) Un asemenea punct de vedere a fost formulat și de E. Ruckenstein, într-o lucrare lucrare aflată sub tipar.

Apare evident că anizotropia de expandare a stratului depinde de domeniul hidrodinamic de fluidizare — caraterizat prin valoarea numărului lui Reynolds, precum și de natura fluidului și parametrii geometrici ai stratului fluidizat. Pe baza analizei dimensionale se poate scrie pentru factorul k

$$k = F(Re^*, Ga, \Gamma, Z_1, Z_2, Z_3), \tag{8}$$

în care

$$G_a \equiv \frac{l^3 g}{\nu^2}; \quad \Gamma \equiv \frac{\lambda_s \quad \gamma_f}{\gamma_f}; \quad Z_1 \equiv \frac{L_0}{D_c}; \quad Z_2 \equiv \frac{d_p}{D_c}; \quad Z_3 \equiv \frac{L}{D_c}$$

Din (7) și (8) se obține

$$\varepsilon = f_2(Re^*, Ar^*, Ga, \Gamma, Z_1, Z_2, Z_3) \tag{9}$$

Experiența confirmă concluzia concretizată prin relația (9), punînd în evidență în același timp influența neglijabilă, asupra expandării stratului, a rapoartelor geometrice fără dimensiuni Z_1 și Z_3 [1]).

Astfel, în lucrarea [1] se stabilește pentru fracția de goluri în domeniul turbulent de fluidizare, expresia [2])

$$(1 - \varepsilon) Re^{*-1,54} Ar^* = B \tag{10}$$

în care — în cazul fluidizării particulelor sferice [3])

$$B = 0{,}00435\ Ga^{*0,3}\ \Gamma^{0,35} Z_2^{0,3} \tag{11}$$

Pentru verificarea acestei relații, au fost făcute experiențe suplimentare în coloane cu diametrul egal cu 28,0 ; 38,0 ; 39,0 ; 43,0 și 47,50 mm, fluidizînd particule sferice de sticlă și polistiren, cu agenți de fluidizare, apă și aer [4]).

Datele experimentale obținute (tab. 1) se așează destul de bine pe dreapta rezultată prin reprezentarea grafică a expresiei (11), punînd pe ordonata $[(1 \quad \varepsilon)\, Re^{*-1,54} Ar^*]$ și pe abscisă $(Ga^{*0,3}\, \Gamma^{0,12}\, Z^{0,1})$ — fig. 1.

Menționăm că, cercetînd sistematic influența parametrilor geometrici ai stratului fluidizat asupra expandării sale, se constată că influența cea mai importantă o prezintă diametrul coloanei de fluidizare, fapt explicabil dacă ne gîndim că expandarea radială a stratului este în mod esențial determinată de influența pe care o au, asupra sa, pereții coloanei de fluidizare. Un calcul numeric arată că, trecînd de la o coloană de laborator la un reactor pilot, cu diametrul de trei ori mai mare, fracția medie de goluri a stratului fluidizat — păstrînd toate celelalte condiții constante — poate crește de ex. de la 0,60 la 0,69.

---

[1]) În cazul fluidizării cu gaze, se poate vorbi însă de un domeniu optim de valori pentru raportul Z_1.

[2]) Determinările experimentale arată că valoarea numărului lui Reynolds — care caracterizează trecerea de la domeniul laminar la domeniul turbulent, depinde de numărul lui Arhimede, precum și de parametrii geometrici ai stratului.

[3]) Considerînd că stratul expandează uniform în toate direcțiile se obține pentru mărimea B o valoare constantă, care se regăsește ca un caz particular al expresiei (11).

[4]) Pentru fluidizarea cu aer au fost folosite unele date din [4].

Considerăm posibil ca relația (11) să fie valabilă pentru un anumit interval de valori al diametrului coloanei de fluidizare. Desigur că din punct de vedere practic, este important să se determine acea valoare minimă a diametrului coolanei, începînd cu care influența pereților coloanei de fluidizare asupra expandării stratului este neglijabilă. Este plauzibil ca această valoare să depindă de mărimea și natura particulelor fluidizate, precum și de natura și viteza fluidului folosit ca agent de fluidizare.

Stabilirea unei relații care să exprime dependența acestei valori a

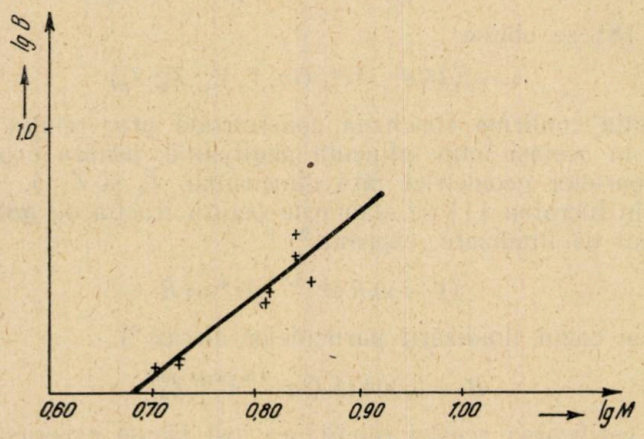


Fig. 1

diametrului coloanei (D_{min}) de parametrii menționați, dă posibilitatea de extrapolare a relației (11) în condiții industriale sau semi-industriale.

2. Fluidizarea unor particule de formă diferită de cea sferică, prezintă o mai mare importanță practică.

Diferența de comportare la fluidizarea unor particule de formă oarecare, față de cele de formă sferică, depinde în mod evident de forma acestora — dacă ceilalți parametri ai fluidizării se mențin neschimbați.

Pentru a generaliza folosirea relațiilor stabilite pentru fluidizarea unor particule sferice, s-a propus introducerea, în cazul straturilor formate din particule de formă oarecare, a unui așa numit „factor de formă".

În literatură, factorul de formă a fost definit și calculat în mod diferit.

Astfel Reboux [5] definește „factorul de formă" prin raportul dintre aria unei particule, din stratul luat în considerație, și aria unei sfere cu volum egal:

$$\varphi = \frac{A_s}{A_p} \tag{12}$$

Alți autori [6, 7, 8] definesc un factor de formă, luînd în considerație comportarea hidrodinamică diferită a particulelor date, față de cea

a particulelor sferice corespunzătoare [1]). Astfel Smirnov și Li De Ep determină „factorul de formă" pe baza datelor obținute pentru căderea de presiune, atît la fluidizarea unor particule sferice cît și a particulelor de formă diferită de cea sferică. Ei stabilesc, pentru cazul general relația:

$$Eu = 8{,}58\,\varphi\, Re^{-2{,}2}\, Ar\, Z_1^{1/3} Z_2^{1/2} Z_4^{1/3} \qquad (13)$$

Smirnov și Li De Ep compară valorile obținute experimental pentru mărimea φ din căderile de presiune în strat, cu valorile obținute pe baza relației (12), obținînd, pentru cazurile particulare studiate, o bună concordanță.

Urmărind expandarea unor straturi formate din particule de formă oarecare, Suciu și Schorr [7] constată influența formei particulelor asupra dinamicii stratului, precum și faptul că ea este neglijabilă în cazul fluidizării cu lichide. Această constatare a condus la concluzia că ceea ce uzual se numește factor de formă depinde în mod esențial de natura fluidului — agent de fluidizare și că el nu poate fi definit pur și simplu ca un factor geometric.

Cercetările experimentale făcute de noi, au confirmat diferența de comportare a particulelor de formă nesferică în raport cu natura fluidului [2]). În același timp s-a pus în evidență faptul că influența formei se manifestă totuși — este drept, mai atenuat — și în cazul fluidizării cu lichide — de ex. în cazul fluidizării cu apă. Se pare că această influență depinde de natura fluidului — agent de fluidizare, mai ales prin viscozitatea acestuia. Din datele experimentale obținute, rezultă de asemeni că ceace se numește în mod curent factor de formă, depinde și de raportul care există între dimensiunile principale ale particulelor, precum și de natura suprafeței particulelor și de raportul existent între suprafața reală și suprafața unei sfere echivalente.

Determinările experimentale au arătat în același timp, că pentru particule date, influența numărului lui Reynolds asupra așa numitului „factor de formă", nu este importantă; este posibil ca domeniul hidrodinamic de fluidizare să influențeze asupra sa, dar această influență — cel puțin pentru fluidizarea cu lichide — este neglijabilă.

Pornind de la ideea că factorul de formă, are un conținut mai bogat, că el trebuie să exprime comportarea hidrodinamică a straturilor constituite din particule de formă oarecare, diferită de cea a straturilor corespunzătoare formate din particule sferice, l-am definit — pentru cazul fluidizării omogene și cvasi-omogene — mai importante din punct de vedere practic — cu ajutorul relației:

$$B_i = \varphi\, B \qquad (14)$$

---

[1]) Un asemenea punct de vedere este mai potrivit scopului pentru care a fost introdus factorul de formă.

[2]) În cazul fluidizării cu gaze ne-am raportat la domeniul cvasiomogen pentru care s-a stabilit, în cazul straturilor formate din particule sferice, aceiași expresie pentru frația de goluri, ca în cazul fluidizării omogene.

în care B— a fost definit prin relația (11), pentru straturi formate din particule sferice; B_i — calculat pe baza datelor experimentale obținute la fluidizarea straturilor constituite din particule de formă oarecare, cu ajutorul expresiei (10); φ — factor de formă

Din relația (14), se vede că ceea ce numim factor de formă este definit ca un coeficient de proporționalitate, care așa cum arată experiența — depinde de o serie întreagă de parametrii; el nu poate fi considerat numai ca un factor geometric, legat exclusiv de forma particulelor.

Valorile obținute pentru mărimea φ sînt date în tabela 2. Ele arată că acele straturi, care sînt constituite din particule de formă regulată, cu dimensiuni mai apropiate între ele, cu suprafața mai netedă, sînt caracterizate printr-un factor de formă apropiat de unitate.

★

a. Din cele menționate, apare posibilitatea ca pentru fluidizarea omogenă și cvasi-omogenă, în domeniul turbulent de fluidizare, să se determine fracția de goluri a stratului, în funcție de parametrii geometrici și hidrodinamici ai acestuia, folosind o relație de forma:

$$(1-\varepsilon)\, A_r^* R_e^{*-1,54} = 0{,}00435\, \varphi\, G_a^{*0,3}\, \Gamma^{0,36}\, Z_2^{0,3} \qquad (15)$$

În lucrarea de față se aduc dovezi experimentale în sprijinul acestei concluzii.

b. De asemeni se fac precizări cu privire la semnificația fizică, pe care o are așa numitul „factor de formă", indicîndu-se totodată o metodă de determinare a acestuia.

NOTAȚIE

ΔP — pierdere de presiune
λ_f — factor de frecare
L — înălțimea stratului fluidizat
r_h — rază hidraulică definită prin expresia (2)
u — viteza fictivă a fluidului
g — accelerația gravitației
γ_f — greutatea specifică a fluidului
$Re^* \equiv \frac{r_h u}{\varepsilon \nu}$ — numărul lui Reynolds calculat cu raza hidraulică
ν — viscozitatea cinematică
ε — fracția de goluri
V — volumul stratului
A — suprafața particulelor solide
d_p — diametrul particulelor solide
γ_s — greutatea specifică a solidului
$Ar^* \equiv \frac{d_h^3 g}{\nu^2} \cdot \Gamma$ — numărul lui Arhimede calculat cu raza hidraulică
$\Gamma \equiv \frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_f}$ — număr fără dimensiuni

k — factor care ține seama de anizotropia de expandare a stratului fluidizat

r_a — rază hidraulică reală

$Ga \equiv \frac{l^3 g}{\nu^2}$ — numărul lui Galileu

l — lungime

$Z_1 \equiv \frac{L_0}{D_c}$ — număr fără dimensiuni

D_c — diametrul coloanei

$Z_2 \equiv \frac{d_p}{D_c}$ — număr fără dimensiuni

$Z_3 \equiv \frac{L}{D_c}$ — număr fără dimensiuni

$Ga^* \equiv \frac{D_c^3 g}{\nu_0}$ — numărul lui Galileu calculat cu diametrul coloanei

φ — „factor de formă"

A_s — suprafața unei particule de formă sferică

A_p — suprafața unei particule de formă oarecare

$Eu \equiv \frac{\Delta P g}{\gamma_f u^2}$ — numărul lui Euler

$Z \equiv \frac{L}{D_c} 10_4$ — număr fără dimensiuni

L_0 — înălțimea minimă a stratului fluidizat

$Re \equiv \frac{d_p u}{\nu}$ — numărul lui Reynolds

$Ar \equiv \frac{d_0^3 g}{\nu^2} \cdot \Gamma$ — numărul lui Arhimede.

BIBLIOGRAFIE

[1] *E. Ruckenstein și I. Teoreanu* — Bul. Inst. Politehnic, Buc., nr. 4 (1959).
[2] *E. Ruckenstein și I. Teoreanu* — Rev. Chimie *XI*, nr. 3 (1960).
[3] *Wilhelm R. H. și Kwauk M.* — Chem. Eng. Progress *44*, p. 201, (1948).
[4] *I. Teoreanu* — Lucrare de dizertație în curs de pregătire. Institutul Politehnic București.
[5] *P. Reboux* — Phenomenes de fluidisation — Paris, 1954.
[6] *Smirnov N. I. și Li De Ep* — Junal Prikl. Himii, vol. *24*, 1 și 4, (1951).
[7] *Suciu Gh.* și *Schorr V.* — *IX*, Rev. Chimie, 9, 482, (1958).
[8] *O. Todes* și *A Bondareva* — Him. Nauka i prom. *2*, nr. 2,223, (1957).

Tabelul 1

Seria	Material	Agentul de fluidizare	B	M	D_c	Γ	Z	Ga*	Observ.
1	Bile de sticlă Ø = 0,392 mm	aer	2,58	7,04	4,3	2105	$0,911 \cdot 10^{-2}$	$5,60\ 10^{8}$	●
2	Bile de sticlă Ø = 0,392 mm	aer	2,27	6,44	2,8	2105	$1,395 \cdot 10^{-2}$	$1,112 \cdot 10^{9}$	●
3	Polistiren Ø = 1,35 mm	aer	4,07	6,91	8,9	887	$3,47 \cdot 10^{-2}$	$1,112 \cdot 10^{9}$	×
4	Bile de sticlă Ø = 0,417 mm	aer	3,24	6,91	3,9	2105	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$9,55\ 10^{5}$	○
5	Bile de sticlă Ø = 0,417 mm	aer	2,45	6,54	2,8	2105	$1,485 \cdot 10^{-2}$	$2,59 \cdot 10^{6}$	○
6	Bile de sticlă Ø = 0,45 mm	apă	1,285	5,32	4,75	1,540	$0,497 \cdot 10^{-2}$	$2,59\ 10^{6}$	+
7	Bile de sticlă Ø = 0,45 mm	apă	1,25	5,32	4,75	1,540	$0,497\ 10^{-2}$	$9,55\ 10^{5}$	+
8	Bile de sticlă Ø = 0,392 mm	apă	1,170	5,13	3,80	1,540	$1,03\ 10^{-2}$	$3,44\ 10^{6}$	△

Observații : $M = Ga^{*\,0,1} \cdot \Gamma^{0,12} \cdot Z_2^{0,1}$.

Tabelul 2

Nr. cr.	Materialul fluidizat	Agent fluidizare	$d_p\ 10^3$ [m]	D 10^2 [m]	Γ	Z_2	Ga*	M	Bi	B	φ
1	Sticlă pisată	apă	0,45	3,8	1,54	$1,185 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{8}$	5,03	2,75	1,15	2,39
2	Sticlă pisată	apă	0,55	3 8	4,54	$1,45\ 10^{-2}$	$5,6\ 10^{8}$	5,20	2,75	1,27	2,16
3	Sticlă pisată	apă	0,865	3,8	1,54	$2,27\ 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{8}$	5,45	3,10	1,472	2,10
4	Sticlă pisată	apă	0,35	3,8	1,54	$0,923 \cdot 10^{-2}$	$5,6\ 10^{8}$	4,97	2,47	1,09	2,26
5	Sticlă pisată	apă	0,45	4,75	1,54	$0,847 \cdot 10^{-2}$	$1,112\ 10^{9}$	5,23	3,90	1,29	3,02
6	Sticlă pisată	apă	0,55	4,75	1,54	$1,16\ 10^{-2}$	$1,112 \cdot 10^{9}$	5,35	3,85	1,38	2,79
7	Sticlă pisată	apă	0,865	4,75	1,54	$1,82\ 10^{-2}$	$1,112 \cdot 10^{9}$	5,60	3,90	1,60	2,43
8	Cilindrii de alumîniu	apă	1,0/1,50	3,8	1,40	$3,45\ 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{8}$	5,74	1,48	1,72	0,862
9	Prisme de aluminiu	apă	0,75/1,0/2,02	3,8	1,70	$3,72 \cdot 10^{-2}$	$5,6\ 10^{8}$	5,77	2,37	1,74	1,36

Observații . $M = Ga^{*\,0,1} \cdot \Gamma^{0,12} \cdot Z_2^{0,1}$.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ КИПЯЩЕГО СЛОЯ

(Краткое содержание)

В настоящий работе устанавливается, на основании экспериментальных данных влияние высоты и диаметра кипящего слоя на его расширение.

Попутне с этим обсуждается вопрос о физическом значении о „фактора формы“ и указывается метод его экспериментальъного определения.

SOME PROBLEMS REGARDING THE HYDRODYNAMICS OF THE FLUIDIZED BED

(Summary)

In the present paper, are stated, on experimental data, the influence of certain factors upon the expansilon of a fluidized bed. Such factors are the height and diameter of the fluidized bed.

The paper contains also an account on the physical meaning of „the formal factor“, proposing a method of determing it by experiment.

QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT L'HYDRODYNAMIQUES DE LA COUCHE FLUIDIFIÉE

(résumé)

Fondé sur les données de l'expérience, cet ouvrage établit l'influence que les facteurs, tels que la hauter et le diamètre exercent sur l'expansion d'une couche fluidifiée.

On y porte aussi une discussion sur la signification physique du „facteur de forme“ et l'on propose une méthode pour le déterminer par voie expérimentale.

EINIGE PROBLEME ÜBER DIE HYDRODYNAMIK DER WIRBEL SCHICHT

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird auf Grund der erfahrungsmässigen Daten der Einfluss auf die Ausdehnung einer wirbel Schicht von Faktoren wie die Höhe und der Durchmeser der wirbel Schicht festgestellt.

Ebenfals wird die physische Bedeutung des „Formfaktors“ besprochen; es wird eine Methode zur Bestimmung desselben auf erfahrungsmässigen Wege vorgeschlagen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

CHIMIE

DEGRADAREA HOFMANN A COMPUȘILOR CUATERNARI DE AMONIU CU COMBINAȚII ORGANO-METALICE *)

FARCAȘIU DAN

I. *Introducere.*

Degradarea Hofmann a bazelor cuaternare de amoniu constă în descompunerea termică a acestor compuși (la circa 100°) — descoperită de A. W. Hofmann în 1851 :

$$R{-}CH_2{-}CH_2N^+(CH_3)_3\ OH^- \longrightarrow R{-}CH{=}CH_2 + N(CH_3)_3 + H_2O$$

În forma ei clasică, reacția s-a utilizat mult în Chimia Organică preparativă. Se pot menționa multe exemple interesante de folosirea ei pentru obținerea de olefine ([1], [2], [3], [4], [5]).

Mecanismul degradării Hofmann a fost stabilit de C. K. Ingold [6] care a arătat că reacția nu constă într-o descompunere termică propriu zisă ci este o eliminare bimoleculară de tip E2, care se produce sub influența unei baze :

$$HO^- + H{-}CR_2CR_2{-}N^+(CH_3)_3 \longrightarrow HOH + R_2C{=}CR_2 + N(CH_3)_3\ .$$

Cinetica reacției este de ordinul II. Importantă pentru lucrarea de față este constatarea lui Ingold că acceptorul de protoni (baza) are influență asupra mersului reacției. Într-adevăr, în afară de degradarea obișnuită :

$$C_3H_7{-}N^+(CH_3)_3\ .\ X^- \longrightarrow C_3H_6 + N(CH_3)_3 + HX, \qquad (a)$$

poate avea loc și o descompunere de forma :

$$C_2H_7{-}N^+(CH_3)_3\ .\ X^- \longrightarrow C_3H_7N(CH_3)_2 + CH_3X\ . \qquad (b)$$

Reacția (a) scade ca proporție, iar (b) crește, în sensul :

$$X = HO^-\ ;\ C_6H_5O^-\ ;\ m{-}O_2NC_6G_4O^-$$

---

*) Lucrare executată în cadrul cercului științific studențesc al Catedrei de Chimie Organică a Inst. Politehnic din București sub conducerea Acad. Prof. Costin D. Nenițescu. Îndrumător : Șef de lucrări Margareta Avram. Lucrarea a fost prezentată în sesiunea cercurilor științifice studențești din 12 aprilie 1958.

II. *Încercări preliminare pentru realizarea degradării Hofmann la temperatură joasă.*

Pe baza mecanismului propus de Ingold, rezultă că, folosind un acceptor de protoni mai reactiv — o bază mai puternică — să se poată coborî temperatura la care are loc degradarea Hofmann.

Încercări de degradare Hofmann la temperatură mai joasă au fost făcute de C. R. Hauser şi S. W. Kantor [7] [8] care au utilizat ca agent de degradare sodiu în amoniac lichid şi de G. Wittig [8] care a utilizat fenil- şi butillitiu.

Deoarece în literatură nu exista un studiu comparativ al degradării Hofmann în funcţie de tăria bazei utilizate ca agent de degradare ne-am propus să efectuăm acest studiu utilizînd ca baze combinaţii organo-metalice.

În încercările preliminare am folosit ca acceptor de protoni bazele :

$$HO^- \quad ; \quad (CH_3)_3\,C{-}O^- \quad ; \quad (C_6H_5)_3\,C:^- \quad ;$$

Utilizînd iodura de trimetil - ciclopentil - amoniu am izolat ciclopentenă. Randamentul s-a stabilit prin dozarea olefinei cu brom.

Rezultatele obţinute au avut doar o valoare calitativă, deoarece modul de conducere a degradării (în soluţie, la fierberea solventului) a dus la pierderi mari de ciclopentenă datorită volatilităţii acesteia. Deşi randamentele obţinute astfel nu au fost cele reale încercările au confirmat posibilitatea conducerii degradării Hofmann la temperatură joasă.

Pentru comparaţie am efectuat mai întîi degradarea în forma ei clasică (la 100°). La analiza olefinei în modul arătat randamentele în ciclopentenă au fost găsite între 8% şi 10%.

În cea de a doua etapă am lucrat la o temperatură mai mică (70°), folosind terţiar-butoxidul de potasiu (în xilen), bază mai puternică decît ionul OH. Am obţinut 5% olefină. Acest agent de degradare a mai fost utilizat [9], la degradarea Hofmann clasică (la 100°).

Am coborît temperatura degradării şi mai mult, utilizînd ca agent de degradare trifenil-metil-sodiu [10]. În acest caz reacţia a fost condusă la 35°, în eter. Randamentul în olefină a fost 7—8%.

Din experienţele acestea a reieşit clar că, folosind ca acceptor de protoni o bază destul de puternică, degradarea se poate produce la o temperatură sub 100°, condiţie importantă şi necesară în cazurile cînd se lucrează cu substanţe instabile, foarte reactive. Evident, temperatura influenţează viteza de reacţie astfel că, degradarea la temperatură joasă trebuie condusă un timp mai îndelungat decît degradarea „termică", în forma ei clasică.

III. *Compararea agenţilor de degradare pe baza tăriei lor bazice. Influenţa altor factori asupra mersului degradării.*

În urma rezultatelor obţinute în lucrările preliminare (partea II) am urmărit aici stabilirea influenţei pe care o are tendinţa — mai mare sau mai mică — de a accepta protoni a diferitelor baze, asupra randamentului degradării Hofmann.

În acest scop am lucrat cu diferite baze, în condiții identice: la temperatura ambiantă (25°), agitînd sarea cuaternară cu agentul de degradare în eter, în vas închis un timp determinat (de obicei 24 de ore).

Prelucrarea produsului de reacție a fost diferită față de încercările descrise în partea II-a și anume [8], s-a distilat eterul împreună cu trimetil-amina formată, într-o soluție eterică, concentrată, de acid picric. S-a format picratul trimetil-aminei, insolubil. Randamentul degradării s-a calculat pe baza cantității de trimetil-amină (determinată prin cîntărirea picratului).

Pentru comparație am efectuat și o degradare termică folosind terțiar-butoxidul de potasiu. Am lucrat cu iodura de trimetil-ciclopentil-amoniu. Randamentul în trimetil-amină a fost de 61% (de șase ori mai mare decît cel găsit în partea II-a).

Tăria bazică a agenților de degradare utilizați s-a apreciat din constantele de disociere acidă, *Ka* (respectiv din pKa = — lg Ka), ale combinațiilor de bază (pseudo-acizi) [11].

S-au încercat combinații cu metalele alcaline ale următorilor compuși:

	pKa	
$(CH_3)_3C—OH$	19	(I)
C_5H_6 (ciclopentadienă)	$18 < pKa < 19$	(II)
$(C_6H_5)_3CH$	33	(III)
C_6H_6	39	(IV)

Constanta de disociere acidă a ciclopentadienei nu am găsit-o în literatură. Se notează însă [13], că aceasta este un acid mai puternic decît alcoolii terțiari (de exemplu terțiar-butanol) și mai slab decît alcoolii secundari pentru care se dă [11] [10], constanta de disociere $Ka = 10^{-18}$, deci pKa = 18 (la alcoolul isopropilic).

Baza corespunzătoare benzenului (anionul $C_6H_5:^-$) am luat-o ca termen de comparație pentru celelalte baze. În literatură [8], [12], [18], este descrisă degradarea cu fenil-litiu (G. Wittig). Celelalte baze nu au mai fost încercate ca agenți de degradare Hofmann, pînă acum.

Încercările au fost efectuate asupra sărurilor cuaternare derivînd de la dimetil-ciclopentil-amină și de la dimetil-ciclohexil-amină. În literatură este descrisă degradarea Hofmann a sărurilor cuaternare de trimetil-ciclohexil-amoniu și dimetil-brommetil-ciclohexil-amoniu (G. Wittig), utilizînd fenil-litiu sau butil-litiu.

Am studiat atît bromurile cît și iodurile cuaternare, pentru a vedea influența anionului sării cuaternare asupra mersului degradării.

Rezultatele experiențelor pot fi rezumate în următoarele puncte:

1. *Agentul de degradare* (anionul acceptor de protoni):

a) Anionul ciclopentadienil și anionul terțiar-butoxil sînt baze prea slabe pentru a da degradarea Hofmann la temperatura ordinară.

b) Anionul trifenil-metil dă degradarea Hofmann la temperatura ordinară cu un randament relativ mic. În ambele experiențe făcute s-a obținut un randament în trimetil-amină de circa 30%.

c) Anionul fenil dă degradarea Hofmann cu un randament bun. Prin tratarea bromurii de trimetil-ciclohexil-amoniu cu fenil-litiu am obținut după

24 de ore de agitare peste 70% trimetil-amină. Rezultatele sînt comparabile cu cele obținute de G. Wittig [12].

2. *Cationul agentului de degradare* are și el o influență asupra mersului reacției, întrucît reactivitatea combinațiilor organo-metalice este determinată nu numai de anion ci și de cation [11], [14]. Într-adevăr, influenței cationului i se poate atribui faptul că, pe cînd fenil-litiul necesită un timp îndelungat de reacție pentru a reacționa complet [12], la trifenil-metil-*sodiu* acest timp necesar este mult mai scurt. Aci reacția a fost completă după 12 ore (randamentul este același ca și după 24 de ore).

Faptul că fenil-litiul reacționează mai lent se explică prin tendința ionilor de litiu de a forma complecși stabili de tipul:

$$[C_6H_5 \rightarrow Li^- \leftarrow C_6H_5]\ Li^+, \qquad (VI)$$

în care acceptorul de protoni este blocat printr-o covalență.

Tot tendinței ionilor de litiu de a forma complecși i se datorește și nereușita degradării Hofmann în cazul iodurii de trimetil-ciclopentil-amoniu, tratată cu fenil-litiu (după 72 de ore de agitare nu s-a format deloc trimetil-amină). Rezultatul acesta concordă cu rezultatele lui G. Wittig [8], [15]. Acesta explică dezactivarea fenil-litiului de către ionii de iod prin formarea unor complecși de tipul:

$$[(CH_3)_3\ N^+—CH_2—Li^-—I]. \qquad (V)\ (VI)$$

3. *Anionul sării cuaternare,* după cum este de așteptat nu influențează mersul degradării, decît în cazul menționat în care leagă compusul organo-metalic sub formă complexă (cazul iodurilor și fenil-litiului). Astfel atît *bromura* cît și *iodura* de trimetil-ciclohexil-amoniu au dat cu trifenil-metil-sodiu același randament în trimetil-amină (28% respectiv 29,5%).

IV. *Degradarea Hofmann prin intermediul N-ylidelor.*

Studiind recent degradarea Hofmann, G. Wittig a emis ipoteza [8] unui mecanism diferit de cel formulat de către Ingold [6]. G. Wittig constată că se poate elimina un proton și; din poziția α față de atomul de azot, de la o grupă metil, formîndu-se o N-ylidă:

$$[(CH_3)_3\ N^+—CH_3]\ Br^- + C_6H_5Li \longrightarrow (CH_3)_3N^+—(CH_3)_3—N^+—CH_2^-: + C_6H_6 + Li\ Br. \qquad (VII)$$

sau [15] mai curînd:

$$[(CH_3)_3\ N^+—CH_2—Li]\ Br^- \qquad (VII\ I$$

Tendința de eliminare a unui proton din poziția α, de la o grupă CH_3, se explică prin efectul inductiv — atrăgător de electroni — al atomului de azot încărcat pozitiv [16]. Ylida astfel formată poate capta un proton de la atomul de carbon din poziția β. Se poate reprezenta, intermediar, *o punte protonică* între C_α (al grupei metylidă) și C_β [12]. Concomitent cu migrarea protonului are loc eliminarea trimetil-aminei (deci eliminare intramoleculară) cu formarea olefinei. G. Wittig admite deci că degradarea (cu fenil-litiu) are loc printr-un proces de eliminare α-β:

$$\begin{array}{l} [(CH_3)_2N^+ - CH_2\,CH_2R]\,Br^- \longrightarrow (CH_3)_2N^+ - CH_2 - CHR \longrightarrow (CH_3)_3N + H_2C{=}CHR \\ \quad\;\; | \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad | \qquad\quad | \\ \quad\;\; CH_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad CH_2^- : \longleftarrow H \end{array}$$

În favoarea acestui mecanism stau și cercetările făcute în seria ciclooctanului [17], [18], unde prin degradarea Hofmann cu fenil litiu, se formează cis-ciclooctenă.

Mai mult chiar, aceste lucrări au dovedit că și degradarea în formă clasică, termică, se produce, măcar în parte, prin eliminare „α-β".

Deoarece formarea ylidei decurge mult mai ușor în cazul bromurii de dimetil - brommetil - ciclohexil - amoniu (G. Wittig [8]) ne-am pus problema dacă în cazul acestei sări cuaternare, nu s-ar putea realiza degradarea Hofmann, în condițiile ce favorizează eliminarea α-β și cu baze mai slabe. Am ales ca agent de degradare ciclopentadienil-potasiul (II) ($pKa = 18—19$).

Tratarea sării cuaternare cu agentul bazic (timp de reacție — 24 de ore) nu a dus la formarea de $N(CH_3)_3$. Deci anionul ciclopentadienil este și în acest caz o bază prea slabă.

V. *Concluzii.*

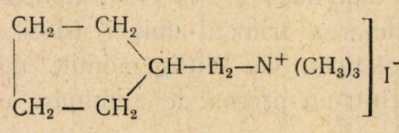
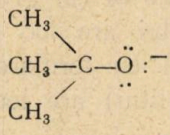
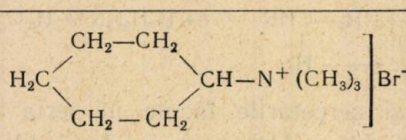
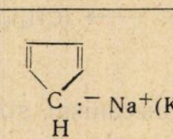
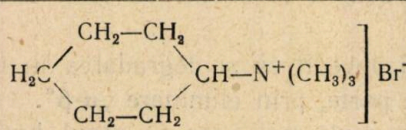
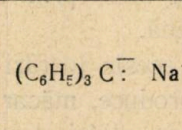
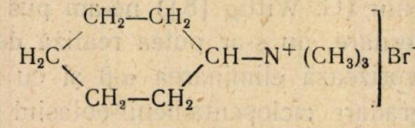
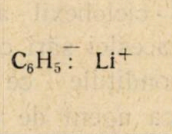
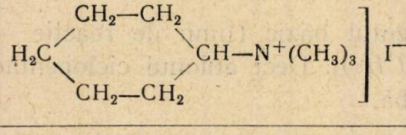
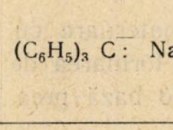
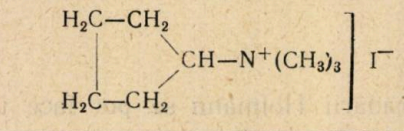
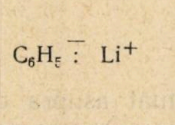
Din studiul efectuat asupra degradării Hofmann se pot face următoarele constatări:

1. Doar bazele foarte tari produc degradarea Hofmann la temperatură joasă.

2. Cu cît baza este mai puternică (tendința de a accepta protoni este mai mare) cu atît randamentul degradării e mai mare.

3. Cationul combinației organo-metalice, are și el influență mai ales prin tendința de a forma complecși. Acolo unde această tendință există reactivitatea e diminuată.

4. Anionul sării cuaternare nu influențează reacția decît în cazul în care poate bloca compusul organo-metalic într-o combinație complexă. Rezultatele obținute sînt redate în tabelul alăturat:

Nr. curent	Sarea cuaternară	Agentul de degradare	Tăria bazică pKa	Durata reacţiei	Randament
1			19	24 ore	—
2			18—19	24 ore	—
3			33	24 ore	28%
4			39	24 ore	72%
5			33	12 ore	29,5%
6			39	72 ore	—

PARTEA EXPERIMENTALĂ

I. Prepararea materiilor prime

a) *În seria ciclopentanului*

1. *Ciclopentanonoximă.* [19]. Se neutralizează un mol $NH_2OH.HCl$ cu Na_2CO_3 în 250cm³ apă. După ce degajarea CO_2 încetează se adaugă un mol (84g) ciclopentanonă şi alcool pentru omogenizare. Se fierbe 2 ore, apoi alcoolul e distilat. Se răceşte bine, se filtrează oxima. Din filtrat se mai extrage cu eter o a doua porţiune de oximă. Cristale prismatice, P.t.=55,5°C. Randament 90%.

2. *Ciclopentil-amină* [20] : Se dizolvă ciclopentanonoxima (0,45 moli) în 600 cm^3 etanol absolut. Se adaugă treptat 1 atom-gram sodiu metalic, tăiat mărunt. La sfîrșit se distilă cea mai mare parte din alcool. Se antrenează cu vapori de apă amina nedistilată. Distilatul și antrenatul se acidulează cu HCl și se evaporă în vid. Clorhidratul solid e descompus cu NaOH 25%, apoi soluția e saturată cu CO_3K_2 și amina se extrage cu eter. Se usucă extractul și se distilă. În altă variantă, clorhidratul se încălzește într-un balon. Se picură NaOH 50%. Amina umedă, distilă. Se usucă pe KOH, se separă straturile și se distilă amina. Lichid gălbui, miros caracteristic. P.f. 105—108,5°C. — Randament 54%.

3. *Dimetil-ciclopentil-amina* [21] :

La 0,6 moli HCOOH (soluție 90%) bine răcit, se adaugă, încet, răcind mereu, 0,1 moli ciclopentil-amină. Se adaugă apoi 0,22 moli CH_2O (soluție 35%). Se încălzește la fierbere 8 ore. După răcire se acidulează cu HCl 15% și se concentrează în vid. Clorhidratul se prelucrează ca în cazul aminei primare. Lichid incolor cu miros asemănător trimetil-aminei.

P.f. = 131 — 134° (față de 133,5 — 135°C [22]). Randament 30%.

4. *Dimetil-ciclopentil-amina (altă variantă).*

În această încercare s-a încălzit amina primară (1 mol) cu CH_2O, soluție 35% (2,2 moli) și alcool isopropilic (5 moli) timp de 4 ore la 160°, în tub închis. S-a distilat la sfîrșit produsul.

P.f. = 130—136°C. Randament 19%.

5. *Bromura de trimetil - ciclopentil - amoniu.*

Se dizolvă 0,01 moli dimetil-ciclopentil-amină, în eter. Prin soluția răcită se barbotează CH_3Br în exces. (Aceasta se prepară pe loc din CH_3OH și HBr). S-a lăsat 36 ore să cristalizeze. S-au depus cristale albe, foarte fine, de sare cuaternară. Randament 75%.

6. *Iodura de trimetil-ciclopentil-amoniu.*

Se dizolvă amina terțiară într-o cantitate minimă de eter. Se răcește foarte bine. Se adaugă, în porțiuni mici, răcind mereu, (se produc împroșcări slabe) CH_3I (100% exces). Se lasă o oră să cristalizeze. Se filtrează și se spală cu eter. Randament = 95%.

b) *În seria ciclohexanului :*

1. *Dimetil-ciclohexil-amina :* 215 g dimetil-anilină, distilată în vid, se introduc într-o autoclavă de 500 cm^3, împreună cu un catalizator de nichel pe cărbune (15 g). Se introduce hidrogen la 200 atmosfere. Se încălzește la 170°—180°.

Absorbţia hidrogenului a durat în total 20 ore. Hidrogenul s-a absorbit 95% din cantitatea teoretică.

Final se filtrează catalizatorul iar produsul se distilă. Produsul (lichid incolor), distilă între 159—168°C. Randament 60%.

2. *Bromura de trimetil-ciclohexil-amoniu.*

Prin soluţia, într-un amestec de metanol şi eter (2 : 1) a aminei terţiare se trece CH_3Br (5 moli la un mol amină). Se lasă 2 ore să cristalizeze, apoi se filtrează sarea cuaternară. Cristale aciculare, albe. Randament: 82,5%.

3. *Iodura de trimetil-ciclohexil-amoniu:*

Se prepară la fel cu iodura de trimetil-*ciclopentil-amoniu* (pag. 99). Se lucrează în amestec de CH_3OH şi eter (2 : 1), care prezintă avantajul formării unor cristale mai uşor filtrabile decît în cazul utilizării eterului ca solvent şi în care sarea cuaternară e mai puţin solubilă decît în metanol.

După filtrare se spală cu eter. — Randament: 86,5%.

4. *Bromura de brommetil-ciclohexil-amoniu [12].*

La soluţia în acetonă (acetona uscată pe $CaCl_2$) a aminei terţiare se adaugă, la rece CH_2Br_2 (cantitatea steochiometrică). Se lasă să cristalizeze în vas închis. După trei zile a început să cristalizeze. După 8 zile am filtrat repede şi am spălat cu eter.

Cristale albe, higroscopice. — Randament: 45%.

II. **Degradări Hofmann cu dozarea olefinei:**

Toate încercările s-au făcut cu iodura de trimetil-ciclopentil-amoniu. Randamentele calculate pe baza cantităţii de olefină nu sînt randamentele reale ale degradărilor (vezi pag. 94).

Desigur olefina se pierde în timpul degradării.

1. *Degradare în forma clasică (termică).*

Se prepară Ag_2O dintr-o soluţie de $Ag\,NO_3$ şi $Na\,OH$ 10%. Se spală cu apă pînă la reacţie neutră.

La soluţia a 0,01 moli sare cuaternară în 10 cm^3 apă se adaugă Ag_2O (0,015 moli). Se agită timp de o oră, vasul astupat. Se fierbe sub reflux o oră. Se distilă la sec. Se adaugă 10 cm^3 apă şi se distilă din nou la sec. Distilatul se extrage de 6—7 ori cu cîte 5—10 cm^3 eter. Se usucă extractul, apoi ciclopentena se dozează cu brom. În altă variantă, după adăugarea Ag_2O, se agită o oră vasul astupat şi se distilă la sec. Reziduul se prăjeşte pînă ce degajarea de gaze încetează. Distilatul se prinde în CCl_4 bine răcit. Se separă straturile; cel apos se spală de 3 ori cu CCl_4 şi se titrează ciclopentena. — Randament: 8—10%.

2. *Degradare cu butoxid de potasiu:*

Se prepară $(CH_3)_3$ COK din 0,8 g K și 2,5 g butanol terțiar (distilat pe C_2Ca), în 10 g xilen.

Se adaugă 0,01 moli sare cuaternară. Se încălzește la 70°, două ore. S-a degajat $N(CH_3)_3$.

S-a distilat un cap, ciclopentenă și terțiar-butanol (80°—85°C). Restul a distilat la 135°—140°C. În prima fracțiune s-a dozat olefina. Randament 5%.

3. *Degradare cu trifenil-metil-sodiu:*

Se prepară compusul organo-metalic [10] prin agitarea a 6 g trifenil-clormetan, în 30—32 cm^3 eter, cu 38 g amalgam de sodiu, 3%. Se lasă pînă a doua zi. Soluția de culoare roșie se transvasează peste 0,01 moli sare cuaternară, în curent de CH_4, într-un balon cu 2 gîturi. S-a încălzit 2 ore, la fierberea eterului. În timpul încălzirii soluția devine galbenă și se degajă trimetil-amină. S-a lăsat 6 ore la temperatura camerei.

Tot timpul s-a menținut un curent slab de metan uscat. S-a descompus cu gheață (nu s-a degajat căldură) și s-a extras cu eter. Soluția eterică, uscată, s-a distilat pe baie. În distilat s-a dozat olefina. Randament = 7,5%.

III. **Degradări Hofmann cu dozarea trimetil-aminei sub formă de picrat**

a) *În seria ciclopentanului:*

A) *Degradarea iodurii cuaternare*

1. *Degradare termică, cu butoxid de potasiu:* Se prepară o soluție de 0,015 moli terț-butoxid de *K* în 25 cm^3 eter. Se adaugă 0,01 moli sare cuaternară. Se astupă balonul. Se agită 24 ore (se lasă să stea alte 24 ore) apoi se distilă eterul într-o soluție de acid picric în eter umed, răcită exterior cu gheață. Nu se formează nici un precipitat. Balonul se încălzește pe baie de parafină, pînă la 120°, apoi în flacără pînă ce nu se mai degajă gaze. Produsul barbotează prin soluția de acid picric. Se formează picratul trimetilaminei p.t. = 209° (brut). Randament = 61%.

2. *Încercare de degradare cu fenil-litiu.* Se prepară în 10 cm^3 eter, fenil-litiu [14] din 1,6 g C_6H_5Br și 0,15 g Li, în curent de CH_4 purificat și uscat (pe cărbune activ și P_2O_5). Se filtrează, sub vid și în curent de CH_4 soluția roșietică de fenil-litiu într-un alt balon, peste 0,01 moli de sare cuaternară. Se astupă și se agită 72 ore (între perioadele de agitare balonul stă 132 ore). Se distilă eterul într-o soluție eterică de acid picric. Nu se formează nici un precipitat.

B) *Degradarea bromurii cuaternare cu fenil-litiu*

Peste 0,005 moli sare cuaternară se introduce soluția eterică de fenil-litiu (conținînd circa 0,01 moli fenil-litiu). Se astupă balonul, se agită 24 de ore (între perioadele de agitare stă 20 ore).

Se prelucrează în mod obișnuit. Se obține picratul trimetilaminei cu un randament de 54% față de sarea cuaternară brută. P.t.=211°C. (al produsului brut).

b) *În seria ciclohexanului*

A. *Încercări asupra iodurii cuaternare*

1. *Încercare cu ciclopentadienă sodată:* Se prepară butoxid de Na prin fierberea timp de 2 ore a 10 cm^3 butanol terțiar cu 0,3 g Na. Final, butoxidul, în parte, precipită.

Se adaugă ciclopentadienă [13] (50% exces față de butoxid); precipitatul existent dispare și se depune combinația sodată a ciclopentadienei. Soluția se închide la culoare (probabil din cauza excesului de ciclopentadienă).

Se introduce sarea cuaternară (0,01 moli). Se conduce degradarea în mod obișnuit (24 ore de agitare+36 ore). Degradarea nu are loc (nu se formează $NCH_3)_3$). Repetîndu-se, cu ciclopentadienil-potasiu, rezultatul e același.

2. *Degradare cu trifenil-metil-sodiu:* Se prepară trifenil-metil-sodiu [10] din 5,6 g trifenil-clormetan și 76 g amanalgam de sodiu 1,5% în 30 cm^3 eter.

Se închide balonul și se agită energic timp de 1,5 ore (după 5 minute soluția devine galbenă, după 15—20 minute, roșie).

Dacă în timpul agitării balonul se încălzește prea tare, se răcește la exterior cu apă. Final soluția e roșie închisă, iar la fund s-a separat Hg. Se deschide balonul în curent de metan și se introduc 0,01 moli sare cuaternară. Se astupă și se agită 12 ore. (stă alte 12 ore). Produsul de reacție se prelucrează în modul obișnuit. Picratul trimetil-aminei se obține cu un randament de 29,5% față de sarea cuaternară. P.t. 205°.

B. *Încercări asupra bromurii cuaternare.*

1. *Încercare cu ciclopentadienil-potasiu.* Compusul organo-metalic s-a preparat după K. Ziegler [13]. Într-un amestec de 2,5 cm^3 ciclopentadienă (proaspăt distilată), 1 cm^3 eter și două-trei picături butanol terțiar, se introduc 0,6 g potasiu tăiat fin. Potasiul se consumă în circa 2 ore.

Se adaugă sarea cuaternară (0,01 moli). Experiența se conduce în modul obișnuit (24 de ore de agitare+24 de ore). Nu se produce degradare.

2. *Degradare cu trifenil-metil-sodiu.* În soluția eterică a compusului organo-metalic se adaugă, în curent de metan, 0.01 moli sare cuaternară. Se conduce degradarea la fel ca în experiențele de mai sus. Randament 28%. P.t. 205°.

3. *Degradare cu fenil-litiu.* S-au agitat 0,005 moli de sare cuaternară cu 0,01 moli fenil-litiu în 20 cm^3 eter. Se agită 24 ore (stă alte 24 ore). Randament: 72%. P.t. 200°.

C. *Încercarea de degradare a bromurii de dimetil-brommetil-ciclohexil-amoniu, cu ciclopentadienil-potasiu.*

Se agită 0,005 moli de sare cuaternară cu 0,012 moli ciclopentadienil-potasiu, 24 de ore. Nu se produce degradare.

Observare. În toate experiențele am lucrat cu exces de compus de orngano-metalic, întrucît excesul nu are nici o influență asupra procesului și produșilor de reacție [12].

Catedra de Chimie Organică
I.P.B.

BIBLIOGRAFIE

1. *R. Willstätter* și *V. Schmaedel:* Ber. dtsch. chem. Ges. *38,* 1995 (1905).
2. *I. L. Goldfarb* și *M. S. Kondakova:* Compt. rend. acad. sci. U.R.S.S. *55,* 613 (1947).
3. *S. Iunusov:* J. Obșci. Him *20,* 1514 (1950).
4. *I. M. Slobodin* și *N. A. Selezneva:* J. Obșci. Him *26,* 691 (1956); Bv. U.R.S.S. 107.268 (1957).
5. *I. M. Slobodin:* J. Obșci. Him. *27,* 2473 (1957).
6. *W. Hanhart* și *C. K. Ingold:* J. Chem. Soc. (London) *1927,* 997.
7. *C. R. Hauser* și *S. W. Kantor:* J. Amer. Chem. Soc. *73,* 1437 (1951).
8. *G. Wittig* și *R. Polster:* Liebigs Ann. Chem. *599,* 13 (1956).
9. *G. Wittig* și *Sommer Hans:* Liebigs Ann. Chem. *594,* 1 (1955).
10. * * * Organic Reactions I, 286.
11. *A. Morton:* Chem. Rev. *35,* 1, (I, 1944).
12. *J. Rabiant* și *G. Wittig:* Bull. Soc. Chim. France *1957,* 798. 434, (1956).
13. *K. Ziegler, H. Froitzheim-Kühlborn* și *K. Hafner:* Chem. Ber. *89,* 434, (1956).
14. *G. Wittig:* Angew. Chem. *53,* 241 (1940).
15. *G. Wittig* și *R. Polster:* Liebigs Ann. Chem. *599,* 1, (1956).
16. *G. Wittig:* Experientia supplementum VII, 291, (1957).
17. *A. C. Cope, D. C. Mac Lean, M. A. Nelson:* J. Amer. Chem. Soc. *77,* 1628, (1955).
18. *G. Wittig* și *R. Polster:* Liebigs Ann. Chem. *612,* 102 (1958).
19. *W. Hentzschel* și *J. Wislicennus:* Liebigs Ann. Chem. *275,* 312 (1893).
20. *J. Wislicennus* și *W. Hentzschel:* Liebigs Ann. Chem. *275,* 325 (1893).
21. *D. J. Cram, B. L. van Duuren:* J. Amer. Chem. Soc. *77,* 3576 (1955).
22. *M. Mugdan:* Liebigs Ann. Chem. *298,* 139 (1897).

ГОФМАНС; ЧКИИ РАСПАД ЧЕТБЕРТИЧНЫХ СОЛЕЙ МЕТАЛЛООРГАНИЧЕСКИМИ СОЕДИНЕНИЯМИ

(краткое содержание)

В работе описывается гофманский распад четвертичних солей производных от циклопентана и циклогексана, при комнатной температуре. Агенты; производящие распад (металлоорганические соединения) сравниваются между собой на основании их основности. При этом было установлено, что лишь наиболее сильные основания производят распад при комнатной температу́ре. Выходы возрастают с основностью агента. Одновременно исследовалось влияние аниона четвертичной соли и катиона агента, производящего распад, на ход реакции.

HOFMANN DEGRADATION OF QUARTERNARY AMMONIUM SALTS, WITH ORGANOMETALLIC COMPOUNDS

Abstract

In the present paper, the degradation of quaternary ammonium salts derived from cyclopentane and cyclohexane has been studied at the ordinary temperature.

The degradation agents (organometallic compounds) are compared on their basicity (pKa). The degradation at the ordinary temperature takes place only with very strong bases and the yield increases with the basicity.

The influence of the anion of the quaternary ammonium salt and that of the cation of the degradation agent on the reaction course has also been studied.

LA DÉGRADATION D'APRÈS HOFMANN, DES SELS QUATERNAIRES D'AMMONIUM, PAR DES DÉRIVÉS ORGANO - METALLIQUES

(Résumé)

On décrit la dégradation d'après Hofmann des sels quaternaires d'ammonium d-rivés du cyclopentane et du cyclohexane, à la température ordinaire. Comme base de comparaison des agents de dégradation sert leur basicité (pKa). Il a été trouvé que les bases très fortes sont les seules en état de produire la dégradation à la température ordinaire et que le rendement augmente avec la basicité de l'agent de dégradation (l'anion accépteur des protons).

On a étudié en même temps, l'influence qu'exercent sur la réaction, l'anion du sel quaternaire et le cation de l'agent de dégradation.

DER HOFMANNSCHE ABBAU DER QUARTÄREN AMMONIUMSALZE DURCH ORGANOMETALLVERBINDUNGEN

(Zusammenfassung)

Es wird der Hofmannsche Abbau der aus Cyclopentan und Cyclohexan entstehenden quartären Salze bei Zimmertemperatur beschrieben. Die Degradierungsmittel (Organometallverbindungen) werden auf Grund ihrer Basizität verglichen. Man hat festgestellt dass nur die stärksten Basen einen Abbau bei Normaltemperatur verursachen. Die Ausbeuten steigen mit der Basizität der Abbaumittel.

Gleichzeitig wurde der Einfluss des Anions der quartären Salze und des Cations des Abbaumittels auf den Ablauf der Reaktion untersucht.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

REZISTENŢA MATERIALELOR

DYNAMISCHE STABILITÄT DER HÄNGEBRÜCKEN ZUR ÜBERFÜHRUNG VON GASROHRLEITUNGEN ÜBER FLÜSSE [1])

von
GHEORGHE BUZDUGAN, MIHAI SARIAN, RADU VOINEA, AUGUSTIN PETRE, MATY BLUMENFELD, TOMA PANA, ENEA BARBU

1. *Einführung*

Die ausserordentlichen Vorteile des Methangases als Rohstoff in der chemischen Industrie oder als Brennstoff haben in der letzten Zeit eine starke Entwicklung des Rohrleitungsnetzes bewirkt, das sich vom Zentrum Transsilvaniens aus nach unseren Industriegebieten und denen unserer Nachbarländer erstreckt.

Eines der technischen Probleme, die sich beim Bau dieser Leitungen ergeben, ist die Überführung über Flüsse, die in Form von Hängebrücken, Pfeilerbrücken oder unter Wasser erfolgen kann. Pfeilerbrücken sind infolge der Schwierigkeiten bei der Ausführung der Pfeiler ziemlich kostspielig.

Unterwasserleitungen sichern nicht die Möglichkeit einer Kontrolle und der Ausbesserung von etwaigen Schäden. Aus diesen Gründen wird die Überführung mittels Hängebrücken vorgezogen.

Was die Berechnung anbetrifft, müssen beim Entwurf von derartigen Hängebrücken folgende Lasten berücksichtigt werden: Eigengewicht, Gewicht der Passanten, wenn die Brücke auch für Fussgängerverkehr dienen soll, Schnee — oder Eislast, Wärmewirkungen, statische Wirkung des Windes, Wirkung der vom Winde hervorgerufenen Schwingungen und Erdbebenwirkungen.

In der technischen Literatur findet man ziemlich wenige Angaben über die Berechnungsweise dieser Bauten, insbesondre in Hinblick auf die dynamische Wirkung des Windes. In der Arbeit [1] wird die statische Wirkung des Windes in horizontaler Richtung auf die Hängebrücken untersucht und die Spannungen in den Kabeln und in den Pfeilern hervorgerufenen Kräfte bestimmt.

---

[1]) Der erste Teil dieser Arbeit wurde anlässlich der Wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule Bukarest (November 1959) und der zweite Teil auf der Wissenschaftlichen Jubiläumstagung des Instituts für angewandte Mechanik der Akademie der RVR (Juli 1960), vorgetragen.

In [2] wird zuerst die statische Berechnung bei vertikalen Kräften und der Windwirkung behandelt und anschliessend die aerodynamische Stabilität untersucht. Dieses Studium wurde auf Grund eines Modells im Windkanal durchgeführt. Infolge der Ausmessungen des Kanals konnte nicht ein Modell der ganzen Brücke, sondern nur eines Teils derselben ausgeführt werden. Daher ist kaum anzunehmen, dass die experimentelle Untersuchung eine treue Wiedergabe der Erscheinungen, die in der reellen Konstruktion zu erwarten sind, ermöglicht. In dem betreffenden Aufsatz wird keine Bestimmung der Eigenfrequenzen der Brücke vorgenommen.

In unserem Lande ist, obwohl das Problem der aerodynamischen Stabilität bereits anlässlich des Entwurfes der ersten Hängebrücken gestellt wurde, ein eingehenderes Studium mit experimenteller Überprüfung unternommen worden, nachdem die ersten Brücken fertig gebaut waren. Dieses Studium bezweckte eine Prüfung der fertigen Konstruktionen und Schlussfolgerungen für den Entwurf zukünftiger Bauten.

Die üblichen Konstruktionen der bei uns ausgeführten Hängebrücken für Gasleitungen gehören zwei verschiedenen Typen an, und zwar Sternkonstruktionen (Bild 1), wobei die Hauptkabel sich in der vertikalen Ebene befinden und die seitlichen Kabel mit den vertikalen einen Stern bilden, oder Konstruktionen in V - Form mit den Kabeln in zwei gleich geneigten Ebenen (Bild 2). Bild 3 stellt einen Schnitt durch eine Sternbrücke, Bild 4 einen Schnitt durch eine V - Brücke dar.

Das von uns durchgeführte Studium bezieht sich nur auf die freien und erzwungenen Schwingungen dieser Brücken. Es wurde parallel theoretisch und experimentell durchgeführt ; die Versuche waren von grossem Nutzen für die Überprüfung der Rechenhypothesen. Es wurden Brücken mit Spannweiten von 95, 140 und 150 m untersucht.

Das Studium umfasste folgende Etappen : Bestimmung der Eigenfrequenzen, Bestimmung der aerodynamischen Störkräfte, Untersuchung der erzwungenen Schwingungen und der Dämpfungen. Zum Studium der erzwungenen Schwingungen und der Dämpfungen, wurden Erregermaschinen benutzt und es wurde versucht, aus der Wirkung der lokal angreifenden Störkräfte, Schlüsse über den Einfluss der vom Wind verursachten verteilten Kräfte zu ziehen.

2. *Theoretisches Studium.*

2.1. *Rechenhypothesen. Bezeichnungen.*

Eine Hängebrücke setzt sich aus folgenden Elementen zusammen: Verankerungsblöcke der Kabel, Pylone und deren Widerlager, Rohrleitung, Kabel, Hänger zur Unterstützung der Rohrleitung, Verankerungselemente.

Für die hier folgenden Rechnungen werden folgende Hypothesen angenommen :

— die Betonblöcke sind praktisch starr und unbeweglich, sodass sie nicht in der Schwingungsberechnung auftreten ;

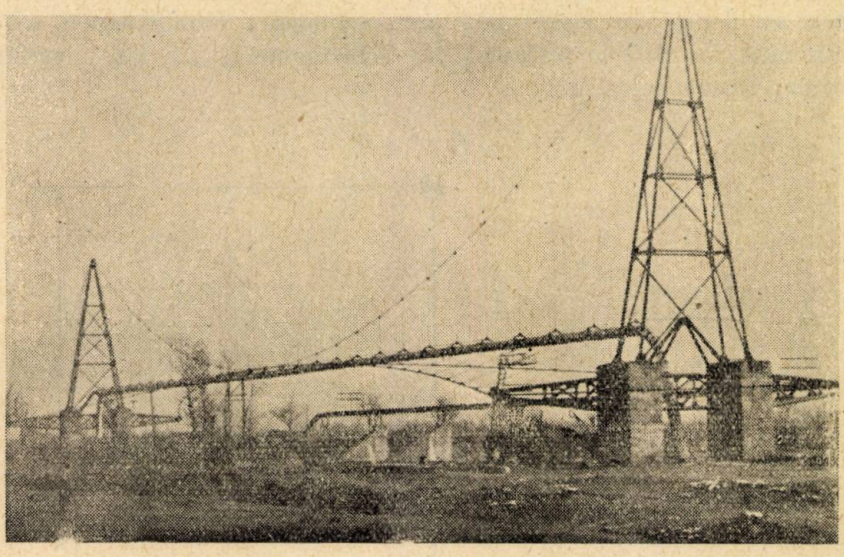


Bild 1

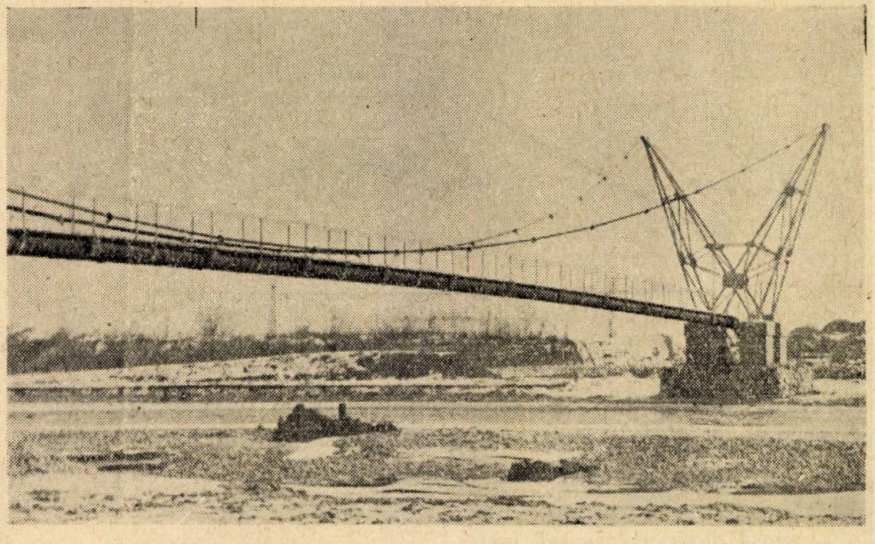


Bild 2

— die Verformungen der Häger sind vernachlässigbar im Verhältnis zu denen der Kabel und der Leitungen; infolgedessen wird der Querschnitt der Brücke während der Schwingbewegung als unverformbar in seiner Ebene betrachtet;

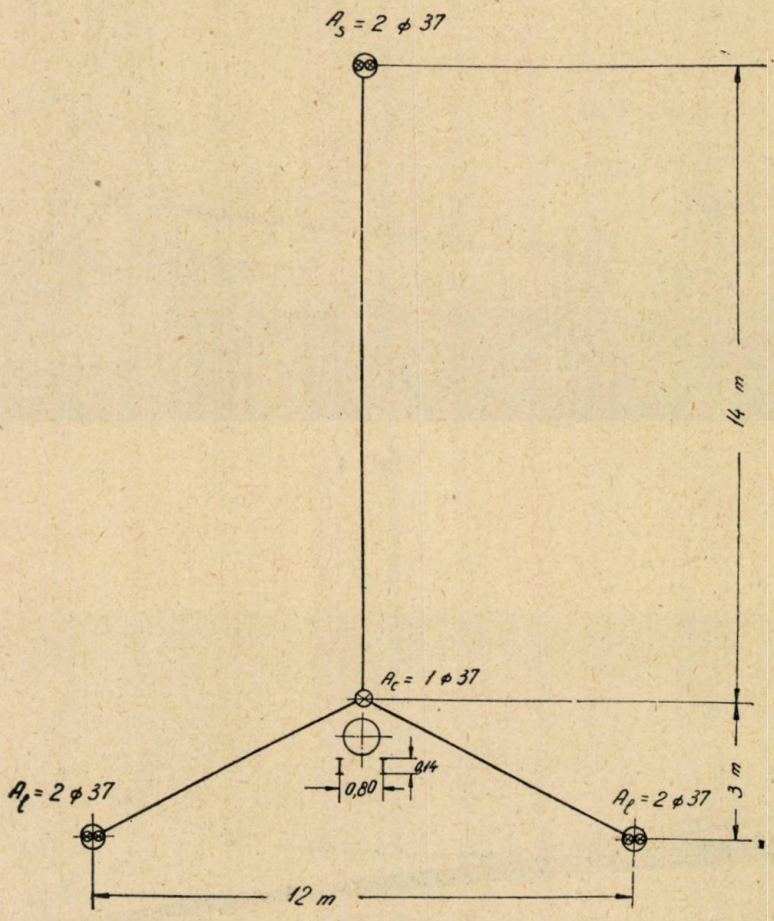


Bild 3

— die Rohrleitung ist ein kontinuierlicher elastischer Balken, der an den unbeweglichen Enden einfach aufgelagert ist;

— die Kabel können mit biegsamen elastischen Saiten verglichen werden;

— die Kabelenden sind fest;

— die nichtliniaren Wirkungen des schwingenden Systems werden vernachlässigt.

Bezeichnungen:

l — Brückenspannweite;
f_i — vertikale Durchbiegung der verschiedenen Brückenkabel;
A_i — Flächen der Kabelquerschnitte;
H_i — Zugkräfte in den Kabeln;
η — vertikale Verschiebung in einem beliebigen Querschnitt während der Schwingung.

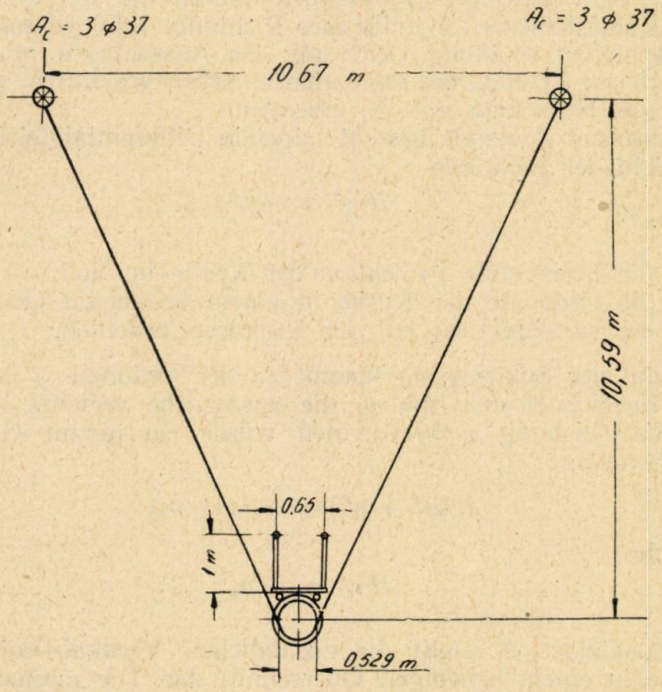


Bild 4

2.2. *Studium der Eigenfrequenzen der Brücke.*

Die Hängebrücke hat unendlich viele Harmonische, die mit den vom Wind verursachten vertikalen Störkräfte, die durch die Ablösung der Bénard-Kármánschen Wirbelstrassen hervorgerufen werden, in Resonanz eintreten können.

2.2.1. *Rechenmethode.*

Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen wurde die energetische Methode angewendet. Das elastische System wird als konservativ, also die Summe der potentiellen und kinetischen Energie in jedem Augenblick als konstant betrachtet. Die Änderung der potentiellen Energie erfolgt auf Grund der Änderung der Richtung der Kräfte in den Kabeln, die als

undehnbar betrachtet werden, der Dehnungsverformung der als dehnbar betrachteten Kabel und der Biegeverformungen der Leitung und der Profile des Wagenrollgeleises (der Wagen dient für Instandhaltungs-und Kontrollarbeiten).

2.2.2. *Änderung der potentiellen Energie infolge Richtungsänderung der Kabelkräfte.*

Infolge der Schwingungsbewegung ändern die Kräfte in den verschiedenen Kabelelementen ständig ihre Richtung. Infolgedessen erscheinen auf der vertikalen Richtung (Richtung des Ausschlages η) Projektionen von zusätzlichen Kräften, die mechanische Arbeit verrichten, welche potentielle Energie, bezeichnet mit V_1, erzeugen.

In statischem Zustande besteht folgende Differentialgleichung für das Gleichgewicht der Seilkurve

$$H y'' = -p \tag{1}$$

wo

H — die horizontale Projektion der Kräfte im Seil,
y — die Ordonate der Kurve in einem beliebigen Querschnitt x,
p — die verteilte Last auf der Seilkurve, bedeuten.

Während der Schwingung kommt zu der Ordonate y der Ausschlag η hinzu. Bezeichnet man mit p_1 die zusätzliche verteilte Last die eine statische Verschiebung η hervorrufen würde, so nimmt Gleichung (1) folgende Form an

$$H(y'' + \eta'') = -(p + p_1)$$

woraus sich

$$H\eta'' = -p_1 \tag{2}$$

ergibt.

Die Zusatzlast p_1 stellt die zusätzlichen Vertikal-Projektionen der Kabelkräfte in einem beliebigen Querschnitt dar. Die mechanische Arbeit dieser Zusatzkräfte ist der Arbeit der virtuellen Last F_1 gleich und zwar.

$$V_1 = \frac{1}{2}\int_0^l p_1\, dx\, \eta$$

Unter Berücksichtigung von (2) wird diese Beziehung

$$V_1 = -\frac{1}{2}H\int_0^l \eta''\,\eta\, dx = -\frac{1}{2}H\int_0^l \eta . d\eta' = -\frac{1}{2}H\left[\eta\eta'\Big|_0^l - \int_0^l (\eta')^2 dx\right]$$

Der erste Term in der Klammer ist gleich null, denn für $x=0$ und $x = l$ ist $\eta = 0$ und man erhält

$$V_1 = \frac{1}{2}H\int_0^l (\eta')^2 dx$$

Für eine beliebige Anzahl von Brückenkabeln kann man schreiben

$$V_1 = \frac{1}{2}(\Sigma H)\int_0^l (\eta')^2 dx \tag{3}$$

2.2.3. *Änderung der potentiellen Energie infolge der Dehnungsverformungen der Kabel.*

Während der Schwingung variieren die H — Kräfte. Betrachtet man die Kabel als elastisch (dehnbar), so verursachen diese Veränderungen Schwankungen der potentiellen Verformungsenergie. Im Gleichgewichtszustand ist die Länge der Seilkurve

$$s = \int_0^l \sqrt{(1+y'^2)}\, dx = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2}(y')^2 + \cdots\right] dx \approx l + \frac{1}{2}\int_0^l (y')^2 dx \tag{4}$$

Während der Schwingung hat der Ausdruck für die Länge des Kabels eine analoge Form

$$s + \Delta s = \int_0^l \sqrt{1 + (y' + \eta')^2}\, dx = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2}(y' + \eta')^2\right] dx \approx$$

$$l + \frac{1}{2}\int_0^l (y')^2 dx + \int_0^l y'\eta' dx + \frac{1}{2}\int_0^l (\eta')^2 dx \tag{5}$$

Da $(\eta')^2$ sehr klein ist, kann der letzte Term vernachlässigt werden. Zieht man (4) von (5) ab, so erhält man dann

$$\Delta s \approx \int_0^l \eta' y' dx$$

und die Variation der potentiellen Energie durch Dehnung

$$V_2 = \frac{1}{2} N \cdot \Delta s$$

wo N die Zugkraft im Kabel ist. Der Ausdruck $\triangle s$ kann auch auf Grund der üblichen Beziehung für die Dehnungsverformungen geschrieben werden:

$$\Delta s = \frac{N.s}{E_c A_c}$$

wo $E_c A_c$ die Dehnsteifigkeit des Kabels ist.

Eliminiert man N in den letzten beiden Beziehungen, so ergibt sich

$$V_2 = \frac{E_c A_c}{2} \cdot \frac{(\Delta s)^2}{s} = \frac{E_c A_c}{2} \cdot \frac{[\int_0^l y' \eta' dx]^2}{l + \frac{1}{2}\int_0^l (y')^2 dx}$$

Da das Integral im Nenner im Vergleich zu l vernachlässigbar ist, erhält man

$$V_2 = \frac{E_c A_c}{2l} [\int_0^l y' \eta' dx]^2$$

Das Integral kann wie folgt umgeformt werden

$$\int_0^l y' \eta' dx = \int_0^l y' d\eta = y' \eta \Big|_0^l - \int_0^l y'' \eta dx = -\int_0^l y'' \eta dx \qquad (6)$$

Betrachtet man die Seilkurvengleichung als Parabel, so kann man schreiben

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); \qquad y'' = -\frac{8f}{l^2}$$

wodurch der Ausdruck (6) die Form

$$\int_0^l y' \eta' dx = -\int_0^l y'' \eta dx = \frac{8f}{l^2} \int_0^l \eta dx$$

annimmt.

Hiermit und unter Berücksichtigung der Kabelanzahl wird der Ausdruck der Energie V_2:

$$V_2 = \frac{32}{l^3} \left[\Sigma E_c A_c \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right] \times \left[\int_0^l \eta dx \right]^2 \qquad (7)$$

2.2.4. *Änderung der potentiellen Energie durch Biegeverformungen.*

Der Ausdruck dieser Änderung ist

$$V_3 = \frac{1}{2} E_g I_g \int_0^l (\eta'')^2 dx \qquad (8)$$

wo $E_g I_g$ die Steifigkeit der Leitung und der übrigen Elemente welche die Biegemomente übernehmen, darstellt.

2.2.5. *Kinetische Energie.*

Ist μ die Masse pro Längeneinheit der Brücke, so ist die kinetische Energie in einem bestimmten Zeitpunkt

$$E = \frac{1}{2}\,\mu \int_0^l \dot{\eta}^2\, dx \tag{9}$$

2.2.6. *Die Gleichung der Eigenschwingungen.*

Man schreibt den Ausdruck für das Prinzip der Energieerhaltung

$$E + V_1 + V_2 + V_3 = \text{konst.}$$

und erhält, durch Einsetzen der oben erzielten Ausdrücke

$$\frac{1}{2}\,\mu \int_0^l \dot{\eta}^2\, dx + \frac{1}{2}\left(\Sigma H\right)\int_0^l (\eta')^2\, dx + \frac{32}{l^3}\left[\Sigma E_c A_c \left(\frac{f}{l}\right)^2\right]\left[\int_0^l \eta\, dx\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\, E_g I_g \int_0^l (\eta'')^2\, dx = \text{const.}$$

Man versucht für η Lösungen der Form

$$\eta = \eta_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\omega_n t \tag{10}$$

welche die Grenzbedingungen (für $x=0$ und $x=l$, $\eta=0$ und $\eta''=0$ in einem beliebigen Zeitpunkt t) erfüllen. Damit erhält die Energieerhaltungsgleichung die Form

$$\frac{1}{2}\mu\eta_n^2\omega_n^2\left[\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\, dx\right]\sin^2\omega_n t + \frac{1}{2}\eta_n^2\left\{\frac{n^2\pi^2}{l^2}(\Sigma H)\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{64}{l^3}\left[\Sigma E_c A_c\left(\frac{f}{l}\right)^2\right]\left[\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx\right]^2 + \frac{n^4\pi^4 E_g I_g}{l^4}\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\, dx\right\}\cos^2\omega_n t = \text{const.}$$

Damit der Ausdruck konstant ist, müssen die Koeffizienten von $\sin^2\omega_n t$ und $\cos^2\omega_n t$ einander gleich sein. Durch deren Gleichsetzung ergibt sich nach einigen Hilfsrechnungen der Ausdruck für die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{\mu l^2}(\Sigma H) + \frac{n^4\pi^4}{\mu l^4}E_g I_g + \frac{128}{\mu n^2\pi^2 l^2}\left[\Sigma E_c A_c\left(\frac{f}{l}\right)^2\right](1-\cos n\pi)^2} \tag{11}$$

bzw. für die Eigenfrequenzen

$$f_n = \sqrt{\frac{n^2}{4\mu l^2}(\Sigma H) + \frac{n^4\pi^2}{4\mu l^4} E_g I_g + \frac{32}{\mu n^2 \pi^4 l^2}\left[\Sigma E_c A_c \left(\frac{f}{l}\right)^2\right](1-\cos n\pi)^2} \quad (12)$$

2.2.7. *Bemerkungen über den Ausdruck der Eigenfrequenzen.*

Eine Untersuchung des Ausdrucks (12) ergibt, dass die Hauptfaktoren, die den Wert der Eigenfrequenzen beeinflussen, folgende Grössen sind:

— die Zugkräfte (ΣH) in den Kabeln;

— die Biegesteifigkeit $E_g I_g$ der Rohrleitung;

— die Dehnungssteifigkeit $\Sigma A_c E_c \left(\frac{f}{l}\right)^2$ der Kabel.

Da die Ordnung n der Frequenz f_n nicht in der Gleichen Weise in diesen drei Termen erscheint, ergibt sich dass die erwähnten Faktoren die Frequenzen verschiedener Ordnung nicht in gleichem Masse beeinflussen.

So beeinflusst z.B. die Dehnungssteifigkeit der Kabel nur die Frequenzen der ungeraden harmonischen Schwingungen, da für $n = 2k$ (k ganzzahlig), $1-\cos n\pi = 0$ ist. Der Einfluss dieses Faktors nimmt mit wachsendem n Werte sehr schnell ab. Die Biegesteifigkeit der Rohrleitung beeinflusst insbesondere die Frequenzen der Harmonischen höherer Ordnung, da im Zähler des zweiten Terms n^4 auftritt.

Die Zugkräfte beeinflussen insbesondere die Frequenzen der Schwingungen niederer Ordnung.

Um den Einfluss jedes dieser Faktoren hervorzuheben, wurden in Bild 5, für eine existierende Hängebrücke, vier Kurven folgender Bedeutung dargestellt:

Die *Gerade* 1 verbindet die Punkte, welche die Frequenzen des elastischen Systems darstellen würden, wenn diese nur von den Zugkräften in den Kabeln abhängen würden, also die Form

$$f_{1n} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{\Sigma H}{\mu}}$$

haben würden.

Diese Frequenzen entsprechen dem Falle, in dem das Kabel als „schwingende Saite" angesehen wird und die übrigen Einflüsse vernachlässigbar sind.

Die *Parabel* 2 verbindet die Punkte, welche die Frequenzen des elastischen Systems darstellen, im Falle diese nur von der Biegesteifigkeit der Kabel abhängen würden, also die Form

$$f_{2n} = \frac{n^2\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{E_g I_g}{\mu}}$$

hätten. Diese Formel entspricht dem Falle eines frei aufliegenden Trägers mit konstantem Querschnitt.

Die *Hyperbel* 3 verbindet die Punkte, die die Frequenzen des elastis-

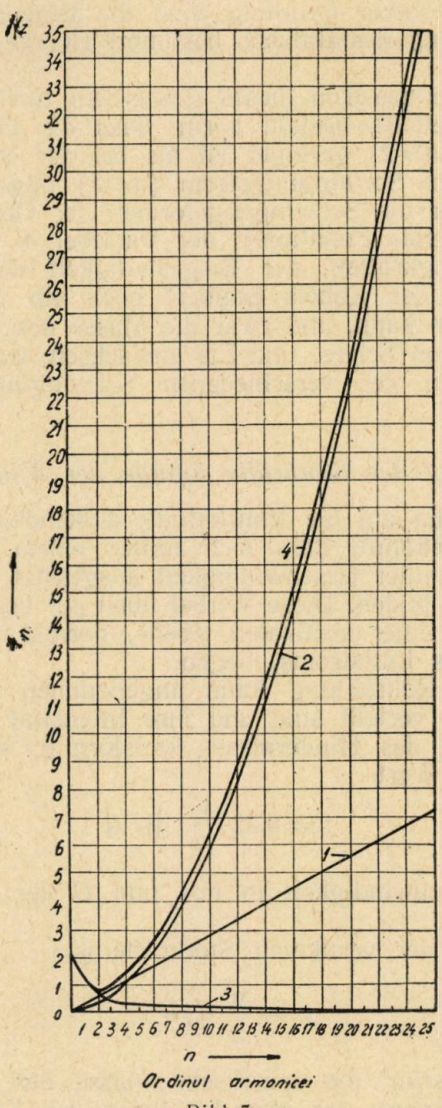


Bild 5

chen Systems darstellem, im Falle diese nur von der Dehnungssteifigkeit der Kabel abhängen würden. Der Ausdruck dieser Frequenzen ist

$$f_{3n} = \frac{4\,(1 - \cos n\,\pi)}{n\,\pi^2 l} \sqrt{\frac{2}{\mu} \Sigma E_c A_c \left(\frac{f}{l}\right)^2}$$

Kurve 4 verbindet die Punkte, welche die Frequenzen des Systems unter dem Einfluss aller drei Faktoren darstellen. Es ist zu bemerken, dass diese Kurve sich der Hyperbel 3 und der Geraden 1 für $n=1$ nähert. Für Harmonische höherer Ordnung, sind die Eigenfrequenzen insbesondere von der Biegung des Balkens bestimmt (Kurve 4 nähert sich stark der Kurve 2).

Ein anderes Kennzeichen dieses elastischen Systems, was die freien Schwingungen anbetrifft, besteht darin, dass die Frequenz der zweiten Schwingungsform ($n=2$) geringer ist als bei der ersten Form, und die Frequenz der dritten Schwingungsform ($n=3$) ungefähr der der ersten Form gleich ist. Für die Schwingungsformen der Ordnung $n>3$ sind die Frequenzen ansteigende Funktionen der Variabel n.

Ausser den Zugkräften, der Biegesteifigkeit der Leitung und der Dehnungssteifigkeit des Kabels existiert noch ein Faktor der die Frequenzen beeinflussen kann, und zwar die Masse des Systems. Diese kann im Winter infolge von Schnee und Eis anwachsen, was eine Verringerung der Eigenfrequenzen der verschiedenen Schwingunsformen zur Folge haben würde.

2.3. *Bestimmung der Störkräfte infolge der Windeinwirkung.*

Es seien nur die auf die Rohrleitung wirkenden Kräfte in Betracht gezogen. Es ist bekannt, dass sich hinter einem Körper, der einem Luftstrom mit konstanter Geschwindigkeit ausgesetzt ist, Bénard-Kármánsche Wirbelstrassen bilden. Diese Wirbel üben auf den Körper periodische Kräfte aus, die in einer vertikalen Ebene, normal zur Geschwindigkeit im Unendlichen des Luftstroms, liegen.

Im Falle der Rohrleitung kann angenommen werden, dass diese Kräfte gleichmässig verteilt sind und ihre Intensität harmonisch variiert. Ist der Querschnitt des Hindernisses kreisförmig, so hat die Frequenz der Störkräfte den Wert

$$f = 0{,}22 \frac{V}{D} \quad [\mathrm{Hz}] \tag{13}$$

wo V die Windgeschwindigkeit in m/s und D der Rohrdurchmesser in Metern sind.

Die Amplitude der vertikalen Störkräfte ist

$$p = \frac{\varrho}{2} C_k D V^2 \tag{14}$$

ϱ = 0,125 kgfs^2/m^4 die spezifische Masse der Luft (Mittelwert)
C_k— ein Koeffizient, der von der Form des Körpers abhängt und für den Zylinder praktisch der Einheit gleich ist, bedeuten.

Durch Eliminierung der Geschwindigkeit V in den vorstehenden Beziehungen erhält man

$$p = 1{,}295 \; D^3 f^2 \tag{15}$$

mit D in Metern, f in Hz und p in kgf/m.

Die Höchstwerte für f und p ergeben sich für die Höchstwerte der Windgeschwindigkeit, gemäss den Bauvorschriften in dem entsprechenden Gebiet. Für unsere Untersuchungen wurde $V_{max}=50$ m/s gewählt.

In Bild 6 wurden für eine der untersuchten Brücken die Kurven,

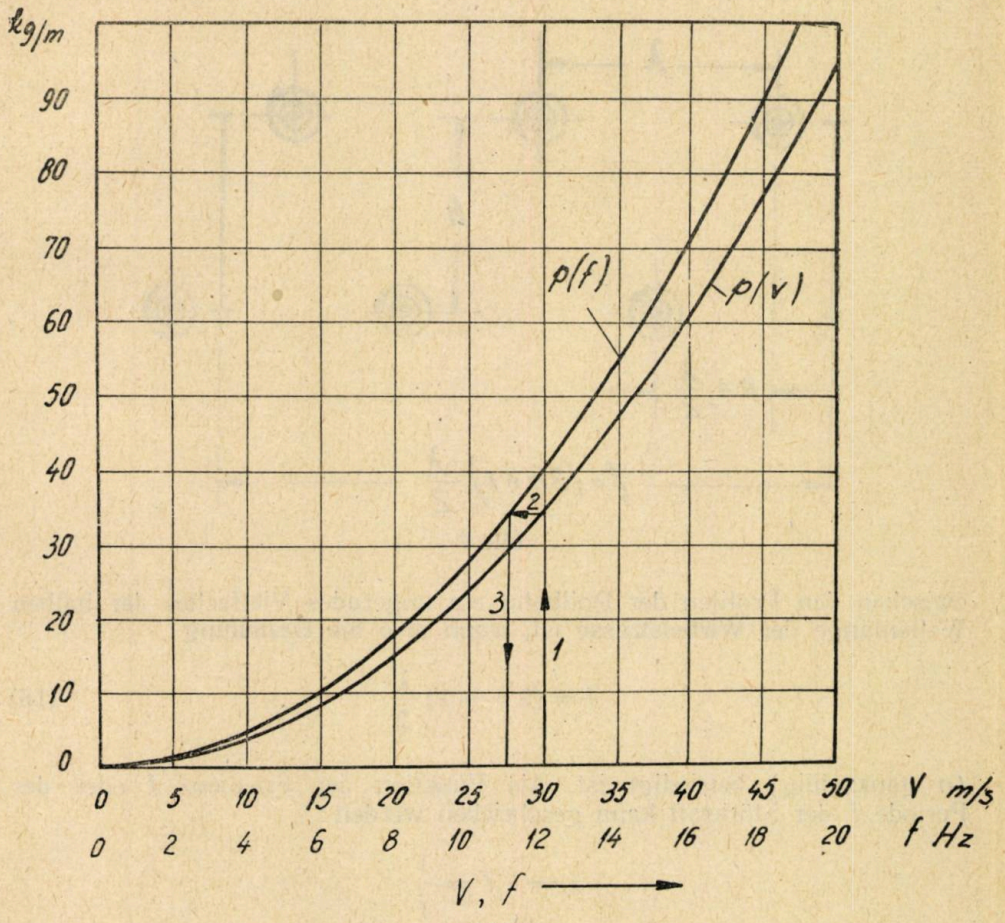


Bild 6

welche die Beziehungen (14) und (15) darstellen, wiedergegeben. Die Anwendungsweise dieses Diagramms ist folgende:

Es sei, *z.B.*, $V=30$ m/s. Mittels der Senkrechten 1 findet man auf der Kurve $p(V)$ den Wert $p=33$ kgf/m. Zieht man die Horizontale 2 und dann die Vertikale 3, so erhält man $f=11$ Hz. Analog wird vorgegangen, wenn man von einem gegebenen Wert für f ausgeht.

Das Vorhandensein der Schienen für den zur Kontrolle, Unterhaltung, Revision erforderlichen Wagen, in Form von 2 I-Profilen, sowie das

etwaige Vorhandensein eines Laufsteges für Fussgänger können Beanspruchungen durch Torsionsmomente hervorrufen.

Störende Torsionsmomente bilden sich, wenn sich gleichzeitig zwei Wirbel ablösen (wie in Bild 7), also bei einem I-Profil an der Ober-und bei dem anderen an der Unterseite. Das ist möglich, wenn der Abstand l

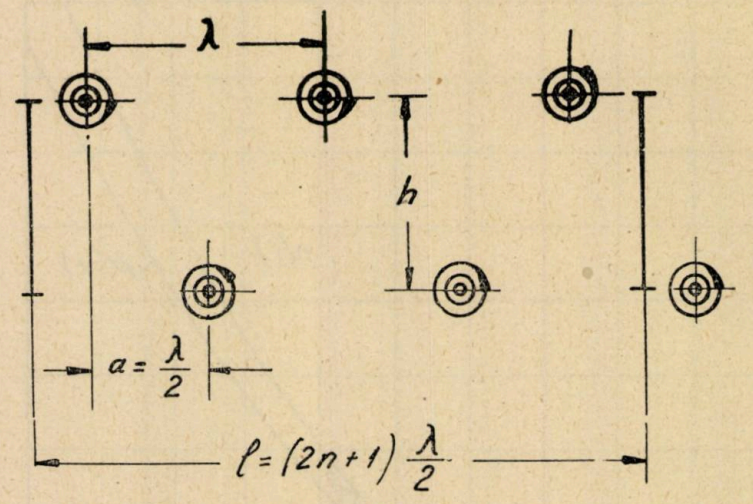


Bild 7

zwischen den Profilen der Rollbahn ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge der Wirbelstrasse ist, wenn also die Beziehung

$$l = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \tag{16}$$

(n ganzzahlig) befriedigt ist. Als Funktion der Frequenz f oder der Periode T der Störkraft kann geschrieben werden:

$$\lambda = VT = \frac{V}{f}$$

Ersetzt man in (13) D durch die Höhe h der Profile

$$f = 0{,}22\frac{V}{h}$$

und setzt den Wert von f in den Ausdruck von λ ein, so erhält man

$$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{h}{0{,}22}$$

und Beziehung (16) wird zu

$$0{,}22\,\frac{l}{h} = n + \frac{1}{2}$$

bzw.

$$n = 0{,}22\,\frac{l}{h} - \frac{1}{2} \tag{17}$$

Eine gute Konstruktion ist diejenige, bei welcher Beziehung (17) keine ganze Zahl ergibt.

2.4. *Bestimmung der durch die vom Winde verursachten Schwingungen hervorgerufenen Verformungen.*

Mit p_n sei die Amplitude der gleichförmig verteilten Störkraft, die der Frenquenz f_n der Wirbel entspricht, bezeichnet Variiert die Störkraft harmonisch, so hat sie die Form

$$p = p_n \cos \omega_n t$$

wo

$$\omega_n = 2\,\pi\, f_n$$

In einem Querschnitt x kann der Ausschlag des Systems, das gemäss der Schwingungsform n vibriert, in einem Zeitpunkt t, wie folgt geschrieben werden:

$$\eta\,(x, t) = \eta_n \sin \frac{n\,\pi\, x}{l} \cos\,(\omega_n t - \varphi)$$

Bei der Resonanz kann $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gewählt werden und folglich

$$\eta\,(x, t) = \eta_n \sin \frac{n\,\pi\, x}{l} \sin \omega_n t \tag{18}$$

Entwickelt man die gleichförmig verteilte Last p in Fourierreihe und betrachtet nur den Term der Ordnung n (der die Resonanz mit der Harmonischen der Ordnung n der Schwingung hervorruft), so erhält man

$$p\,(x, t) = \frac{4\,p}{n\,\pi} \sin \frac{n\,\pi\, x}{l} = \frac{4\,p_n}{n\,\pi} \sin \frac{n\,\pi\, x}{l} \cos \omega_n t \tag{19}$$

Zur Bestimmung der Amplitude der erzwungenen Schwingungen wird die energetische Methode angewendet und geschrieben, dass die in einem Zyklus von der Störkraft ausgeführte Arbeit der Arbeit der Reibungskräfte gleich ist.

Die Arbeit der Störkräfte während eines Zyklus ist

$$L_1 = \int_0^l \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_n}} p\,(x,t)\,dx\,d\eta = \frac{4\,p_n\,\omega_n\,\eta_n}{n\,\pi}\left[\int_0^l \sin^2\frac{n\,\pi\,x}{l}\,dx\right]\left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_n}} \cos^2\omega_n\,t\,dt\right] =$$

$$= \frac{2\,p_n\,l}{n}\,\eta_n \tag{20}$$

Die Arbeit der Reibungskräfte pro Zyklus, ist

$$L_2 = \psi\,W$$

wo ψ der Dämpfungsfaktor und W die mechanische Energie des Systems ist. Die mechanische Energie kann bestimmt werden, wenn man in Betracht zieht, dass sie der maximalen kinetischen Energie gleich ist. Die kinetische Energie erreicht ihr Maximum, wenn in Beziehung (9) $\dot{\eta}$ höchstwertig, bzw. in (18) $\sin\omega_n\,t = 1$ wird:

$$W = E_{max} = \frac{1}{2}\,\mu\int_0^l \eta_n^2\,\omega_n^2\,\sin^2\frac{n\,\pi\,x}{l}\,dx = \frac{\mu\,\eta_n^2\,\omega_n^2\,l}{4}$$

Es folgt

$$L_2 = \psi\,\frac{\mu\,\eta_n^2\,\omega_n^2\,l}{4} \tag{21}$$

Durch Gleichsetzung von (20) und (21) erhält man

$$\eta_n = \frac{1}{\psi}\cdot\frac{8\,p_n}{\mu\,n\,\omega_n^2} \tag{22}$$

2.5. *Die Bestimmung der Spannungen in der Leitung infolge der dynamischen Wirkung der Windes*

Das Biegemoment, infolge der Verformung der Leitung für die Schwingungsform n, wird mittels der Formel

$$M = -E_g\,I_g\,\eta''$$

berechnet.

Da

$$\eta = \eta_n \sin\frac{n\,\pi\,x}{l}\cos\,(\omega_n\,t - \varphi)$$

erhält man

$$M = E_g\,I_g\,\eta_n\,\frac{n^2\,\pi^2}{l^2}\sin\frac{n\,\pi\,x}{l}\cos\,(\omega_n\,t - \varphi)$$

Das Höchstbiegemoment ist

$$M_{max} = \frac{n^2 \pi^2 E_g I_g}{l^2} \eta_n$$

Daraus folgt für die Höchstspannung in der Leitung der Ausdruck

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_g} = \frac{n^2 \pi^2 E_g I_g}{W_g l^2} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{8 p_n}{\mu n \omega_n^2}$$

Zieht man in Betracht, dass die Belastung p_n zum Quadrat der Kreisfrequenz ω_n proportional ist, so ergibt sich

$$\frac{p_n}{\omega_n^2} = \frac{p_1}{\omega_1^2}$$

und folglich (23)

$$\sigma_{max} = \frac{8 n \pi^2 E_g I_g p_1}{\psi l^2 W_g \mu \omega_1^2} = \frac{4 n \pi^2 E_g D p_1}{\psi l^2 \mu \omega_1^2}$$

2.6. *Die Bestimmung der Kräfte in den Kabeln infolge der dynamischen Wirkung des Windes.*

Da die in den Kabeln direkt angreifende dynamische Belastung relativ gering ist im Vergleich zu der auf die Leitung wirkende, sei sie in einer ersten Näherung vernachlässigt und es sei angenommen, dass die Belastung von der Leitung aus durch Vermittlung der Zugbänder auf die Kabel übertragen wird.

Die Höchstbeanspruchung der Kabel findet statt, wenn die Bénard-Kármánsche Wirbelstrasse sich gleichzeitig auf der ganzen Länge der Leitung bildet. Es sei angenommen, dass dann auf das Kabel infolge der dynamischen Wirkung des Windes eine gleichförmig verteilte Last p_n einvirkt. Nimmt man ferner an, dass die Eigenfrequenz der Kabel, infolge der Ausmessung und Belastung, von der des Balkens verschieden ist, so kann mit genügender Sicherheit vorausgesetzt werden, dass die dynamische Wirkung der Belastung p_n gleichwertig ist mit der einer doppelten statischen Belastung

$$p_f = 2 p_n = 2{,}59 D^3 f_n^2 \qquad (24)$$

(siehe Formel 15).

3. *Experimentelles Studium*

Wegen der komplizierten Form des schwingenden Systems ergab sich das experimentelle Studium als absolut erforderlich. Die mittels 5. Hängebrücken engestellten Untersuchungen bezogen sich auf die Überprüfung der Eigenfrequenzen und der Amplituden der erzwungenen Schwingungen, wobei die letzteren zur Berechnung der Dämpfungsfaktoren dienten.

3.1. *Prüfung der Werte für die Eigenfrequenzen*

Für die ersten drei Schwingungsformen ($n=1, 2, 3$) wurde die Prüfung durch Erzeugung von freien Schwingungen vorgenommen. Mittels eines Metalldrahtes wurde die Brücke in einem bestimmten Querschnitt statisch verformt. Durch Zerschneiden des Drahtes, wurden freie

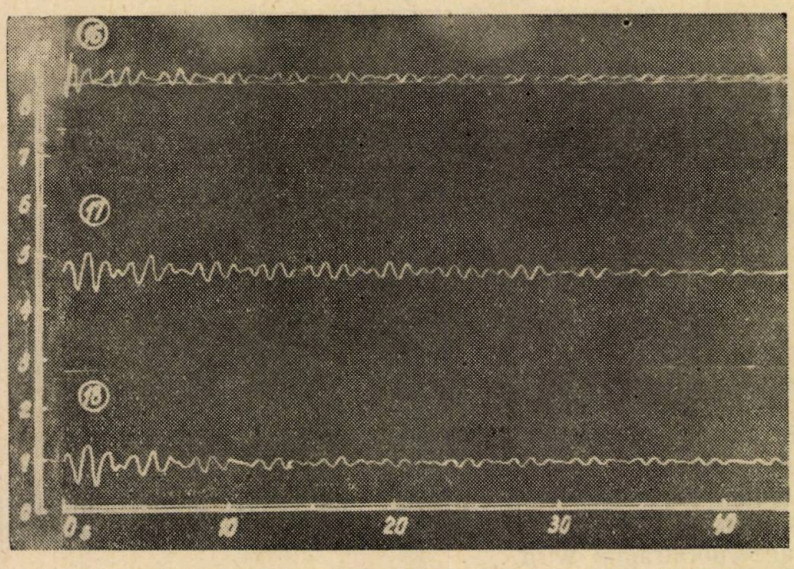


Bild 8

Schwingungen hervorgerufen, die registriert wurden. Die Vibrogramme (z.B. Bild 8) haben zu folgenden Schlussfolgerungen geführt:

— Die Frequenzen nähern sich den Rechenwerten für die Harmonischen 1 und 3 (Bild 5);

— es wurden Schwebungen infolge der Überlagerung der ersten drei Harmonischen mit nahe beieinanderliegenden Frequenzen festgestellt.

Für die oberen Harmonischen ($n \geqslant 4$) wurden Resonanzwirkungen erzeugt, mit Hilfe eines Schwingungserregers mit exzentrischen Gewichten auf 4 Scheiben. Die Maschine wurde an der Brücke aufgehängt, und zwar an Stellen wo die verschiedenen Schwingungsformen Bäuche hatten (Bild 9). Mittels eines mechanischen Vibrographen konnten einwandfrei die Frequenzen festgestellt werden, bei denen Resonanz mit den verschiedenen Harmonischen des Systems stattfanden. Auf diese Weise wurden die Eigenfrequenzen nachgeprüft und es wurde festgestellt, dass die Unterschiede gegenüber den berechneten Werten geringfügig (1—2%) sind. Es ist zu bemerken, dass, wie aus Bild 5 hervorgeht, die Eigenfrequenzen der Brücken einander sehr nahe liegen.

Auf jeder Scheibe der Schwingmaschine befinden sich zwei Gewichte, die einen Winkel α bilden, der beliebig verändert werden kann (Bild 10).

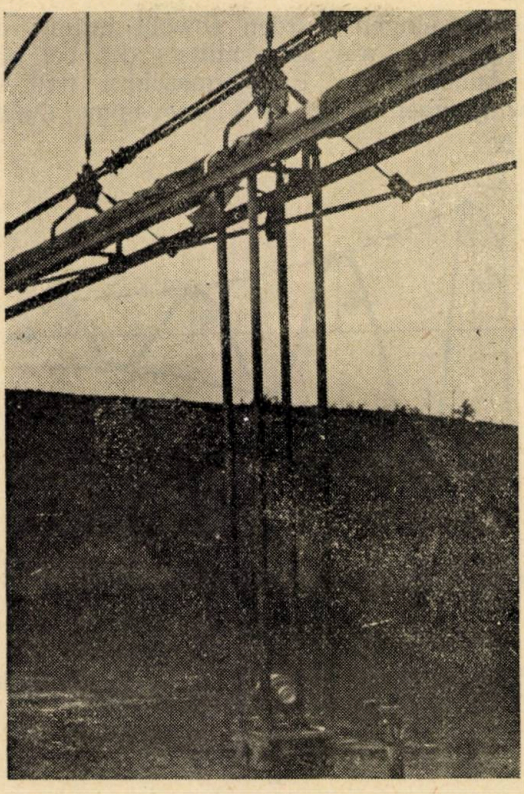


Bild 9

Man kann auf diese Weise durch Änderung des Winkels und gleichbleibender Frequenz verschiedene Werte der Störkraft erzielen. Die Gewichte

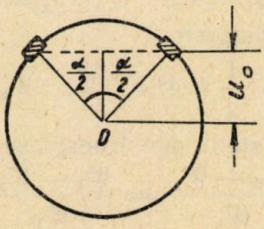


Bild 10

wurden so auf die 4 Scheiben aufmontiert, dass die resultierende harmonische Störkräft vertikal war. Das Gewicht der Erregermaschine, inklusiv Aufhängerohren, beträgt 700 kgf.

3.2. *Bestimmung des Dämpfungsfaktors* ψ.

3.2.1. *Bestimmung von* ψ *mit Hilfe der gedämpften freien Schwingungen.*

Derartige Bestimmungen wurden sowohl mittels der Vibrogramme der freien Schwingungen, wie auch mittels der bei oberen Frequenzen nach plötzlicher Anhalten der Erregermaschine und Registrierung der gedämpften Schwingungen erzielten Vibrogramme durchgeführt.

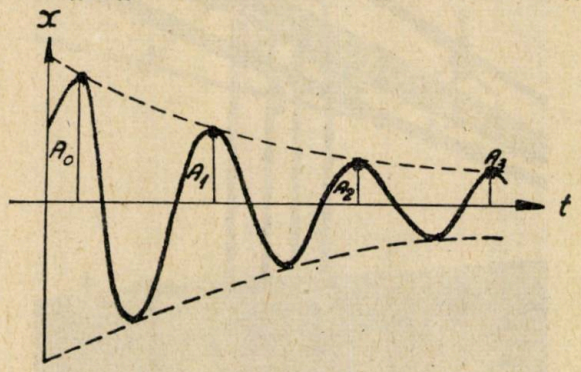


Bild 11

Es wird eine gedämpfte freie Schwingung betrachtet (Bild 11), deren Gleichung

ist. $$y = A\, e^{-\alpha t} \cos \beta\, t$$

Die Gesamtenergie einer harmonischen Schwingung der Amplitude y_{max} kann bekanntlich wie folgt geschrieben werden

$$W = \frac{1}{2}\, k\, y_{max}^2$$

Bei verschiedenen Intervallen, die der Pseudoperiode $T = \frac{2\pi}{\beta}$ der gedämpften Bewegung gleich sind, hat man die Amplituden

$$y_0 = A\,; \quad y_1 = A\, e^{-\alpha \frac{2\pi}{\beta}}\,; \quad y_2 = A\, e^{-\alpha \frac{4\pi}{\beta}}\,; \dots$$

und die entsprechenden Energien

$$W_0 = \frac{1}{2}\, k\, A^2\,; \quad W_1 = \frac{1}{2}\, k\, A^2\, e^{-\alpha \frac{4\pi}{\beta}}\,; \quad W_2 = \frac{1}{2}\, k\, A^2\, e^{-\alpha \frac{8\pi}{\beta}}\,; \dots$$

Der Dämpfungsfaktor stellt den Energieverlust pro Zyklus

$$\psi = \frac{W_0 - W_1}{W_0} = \frac{W_1 - W_2}{W_1} = \dots$$

bzw.

$$\psi = 1 - \frac{W_1}{W_0} = 1 - \frac{W_2}{W_1} = 1 - \frac{W_3}{W_2} = \dots$$

dar.

Zieht man in Betracht, dass die Energien dem Quadrat der Amplituden proportional sind, so nimmt obige Beziehung folgende Form an

$$\psi = 1 - \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = \cdots$$

bzw.

$$1 - \psi = \frac{y_1^2}{y_0^2} = \frac{y_2^2}{y_1^2} = \cdots\cdots = \frac{y_m^2}{y_{m-1}^2}$$

Multipliziert man diese gleichen Verhältnisse, so erhält man

$$(1 - \psi)^m = \left(\frac{y_m}{y_0}\right)^2$$

bzw.

$$\psi = 1 - \left(\frac{y_m}{y_0}\right)^{2/m} \tag{25}$$

Durch Messung von y_0 und y_m (nach m Zyklen) auf dem Vibrogramm, kann ψ berechnet werden.

3.2.2. *Bestimmung von ψ mittels erzwungener Schwingungen*

Während der Betätigung der Erregermaschine hat die Störkraft die Form

$$F = F_0 \cos \omega t$$

und ihre Amplitude ist

$$F_0 = m u_0 \omega^2$$

Mit m wurde die Summe aller exzentrischen Massen auf den vier Scheiben und mit u_0 die Entfernung von der Scheibenachse zum Schwerpunkt der beiden Massen einer Scheibe bezeichnet.

Das Problem ist analog der Berechnung der vom Wind verursachten Störkräfte. Daher kann man das Ergebnis direkt auf Grund des vorangegangenen Studiums schreiben.

Zieht man in Betracht, dass der allgemeine Term der Entwicklung in Fourierreihe der gleichförmig verteilten Last $\frac{4 p_n}{n \pi}$ und der der Entwicklung einer in der Entfernung d von der Auflage angesetzten Einzellast F_0 (Bild 12) $\frac{2 F_0}{l} \sin \frac{n \pi d}{l}$ ist, so ergibt sich, dass diese Werte in den Ausdruck (22) eingesetzt werden müssen, also p_n durch

$$\frac{n \pi F_0}{2 l} \sin \frac{n \pi d}{l}$$

zu ersetzen ist.

Man erhält folglich

$$\eta_n = \frac{1}{\psi} \frac{4\pi F_0}{\mu l \omega_n^2} \sin \frac{n\pi d}{l} = \frac{1}{\psi} \cdot \frac{4\pi m u_0}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \sin \frac{n\pi d}{l}$$

Es wurde μl durch M ersetzt. Wird die Erregermaschine in einem Bauch der harmonischen Schwingung n-ter Ordnung angesetzt, so ergibt sich

$$\sin \frac{n\pi d}{l} = 1$$

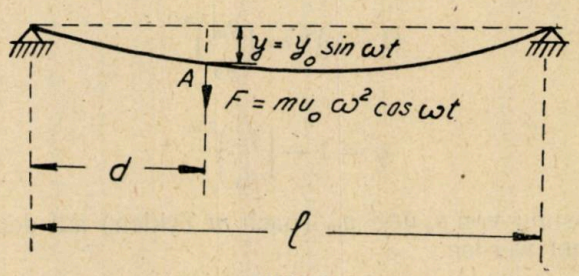


Bild 12

Wird Resonanz herbeigeführt, so ist $\omega = \omega_n$ und folglich

$$\eta_n = \frac{4\pi m u_0}{M \psi}$$

Ersetzt man die Massen durch Gewichte, so findet man den Ausdruck von ψ:

$$\psi = 4\pi \frac{G_v u_0}{G \eta_n} \tag{26}$$

wo G_v das Gewicht der in Rotation befindlichen exzentrischen Teile der Erregermaschine und G das Gewicht der Brücke darstellen. Durch Messung von η_n für verschiedene Schwingungsformen konnten die Werte von ψ berechnet werden.

In Bild 13 sind einige Vibrogramme von erzwungenen Schwingungen einer Brücke für obere Harmonische wiedergegeben.

3.2.3. *Bemerkungen über die ψ — Werte*

Die bisher durchgeführten Untersuchungen haben bei niederen Frequenzen (1—3 Hz) Werte für den Dämpfungsfaktor zwischen $\psi = 0{,}04$ und $\psi = 0{,}06$ ergeben.

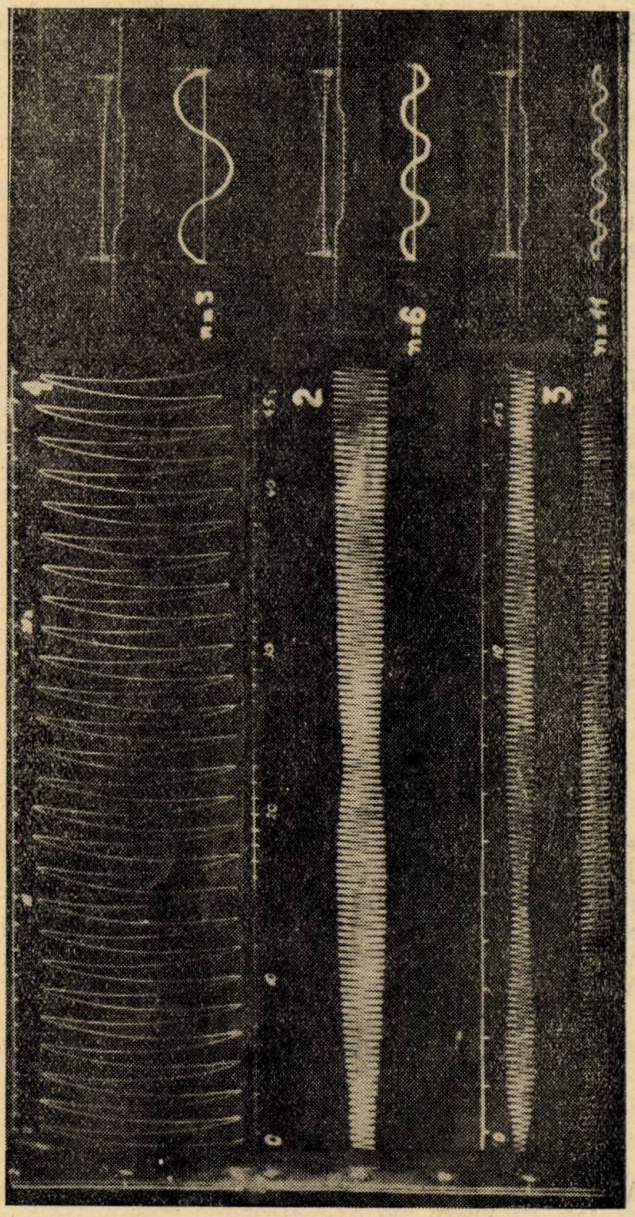


Bild 13

Für höhere Frequenzen (4—10 Hz) erreicht der Dämpfungsfaktor Werte von 0,10–0,20, bestimmt auf Grund der Amplitude der erzwungenen Schwingungen. Es ist zu bemerken, dass die experimentelle Bestimmung von ψ bei höheren Harmonischen ziemlich schwer ist, und zwar infolge der Schwierigkeit, genau die Spitze der Resonanzkurve zu erhalten.

4. *Empfehlungen für das Rechenschema zum Entwurf von Hängebrücken*

Für den Entwurf kann folgendes Rechenschema benutzt werden:

a) Als Funktion der Höchstgeschwindigkeit V_{max} des Windes wird die Höchstfrequenz der Störkräfte

$$f_n = 0{,}22 \frac{V_{max}}{D} \tag{27}$$

bestimmt.

b) Mittels der Formel (12) bestimmt man die Frequenz f_1 der Grundschwingung (für $n=1$). Mit Hilfe der gleichen Formel wird eine Reihe von höheren Harmonischen berechnet und die Ordnung n gefunden, für welche die Eigenfrequenz mit f_n aus Formel (27) gleich ist. Berücksichtigt man, dass die Steifigkeit der Kabel die oberen Harmonischen nicht beeinflusst, so kann dieses n auch durch Lösung der Gleichung erzielt werden, die aus der Gleichsetzung von (27) und (12) hervorgeht

$$\left(0{,}22 \frac{V_{max}}{D}\right)^2 \approx \frac{\Sigma H}{4 \mu l^2} n^2 + \frac{\pi^2 E_g I_g}{4 \mu l^2} n^4 \tag{28}$$

c) Es wird die Amplitude der Störkraft

$$p_1 = \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{D^3}{0{,}22^2} f_1^2 \tag{29}$$

bestimmt, die der Grundharmonischen entspricht.

d) Die Leitung wird mittels Formel (23) und die Kabel mit einer virtuellen statischen Kraft nach Formel (24) überprüft.

e) Die unter d) bestimmten Spannungen werden zu den Spannungen addiert, die von den übrigen Lasten, welche auf die Konstruktion wirken, wie: Eigengewicht, Nutzlast, Schnee, statische Einwirkung des Windes, Erdbeben, Temperaturschwankungen, usw. hervorgerufen werden.

Lehrstuhl für Festigkeitslehre und Lehrstuhl für Mechanik der Technischen Hochschule, Bukarest

LITERATUR:

1. *Z. Hiba:* Winddruck auf Hängebrücken mit schräg liegenden Tragkabeln, Der Stahlbau, 28, Nr. 4/1959.
2. *Franz Masanz:* Die Barbarabrücke über die Donau, Der Stahlbau, 28, Nr. 8/1959.

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДВЕСНЫХ МОСТОВ, ПОДДЕРЖИВАЮЩИХ ГАЗОВЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ РЕКИ

Теоретическое и зкспериментальное исследование содержит следующие задачи:

1. Определение собственных частот. Установлено, что последние зависят (формула 12) от трёх факторов: усилий в кабелях, жёстскости натяжения кабелей и жёстскости изгиба трубопровода и проезжей части. Одни из зтих факторов (особенно первые два) влияют только на низкие гармоники. Установлено, что исследуемые мосты имеют собственные частоты, изменяющиеся через один герц.

2. Определение возмущающих аэродинамических сил (формулы 13—15).

3. Определение амплитуд вынужденных колебаний (формула 21), общих напряжений в трубах, возникающих вследствие вынужденных колебаний (формула 23) и напряжений в кабеле от колебаний (формула 24).

Для зкспериментального исследования были построены две вибрационные машины: одна с эксцентрическими вращающимися массами, другая с шатунно-кривошипным механизмом и пружиной.

При помощи механического вибрографа были проверены вычисленные собственные частоты для низких гармоник, причем возбуждение осуществлялось ударом (внезапное срезание нити). Вибрационными машинами были проверены собственные частоты высших гармоник, осуществляя при этом резонансные эффекты.

Экспериментальное исследование свободных и вынужденных колебаний имело главной целью определить коеффнциент затухания ψ. Который определяется отношением энергии затраченной на трение в цикле к энергии колебательной системы в том же промежутке времени.

Установлено, что для низких гармоник (1 . . . 3 гц) коеффициент затухания имеет значения $\psi = 0{,}04 \ldots 0{,}06$, а для высоких гармоник (4 . . . 10 гц) он возрастает до $\psi = 0{,}10 \ldots 0{,}20$.

На основании этих исследований в параграфе 4 указан способ вычисления колебаний аналогичных конструкций.

DYNAMIC STABILITY OF HANGED BRIDGES SUSTAINING GAS PIPES OVER RIVERS

The Theoretical and experimental study involves the following problems:

1. Determination of natural frequencies. It was established that these frequencies depend on three factors (formula 12): stresses in

cables, tensile rigidity of cables and bending rigidity of the pipe and track. Some of these factors (particularly the first two) influence the low harmonics only. It was found that the examined bridges have natural frequencies varying from 1 to 1 Hz.

2. Determination of disturbing aerodynamic forces (formulae 13—15).

3. Determination of the amplitude of forced vibrations (formula 22), determination of the stresses in the pipe due to forced vibrations (formula 23) and determination of the stresses in cables due to vibrations (formula 24).

For the experimental study two vibrating machines have been constructed, one with excentric weights, the other with a slidencrank mechanism and spring.

The calculated natural frequencies have been verified for the low harmonics with the aid of a mechanical vibrograph, the excitation being made by shocks (sudden cutting of a wire). With the aid of these vibrating machines, the natural frequencies of high harmonics have been verified, obtaining thereby resonance effects.

The experimental study of forced and free vibrations aimed mainly at determining the damping factor ψ, defined as the ratio of the energy consumed per cycle to the whole oscillating system within the same time interval.

It was found that for low harmonics (1 ... 3 Hz), the damping factor assumes values $\psi = 0{,}04 \ldots 0{,}06$, and increses to $\psi = 0{,}10 \ldots 0{,}20$ for high harmonics (4 ... 10 Hz).

On the basis of these investigations, paragraph 4 includes recommandations for the vibration calculus of similar constructions.

LA STABILITÉ DYNAMIQUE DES PONTS SUSPENDUS QUI SOUTIENNENT LES CONDUITES DE GAZ AU PASSAGE PAR DESSUS LES RIVIÈRES

L'étude théorique et expérimentale comprend les problèmes suivants :

1. La détermination des frequences propres. On a établi que celles-ci dépendent (formule 12) de trois facteurs : les efforts dans les cables, la rigidité des cables et la rigidité de flexion de la conduite et du chemin de roulage. Certains de ces facteurs (en particulier les deux premiers) influencent seulement les harmoniques inférieures. On a trouvé que les ponts étudiés ont des fréquences propres variant de 1 en 1 Hz.

2. La détermination des forces aérodynamiques perturbatrices (formules 13—15).

3. La détermination des amplitudes des vibrations forcées (formule 22) des contraintes dans la conduite, dues aux vibrations forcées (formule 23) et aux efforts dans le cable, dus aux vibrations (formule 24).

Pour l'étude expérimentale, on a construit deux machines vibratoires, l'une à masses rotatives excentriques, l'autre à mécanisme bielle-manivelle et arc.

A l'aide d'un vibrographe mécanique, on a vérifié les fréquences propres calculées pour les harmoniques basses, l'excitation se produisant par choc (coupure brusque d'un fil). Avec les machines vibratoires on a vérifié les fréquences propres des harmoniques supérieures, en réalisant des effets de résonance.

L'étude expérimentale des vibrations libres et forcées a eu comme but principal la détermination du facteur d'amortissement ψ défini comme étant le rapport entre l'énergie consommée par frottement dans un cycle et l'énergie du système oscillant entier pendant la même durée. On en déduit que pour les harmoniques basses (1 ... 3 Hz) le facteur d'amortissement a les valeur $\psi = 0{,}04 \ldots 0{,}06$, et que pour les harmoniques supérieures il augmente jusqu'a $\psi = 0{,}10 \ldots 0{,}20$.

A la suite de cette étude, au paragraphe 4 on donne des recommandations concernant le mode de calcul de certaines constructions similaires, soumises aux vibrations.

DYNAMISCHE STABILITÄT DER HÄNGEBRÜCKEN ZUR ÜBERFÜHRUNG VON GASROHRLEITUNGEN ÜBER FLÜSSE.

Dieses Studium behandelt die dynamische oder aeroelastische Stabilität von Hängebrücken zur Überführung von Gasrohrleitungen über Flüsse.

Die Untersuchung umfasst folgende Fragen:

1. Bestimmung der Eigenfrequenzen.

Es wurde festgestellt, dass die Eigenfrequenzen von der Zugkraft in Seilen, von der Dehnungssteifigkeit der Seile und von der Biegesteifigkeit des Rohres abhängt. Einige dieser Faktoren beeinflussen nur die unteren Harmonischen. Es wurde festgestellt, dass das schwingende System Eigenfrepuenzen von rund 1, 2, 3, 4 usw. Hz besitzt.

2. Bestimmung der vertikalen periodischen Erregerkräfte auf Grund der bekannten aerodynamischen Gleichungen.

3. Die Berechnung der Amplituden der erzwungenen Schwingungen. Zu diesem Zweck, wurden zwei Erregermaschinen entworfen, eine für höhere Harmonische, mit Fliehkrafterregung, die andere für niedrige Harmonische, mit Kurbel — und Federerregung.

4. Bestimmung des Dämpfungsfaktors ψ definiert durch die Formel

$$\psi = L_2/W$$

wo

L_2 — die mechanische Arbeit der Reibungskräfte und
W — die mechanische Energie des Schwingsystems darstellen.

Der Dämpfungsfaktor wurde sowohl auf Grund der Dämpfung der Eigenschwingungen als auch auf Grund des Wertes der Amplituden der erzwungenen Schwingungen bestimmt. Für niedrige Harmonische (1—3 Hz) ergaben sich die Werte $\psi = 0{,}04—0{,}06$ und für höhere Harmonische (4—10 Hz), $\psi = 0{,}10—0{,}20$.

Die Schwingungen wurden mit einem mechanischen Vibrographen in Einzelpunkten gemessen.

Auf Grund dieser Ergebnisse wurden Berechnungsgrundlagen für derartige Hängebrücken aufgestellt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

TERMOTEHNICA

MÉTHODE GRAPHO-ANALYTIQUE POUR ÉTABLIR L'EFFICACITÉ DES DIVERSES RÉPARTITIONS DES SURFACES DE CHAUFFE PAR CONVECTION DES CHAUDIÈRES À VAPEUR *)

par MIRCEA POSTELNICESCU et PETRE VEZEANU

1. *Introduction*

Une chaudière à vapeur considérée du point de vue thermique est formée d'une série d'échangeurs de chaleur, les uns constituant le système de chauffe et de vaporisation de l'eau, les autres du surchauffage de la vapeur et finalement d'autres pour le réchauffage de l'air de combustion — disposés dans un ordre qui diffère selon le type de chaudière.

La construction d'une chaudière à vapeur dont le prix de revient soit aussi bas que possible, exige, entre autres, le minimum de métal employé pour les surfaces d'échange de chaleur.

Considéré de ce point de vue, en élaborant le projet d'une chaudière à vapeur, la répartition des quantités de chaleur qui doivent être transmises aux diverses surfaces (faisceau bouilleur, étages du surchauffeur de vapeur, étages du réchauffeur d'air et économiseur), ainsi que leur ordonnance le long du tracé des gaz de combustion, représentent un problème difficile, surtout lorsqu'il s'agit des chaudières à vapeur modernes, à haute température de surchauffage — éventuellement avec surchauffage intermédiaire — avec forte température de réchauffage de l'air de combustion.

Dans la suite est présentée une méthode qui résout ce problème, en général.

2. *Le principe de la méthode*

Vu que la pression des gaz de combustion le long des canaux d'écoulement de la chaudière peut être considérée constante et vu que l'échange de la chaleur dans une évolution isobare est donné par la variation de l'entalpie, il en résulte que pour transmettre une quantité de chaleur dQ par un élément de surface dS, nous aurons :

$$dQ = dI \qquad (2—1)$$

*) Comunication presentée à la VI-ème session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest (17—18 dec. 1960).

I étant l'entalpie des gaz de combustion, en $\frac{kcal}{h}$.

D'autre part :

$$dQ = k \cdot \Delta t \cdot dS \qquad (2—2)$$

formule dans laquelle :

k est le coefficient total de transmission de la chaleur, en $\frac{kcal}{m^2 \cdot h \cdot {}^0C}$;

Δt — la différence entre la température des gaz de combustion t et la température du fluide chauffé t_a (eau, vapeur ou air), en °C.

De (2—1) et (2—2) il résulte :

$$S = \int_{I_i}^{I_f} \frac{dI}{k \cdot \Delta t} \quad m^2 \qquad (2-3)$$

I_i et I_f étant les entalpies des gaz de combustion à l'entrée et à la sortie de cette surface.

En connaissant le mode de variation de k en fonction de la température des gaz de combustion, c'est à dire $k = f(t)$, on peut calculer l'expression :

$$\frac{1}{k \cdot \Delta t}$$

laquelle représentée par rapport de l'entalpie des gaz permet de déterminer par voie graphique la surface S (fig. 1).

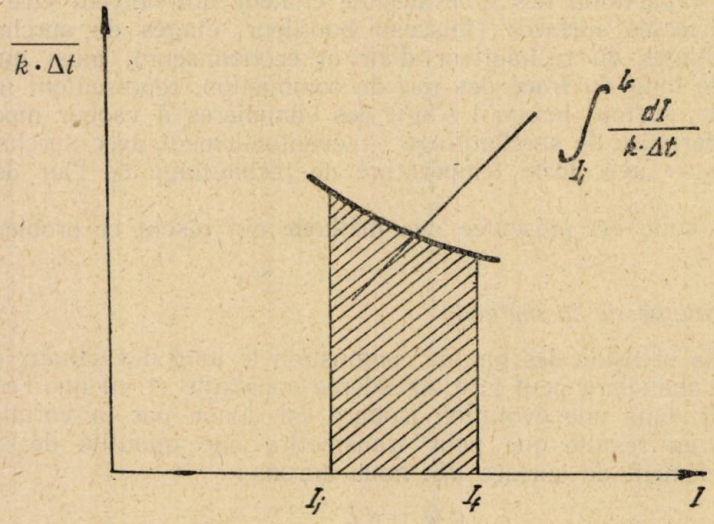


Fig. 1. — La courbe $\frac{1}{k\ \Delta t}$ en fonction de I pour un échangeur de chaleur

En effet l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées des valeurs I_i et I_f, représente — compte tenu des échelles — la surface même de l'échangeur de chaleur respectif.

Dans le parcours des gaz de combustion se trouve placée une série d'échangeurs de chaleur par convection.

La surface totale de chauffe S_t de ces échangeurs, c'est à dire la surface d'échange de chaleur de l'agregat de la chaudière, moins les surfaces de radiation du foyer, sera :

$$S_t = \Sigma \int_{I_i}^{I_f} \frac{dI}{k \cdot \Delta t} \qquad (2—4)$$

De la relation (2—4) l'on peut facilement aboutir à déduire le prix des surfaces d'échange de chaleur C, avec l'aide des indices :

i_1 kg métal/m² surface de chauffe ;

i_2 lei/kg métal

c'est à dire :

$$C = \sum i_1 \cdot i_2 \int \frac{dt}{k \cdot \Delta t} \qquad (2—5)$$

3. *Application de la méthode*

Le calcul thermique d'un agrégat de chaudière réclame la construction du diagramme $I = f(t)$.

Afin de poursuivre le but proposé, le diagramme $I = f(t)$ sera complété de la manière suivante (fig. 2), en considérant par exemple, le cas d'une chaudière à vapeur dans laquelle après le foyer se trouve le faisceau bouilleur, le surchauffeur, l'économiseur et le réchauffeur d'air, toutes ces surfaces d'échange de chaleur étant réalisées en un seul étage.

On trace en premier lieu la variation de la température du fluide qui est chauffé. Ainsi, par exemple, pour le système bouilleur de convection placé entre les températures des gaz t_F et t_1, la température de saturation de l'eau étant marquée part t_s, l'évolution est représentée par le segment *AB*. De la même manière, tenant compte du sens de l'écoulement de gaz de combustion et du fluide qui est chauffé, la variation de la température de la vapeur surchauffée a été représentée par le segment *CD*, celle de l'eau dans l'économiseur par *EF* et celle de l'air dans le réchauffeur par *GH*.

Les variations respectives pour le surchauffeur, l'économiseur et le réchauffeur d'air ont été considérées linéaires, utilisant les chaleurs spécifiques moyennes sur les intervalles respectifs.

Du diagramme ainsi complété on peut déduire immédiatement la valeur du $\triangle t$, pour toute valeur de l'entalpie. Par exemple, pour le faisceau bouilleur, pour I_F, Δt est rendu par le segment *AM*, pour I_1 par *BN* ainsi de suite.

On trace en suite les familles des courbes $k=f(t)$ pour les surfaces de chauffe de la chaudière. Pour faciliter, l'axe de température est commune avec celle du diagramme $I=f(t)$.

Il en résulte pour toute surface les valeurs I, k et $\triangle$t, au moyen desquelles on construit les courbes $\frac{1}{k \cdot \Delta t}=f(I)$. Ces courbes peuvent être

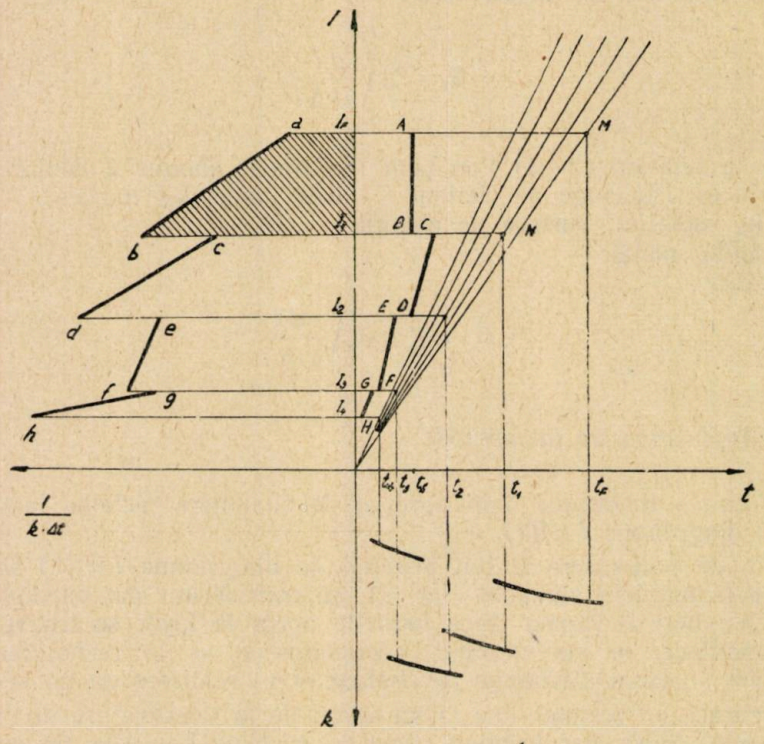


Fig. 2. — Les diagrames $I=f(t)$, $k=f(t)$ et $\frac{1}{k \cdot \Delta t}=f(I)$ pour l'ensamble des échangeurs de chaleur par convection d'une chaudière à vapeur

construites avec l'axe I commune avec celle du diagramme $I=f(t)$, ce qui offre l'avantage que les différents niveaux d'entalpie qui marquent l'entrée et la sortie dans les divers échangeurs de chaleur, sont déjà tracés sur le diagramme. Dans le cas de l'exemple choisi les courbes respectives pour le faisceau bouilleur de convection, le surchauffeur, l'économiseur et le réchauffeur d'air ont été marqué par *ab, cd, ef,* et *gh.*

On détermine en suite les surfaces au dessous de ces courbes. En tenant compte des échelles de proportions et calculant leurs sommes multipliées avec les indices i_1, i_2, on arrive au prix de revient des surfaces du changement de chaleur.

Par un procèdé similaire pour une autre variante constructive, on obtient le prix de revient des surface totales pour le nouveau cas.

On peut ainsi apprécier grâce à un calcul trés simple, le degré d'économie d'une solution.

4. *La variation du coefficient total de transmission de la chaleur fonction de la température des gaz de combustion*

Ă l'élaboration du projet d'une chaudière à vapeur, le calcul des surfaces de convection, pour la construction d'un certain type de chaudière, doit être fait dans plusieures hypothèses, en comparant les résultats en suite, afin de choisir la meilleure solution du point de vue technique et économique.

La détermination de la grandeur des surfaces d'échange de chaleur par convection au moyen de la méthode préconisée exige pour chaque cas l'établissement du coeficient total de transmission de la chaleur k.

Le coefficient k dépend des éléments qui déterminent les dimensions de la surface qui doit être calculée, ainsi que de la température des gaz de combustion.

La détermination exacte des dimensions des surfaces d'échange de chaleur exigerait, pour chaque cas, un calcul de k par approximations successives, ce qui évidemment reclamerait de nombreuses opérations. Si l'on ajoute à cela que les surfaces doivent être calculées en plusieurs situations afin d'arriver à déterminer la meilleure solution, cette méthode serait extrêmement compliquée.

Nous observerons en suite que les principales possibilités de variation d'une surface de chauffe formée d'un faisceau de tubes lavés à l'éxterieur par les gaz de combustion sous un angle différent de 0°, sont — en maintenant le type de construction et le gabarit de la chaudière — :

— la variation de la section d'écoulement des gaz de combustion et

— la variation du nombre de rangées de tubes dans la direction de l'écoulement du courant des gaz de combustion, les autres éléments constructifs du faisceau demeurant constants dans les deux cas.

Dans le cas de l'écoulement de gaz de combustion le long des tubes d'un faisceau, ces possibilités sont les suivantes :

— variation de la section d'écoulement des gaz de combustion et

— variation de la longueur des tubes.

En ces conditions, concernant les formules de calcul du coefficient total de transmission de la chaleur k, données dans l'ouvrage [1], on constate que pour le cas où le courant des gaz de combustion fait un angle différent de 0° avec la direction des tubes du faisceau, le coefficient k est en fonction de :

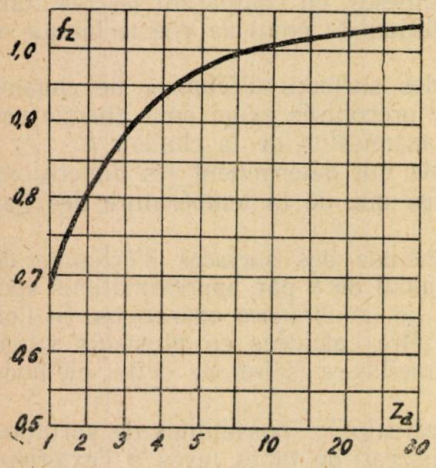
— la température moyenne des gaz de combustion lors de leur passage par le faisceau ;

— la vitesse des gaz de combustion à 0°C et 760 mm Hg, dans la section la plus étroite ;

— le coefficient f_z qui tient compte du numero z_a des rangées de tubes dans la profondeur du faisceau et qui pour $z_a = 10$ est égale avec 1, et pour d'autres valeurs est d'après les diagrammes de la figure 3 et 4.

Ces diagrammes permettent d'observer qu'au-delà de 4—5 rangées de tubes z_a le coefficient f_z varie très peu, si bien que, pour un calcul thermique préliminaire on peut pratiquement prendre $f_z = 1$ et admettant la même section d'écoulement des gaz de combustion pour les diverses possibilités d'emplacement de la surface de chauffe, k résulte seulement en fonction de la température des gaz de combustion.

Pour le cas de l'écoulement des gaz de combustion le long de tubes du faisceau, on constate des formules données dans l'ouvrage [1], que



Ftg. 3. — Le valeur du coefficient f_z en fonction de z_a dans la disposition alternée des tubes du faisceau

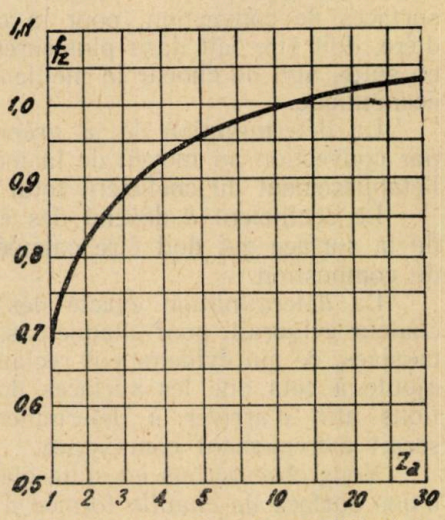


Fig. 4. — Le valour du coefficient f_z en fonction de z_a dans la disposition en colonne des tubes du faisceau

pour une section constante d'écoulement de gaz de combustion, k est en fonction seulement de la température des gaz de combustion.

En conclusion, on peut construire dans les conditions mentionnées, les courbes $k=f(t)$ pour toutes les surfaces de chauffe, ce qui permet de compléter le diagramme de la figure 2.

5. *Application : Etablissement de la meilleure température de réchauffage de l'air de combustion, du point de vue de la consommation du métal*

La température de l'air de combustion introduite dans le foyer d'une chaudière à vapeur constitue pour celui qui élabore le projet un problème qui, aujourd'hui, se résout le plus souvent par analogie avec d'autres constructions existantes, en fonction du combustible utilisé et du mode de combustion.

Le niveau du réchauffage a une influence aussi sur le poids de métal employé pour la construction des surfaces de chauffe et partant sur le prix de l'agrégat.

Sans tenir compte de l'influence de la température de l'air nécessaire à la combustion sur le processus de combustion du combustible, il est prouvé, du point de vue de la consommation de métal, c'est à dire du prix, l'existence d'une température optima de réchauffage de l'air de combustion, pour une température d'évacuation bien établie des gaz de combustion de l'agrégat.

En utilisant la méthode grapho-analytique exposée dans cet ouvrage on établira la température optima de réchauffage de l'air de combustion, pour une chaudière à vapeur construite selon l'esquisse de la figure 5, avec un débit normal de 16 t/h, la température de la vapeur surchauffée et sa pression nominale de 450°C, respectif 40 kgf/cm², dans le cas du fonctionnement au mazout.

Pour le cas proposé se maintiennent constantes conformement aux valeurs du projet de la chaudière, la température d'evacuation des gaz de combustion de l'agrègat, la température des gaz de combustion à l'issue du foyer, la température de la vapeur surchauffée entre les étages du surchauffeur de vapeur, les températures d'entrée et de sortie de l'économiseur, ainsi que la température de l'air de combustion qui est introduite dans le réchauffeur d'air.

On maintient également la disposition des tubes du faisceau bouilleur primaire réalisé à l'aide des tubes de l'écran postérieur de la chaudière.

Dans ces conditions, alors que la température de réchauffage de l'air de combustion augmente, les surfaces des divers échangeurs de chaleur varient de la manière suivante : la surface des écrans augmente, celle du faisceau bouilleur primaire et du second étage du surchauffeur de vapeur demeurent constantes, celle du faisceau bouilleur secondaire, du premier étage du surchauffeur de vapeur et de l'économiseur baissent, celle du réchauffeur d'air augmente.

En utilisant la méthode exposée dans cet ouvrage on a déterminé les dimensions de ces surfaces pour les températures de réchauffage de l'air de combustion de 0 ; 50 ; 100 ; 185 (conformément au projet de la chaudière) et 255°C.

On a tracé dans la figure 5, pour servir d'exemple, les diagrammes $I = f(t)$, $k = f(t)$ et $\frac{1}{k \cdot \Delta t} = f(I)$, construits pour le régime de temperatures sur lequel est basé le calcul de la chaudière :

La température des gaz de combustion à l'issue du foyer	1014°C
Idem, à la sortie du système bouilleur primaire de convection	981°C
Idem, à la sortie du second étage du surchauffeur de vapeur	862°C
Idem, à la sortie du système bouilleur secondaire de convection	780°C
Idem, à la sortie du premier étage du surchauffeur de vapeur	513°C
Idem, à la sortie de l'économiseur	291°C
Idem, à la sortie du réchauffeur d'air	160°C
La température de réchauffage de l'air de combustion . .	185°C
La température de l'eau d'alimentation	100°C
La température de l'eau à la sortie de l'économiseur . .	180°C
La température de la vapeur à la sortie du premièr étage du surchauffeur de vapeur	385°C

Afin de simplifier, les courbes $\frac{1}{k \cdot \Delta t} = f(I)$ ont été considérées des droites.

En réalisant le diagramme $\frac{1}{k \cdot \Delta t} = f(I)$ on a choisi les échelles suivantes :

— Pour les entalpies :

$$1 \text{ mm} \rightarrow 40 \text{ kcal/kg}$$

Vu que la consummation de combustible de la chaudière este 1357 kg/h, il résulte :

$$1 \text{ mm} \rightarrow 40 \times 1357 = 54{,}28 \times 10^3 \text{ kcal/h}$$

— Pour l'expression $\frac{1}{k \cdot \Delta t}$:

$$1 \text{ mm} \rightarrow 5 \times 10^{-7} \frac{m^2 \cdot h}{kcal}$$

Donc, l'échelle pour les surfaces du diagramme est :

$$1 \text{ mm}^2 \rightarrow 2{,}714 \times 10^{-2} \ m^2$$

Dans le tableau 1 sont inscrits les résultats des déterminations, pour les températures de réchauffage de l'air de combustion mentionnées, avec l'observation que les poids ont été calculés considérant que les tubes utilisés, dans la construction analysée, sont :

— pour le système bouilleur . . . . . 83 × 4
— pour le surchauffer de vapeur et l'économiseur . . . . 38 × 3
— pour le réchauffeur d'air . . . . . 57 × 3

Les résultats obtenus sont rendus en suite dans les diagrammes de la figure 6 et 7. Dans la figure 7 est tracé — en tenant compte des indices i_2 lei/kg métal — et la courbe C, représentant la variation procentuelle du prix de revient total des surfaces des échangeurs de chaleur, de la chaudière, en fonction de la température de réchauffage de l'air de combustion.

Faisant abstraction de tout autre considérent d'ordre constructif, on aboutit à la conclusion, que la température optima de réchauffage de l'air de combustion est d'environ 70°C, dont le prix de revient total C est approximativement 76% par rapport à 100% pour la température de 185°C, température pour laquelle a été construite la chaudière.

Ainsi qu'il en résulte du même diagramme, la construction sans réchauffeur d'air aurait été avantageuse par rapport à la solution choisie par celui qui a élaboré le projet (la température de l'eau d'alimentation à l'entrée dans l'économiseur étant de 100°C, les gaz de combustion peuvent être refroidis jusqu'à la température de 160°C avec laquelle ils sont évacués de la chaudière, même s'il n'y avait pas de réchauffeur d'air).

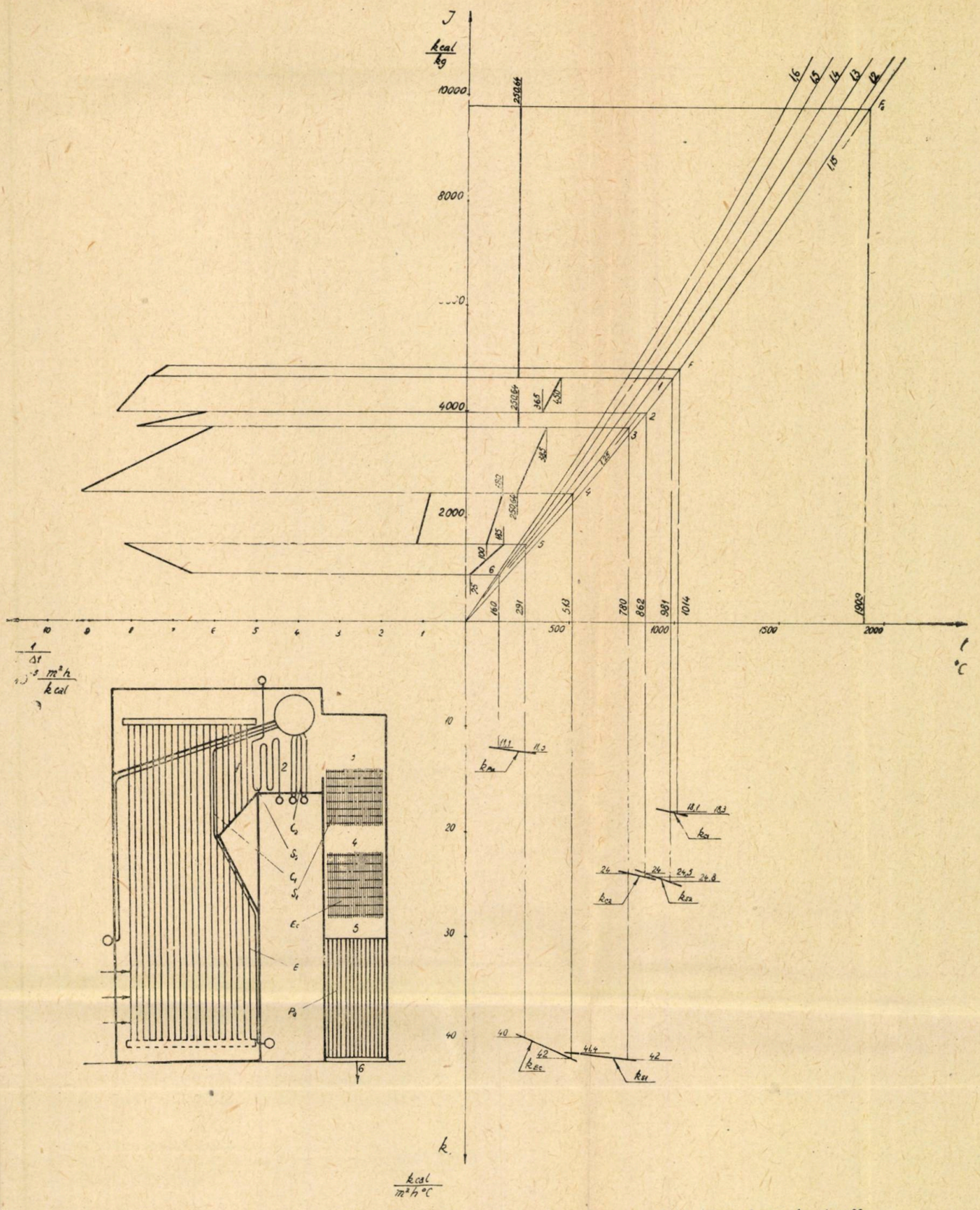


Fig. 5. — L'esquisse de la chaudière et les diagrammes nécessaires au calcul des surfaces de chauffe, dans les conditions d'élaboration du projet

Observations : 1. Pour le réchauffeur d'air et l'économiseur l'échelle de l'axe $\frac{1}{k \cdot \Delta t}$ a été 10 fois reduite

2. La figura a été reduite en rapport $^1/_{2.5}$.

Légende : *E* — écrans; C_1 — faisceau bouilleur primaire; C_2 — faisceau bouilleur secondaire; S_1 — premier étage du surchauffeur; S_2 — second étage du surchauffeur; *Ec* — écenomiseur; *Pa* — réchauffeur d'air.

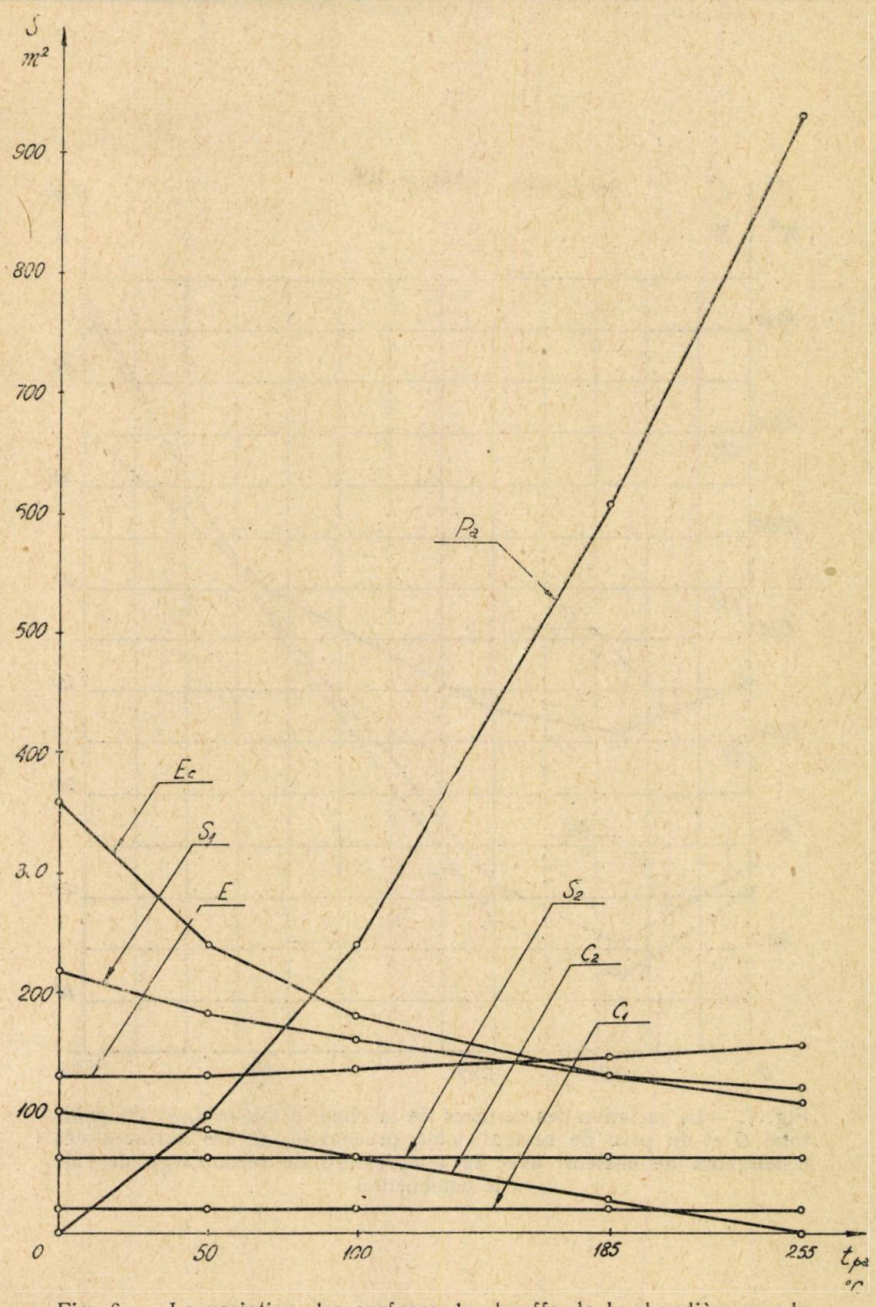


Fig. 6. — La variation des surfaces de chauffe de la chaudière avec la température de réchauffage de l'air de combustion

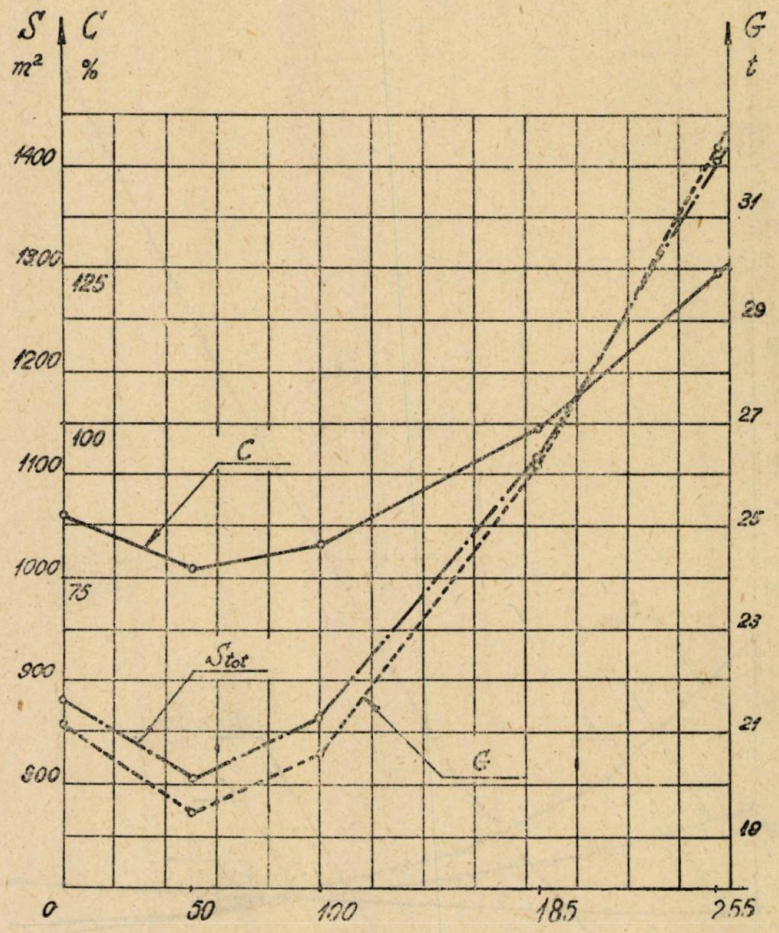


Fig. 7. — La variation des surfaces de la chauffe totale S_{tot}, du poids total G et du prix de revient total, procentuel, C des surfaces des échangeurs de chaleur avec la température de réchauffage de l'air de combustion

Tableau 1

Numero courant	Température de réchauffage de l'air de combustion °C		Type de l'échangeur de chaleur							Total
			E	C_1	S_2	C_2	S_1	Ec	Pa	
1	0	Surface m^2	129,8	14,9	62	97,1	219	359	—	881,8
		Poids kg	3862	444	1349	2900	4775	7820	—	21150
2	50	Surface m^2	132	14,9	62	84,6	185,5	240	87	806
		Poids kg	3930	444	1349	2520	4045	5240	1940	19468
3	100	Surface m^2	138	14,9	62	61,5	158,6	190	239	864
		Poids kg	4115	444	1349	1833	3455	4135	5335	20666
4	185	Surface m^2	147,5	14,9	62	25	129,8	130	606	1115,2
		Poids kg	4938	444	1349	746	2820	2825	13520	26202
5	255	Surface m^2	154,9	14,9	62	—	123,4	109,2	936	1400,4
		Poids kg	4610	444	1319	—	2685	2380	20850	32318

6. *Conclusions*

La méthode exposée permet d'apprécier l'efficacité des différents modes de répartition des quantités de chaleur qui doivent être transmises aux différentes surfaces d'échange de chaleur par convection des chaudières à vapeur, ainsi que l'ordonnance de ces surfaces le long du tracé des gaz de combustion, en particulier la disposition alternée du réchauffeur d'air et de l'économiseur, du système bouilleur de convection et des étages du surchauffeur de vapeur. La méthode permet également d'apprécier l'éfficacité du changement de la température de réchauffage de l'air de combustion, de la température des gaz à la cheminée etc.

La chaire de chaudières à vapeur et machines thermiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Postelnicescu Mircea* — Metodă de calcul direct al suprafețelor de convecție ale cazanelor de abur cu țevi de apă ; București, Revista Metalurgia și Construcția de mașini, nr. 12, 1960.

ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПАРОВЫХ КОТЛОВ

(Краткое содержание)

В работе дается грачо-аналитичечкий метод для определения эффективности различных распределений теплопередающих поверхностей в паровых котлах, а также для установки их в газоцроводящих каналах.

Приложение метода иллюстрируется на примере, устанавливая наивыгоднеишую температуру подогрева воздуха с точки зрения расхода метталла.

GRAPHO - ANALYTICAL METHOD SERVING TO ESTABLISH THE EFFICIENCY OF THE VARIOUS DISTRIBUTIONS OF THE HEATING SURFACES BY CONVECTION IN STEAM BOILERS

(Summary)

The work presents a general grapho-analytic method of appreciation of the different ways of distributing the quantities of heat to be transmitted to the various surfaces of heat exchange by convection in steam boilers and their arrangement along the way of combustion gaz.

Follows the illustration of the method applied in a concrete case, establishing the best temperature of air preheating, concering the metal used.

METHODE GRAPHO - ANALYTIQUE POUR ÉTABLIR L'EFFICACITÉ DES DIVERSES RÉPARTITIONS DES SURFACES DE CHAUFFE PAR CONVECTION AUX CHAUDIÈRES À VAPEUR

(Résumé)

L'ouvrage présente une méthode générale grapho-analytique servant à apprécier l'efficacité des divers modes de répartition des quantités de chaleur qui doivent être transmises aux diverses surfaces d'échange de

chaleur par convection aux chaudières à vapeur, ainsi que leur disposition le long du tracé des gaz de combustion.

La méthode est exemplifiée en suite, par un cas concret qui établit la température optima de réchauffage de l'air de combustion considérée du point de vue de la consommation de métal.

GRAPHO - ANALYTISCHE METHODE ZWECKS FESTSTELLUNG DER EFFIKAZITÄT VERSCHIEDENER VERTEILUNGEN DER ERWÄRUMGSFLÄCHEN IN DAMPFKESSELN

(Zusammenfassung)

In der Arbeit wird eine allgemein grapho-analytische Methode zur Feststellung der Effikazität verschiedener Verteilungen der wärmeübertragenden Flächer in Dampfkesseln, sowie ihrer Aufstellung in Gazkanalen dargedillt.

Die Anwendung der Methode ist an einen Beispiel illustriert, der die optimal Luftvorwärmungtemperatur, von Standpunkte der Materialaufwandes gibt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

MECANICA

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

А. И. СОЛОВЬЕВ

Как показали теоретические исследования автора плоский шарнирный параллелограмм лежит в основе многих конструктивно и функционально различных измерительных механизмов.

На рис. 1 представлена кинематическая схема параллелограммного механизма [1], который по мнению автора, может быть использован в качестве датчика площади поперечного сечения (S) прямоугольного или треугольного стрежня в процессе механической обработки или протяжки.

Перемещение (Z) мерительного штока 7 индикатора равно:

$$Z = \frac{1}{a} xy, \tag{1}$$

где

a — геометрическая константа механизма,

x, y — премещения мерительных наконечников штанг 4 и 5 при повороте звена 1 вокруг оси O.

Шкалу иидикатора целесообразно тарировать непосредственно в единицах площади S.

Более выраженными измерительными возможностями овладает параллелограммный датчик внутреннего или наружного диаметра (D) цилиндра (рис. 2), обрабатываемого на станке. Б основу датчика положен шарнирный параллелограмм, у которого функции звена $2'$ выполняет обрабатываемое изделие 4.

Перемещение (Z) штока индикатора 5 связано с глубиной обработки изделия (Δ) выражением тождественным, формуле (1):

$$Z = \frac{1}{a} \Delta x, \tag{2}$$

где

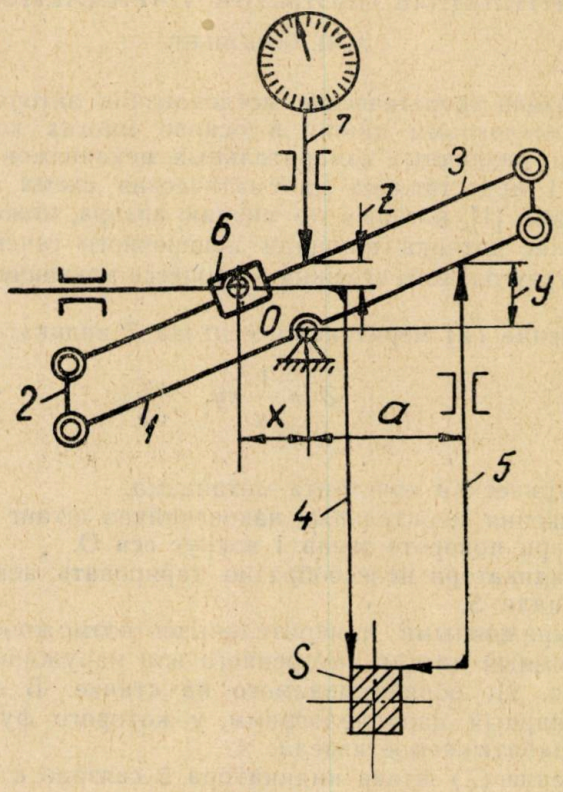
a — геометрическая константа механизма;

x — смещение штока индикатора относительно нулевого (0) безразличного положения, совпадающего с началом O координат Oxy (рис. 2а).

Отличительной особенностью датчика (рис. 2) является его свойство программировать требуемую в конце обработки величину диаметра D.

Датчику с помощью эталонной скобы (рис. 2б) — при внутренней обработке — или штихмасса (рис. 2в) — при наружной обработке — задается желаемый конечный размер изделия D.

Одновременно с заданием размера D шкала индикатора устанавливаемая на нуль. При вводе мерительных контактов (K) в необработанный цилиндр стрелка индикатора „уйдет" с нуля и, по мере



Фиг. 1

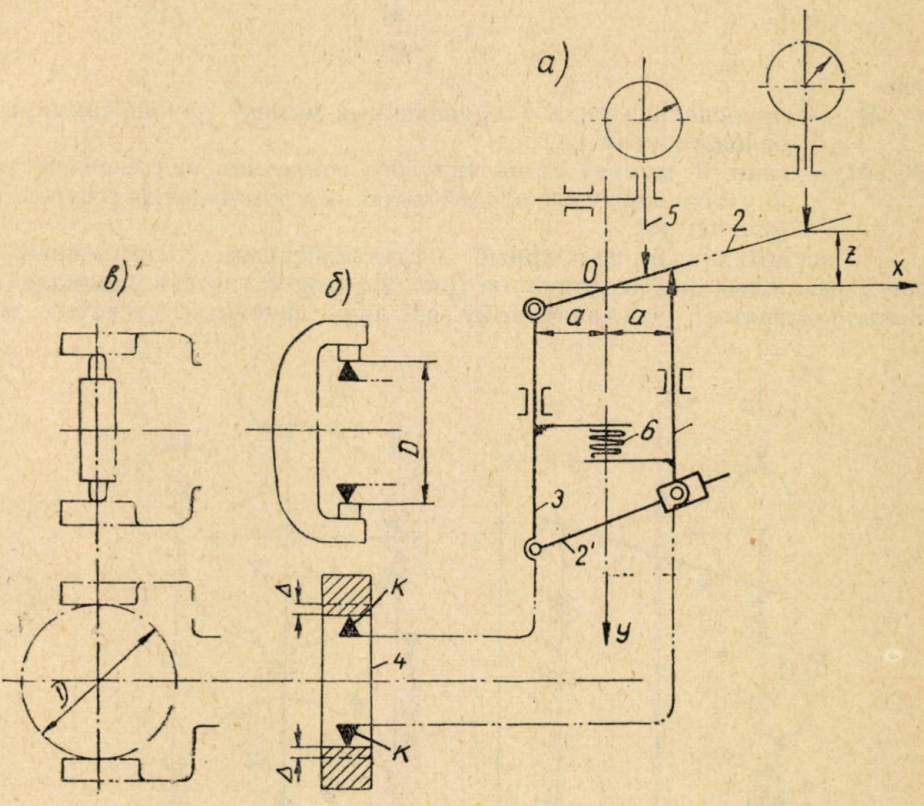
обработки, будет приближаться к нему. Если нулевую отметку шкалы снабдить контактом, включенным, как и стрелка, в электрическую схему управления приводом станка, то в нулевом положении стрелки произойдет автоматическое прекращение обработки цилиндра диаметр, которого D к данному моменту дотигнет конечного значения; т. е. программа обработки будет выполнена.

Силовое замыкание в параллелограммных датчиках можно осуществить с помощью пружин, как это показано на рис. 2, позиция 6.

Таким образом, шарнирный параллелограмм с кинематической формулой (1) и тождественной ей — (2) является базисным механизмом некоторых датчиков систем активного измерения в машиностроении.

Одноко, измерительные свойства параллелограмма этим не исчерпываются.

Составим шарнирный параллелограмм из двух рычажных дифференциальных механизмов со звеньями: 1, 2, 3, 4, H, как это показано на рис. 3а, вмонтировав в стыке одноименных звеньев (например,



Фиг. 2

3-3') индикатор, через который с помощью винта создадим нагружение замкнутого контура. О величине нагружения можно судить по показанию индикатора или гальванометра, включенною в схему балансного моста, два плеча которого представляют собою проволочные электротензодатчики, накленные иа кронштейн, закрепленный на звене, воспринимающем осевое усилие винта [3].

Если теперь к одному нз звеньев, например, к звену 2 приложить внешнюю силу P (ичи внешний момент M) то, совершенно очевидно, что опа будет расходоваться лишь на предоление сил трения в кинематические парах системы, нагруженной силами упругости звеньев. Величину этой силы или момента можно контролировать теми же средствами, что и снлы нагружения.

Коэффициент полезного действия η такого замкнутого силового контура равен

$$\eta = 1 - \frac{P}{P_u}; \qquad (3)$$

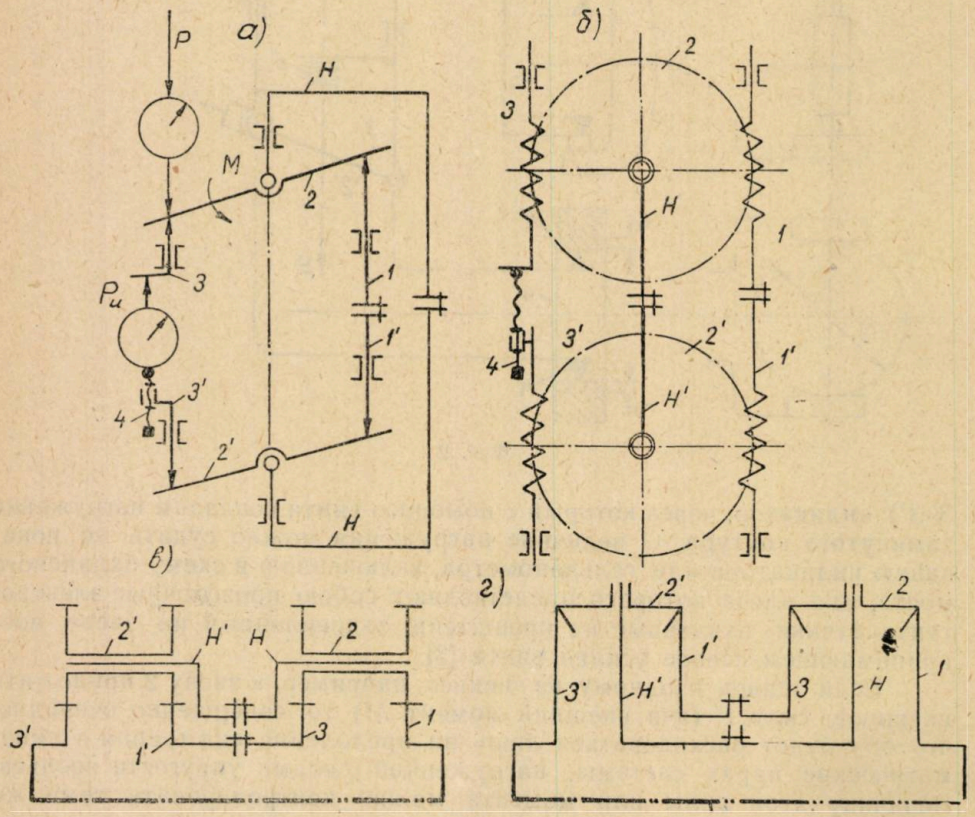
$$\eta = 1 - \frac{M}{M_z},$$

где

P, M — приведенная сила и приведенный момент трения замкнутого силового контура:

P_u, M_z — сила и момент силы упругого сопротивления звеньев замкнутого контура воздействию нагружающего устройства (рис. 3) [4].

Рассмотренный шарнирный параллелограмм, составленный из двух рычажных дифференциалов (рис. 3а) кинематически эквивалентен параллелограмму, составленному из двух линейных зубчатых диф-



Фиг. 3

ференциалов (рис. 3б), каждый из которых легко потом преобразовать в цилиндрический или конический дпфференциал [3] (рис. 3в, г).

Становится очевидным, что замкнутые силовые контуры составленные из двух дифференциальных механизмов представляют собою измерительные устройства также, базирующиеся на схеме параллелограмма, но предназначенные для непосредственного измерения приведенной силы или момента трения в плоских (рис. 3б, в) или конических (рис. 3г) дифференциалах [6].

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

1. В статье показаны измерительные свойства параллелограмма и описаны базирующиеся на нем различные измерительные системы.

2. Материалы статьи расширяют представление о структурно-кинематическом единстве конструктивно и функционально различных механизмов измерительных устройств.

3. Элементарно просто продемонстрировано единство замкнутых силовых контуров для испытания дифференциально планетарных механизмов и обьяснен принцип их работы, как измерительных устройств.

4. Рассмотренные в статье вопросы могут оказаться полезными для инженеров и студентов, проектирующих измерительные устройства.

Литература

1. В. А. Юдин, механизмы приборов, Машгиз 1949.

2. В. В. Кондашевский, Наладка автоматических приборов контроля размеров деталей при механической обработке, Машгиз, 1960,

3. А. И. Соловьев, Всережимное испытание подшипников качения на трение, „Вестник машиностроения“ № 3, 1958.

4. А. И. Соловьев, Установка с замкнутым силовым контуром для испытания дифференциальных механизмов, издание ВИНИТИ АН СССР, тема 2, № 497, 1956.

5. А. И. Соловьев, Элементарный синтез дифференциальных механизмов, приборов и аппаратов, „Приборостроение“ № 5 1960.

6. А. И. Соловьев, Некоторые теоретические предпосылки к экспериментальному исследованию потерь на трение и к. п. д. горных механизмов методом механических аналогий, „Известия ВУЗОВ СССР, машиностроение“ № 11, 1960.

К. Т. Н. *А. И. СОЛОВЬЕВ*
ДОЦЕНТ
Радиотехнический институт
Таганрог
СССР — URSS

PROPERTIES OF THE PARALLELOGRAM DEVICE FOR MEASURING

1. The paper deals with measurable properties of a parallelogram device and describes various measuring systems based upon it.

2. The paper data give the more extended idea about structural and kinematic unity of different units of measurig devices from the point of view of both design and functions.

3. It proves in a simplest way the unity of closed power circuits for testing differential-planetary units and gives the explanation to the principle of their operation as measuring devices.

4. The problems discussed in the paper might be helpful for those engineers and students who deal with designing and projecting the measuring devices.

LES PROPRIÉTÉS PERMETTANT AU MECANISME PARALLELOGRAMME D'ÊTRE UTILISÉ POUR MESURES

1. L'auteur montre les propriétés du mécanisme parallélogramme qui lui permettent à être utilisé pour faire des mesures, puis il présente quelques systhèmes à mesurer basés sur ces propriétés.

2. L'article élargit au point de vue constructif et fonctionel la conception d'unité structurale cinématique des diverses mécanismes utilisés dans les instalations à mesurer.

3. On démontre d'une manière élémentaire et simple l'unité des contours de forces, fermés, dans le cas des mécanismes différentiels et planetaires et on explique le principe de fonction de ces mécanismes comme dispositifs à mesurer.

4. Les problemes examinés dans l'article peuvent être très utiles aux ingénieurs et aux étudiants qui projettent des dispositifs à mesurer.

DIE MESSEIGENSCHAFTEN DES PARALLELOGRAM-MECHANISMUS

1. In dieser Veröffentlichung zeigt man die Messeigenschaften des Parallelogram-Mechanismus und beschreibt man verschiedene Messsystheme die diesen Prinzip benutzen.

2. Dieses Studium erweitert, aus konstruktiver und functionaler Standpunkt, das Konzept der struktural-Kinematischen Einheit verschiedener Mechanismen der Messanlagen.

3. Für die Prüfung der Diferenzial-Planetar-Mechanismen, wird die Einheit der Kraftkorture sehr einfach erklärt ; man zeigt das Prinzip ihrer Verwendung als Messvorrichtungen.

4. Die, in diesem Studium dargestellten Probleme, sind für Ingenieure und Studierende, beim Entwurff von Messvorrichtungen, von grossem Nutz.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

ELECTRONICĂ

L'EMPLOI DES SÉRIES DE FOURIER À TERMES COMPLEXES À L'ÉTUDE DU RÉGIME DÉFORMANT *)

par ION S. ANTONIU

1. *Généralités.* Soit un régime déformant défini par l'onde de tension

$$u(t) = \sum_{k=o}^{\infty} (U'_k \sqrt{2} \sin k\omega t + U''_k \sqrt{2} \cos k\omega t) \tag{1}$$

et celle du courant

$$i(t) = \sum_{k=o}^{\infty} (I'_k \sqrt{2} \sin k\omega t + I''_k \sqrt{2} \cos k\omega t) \tag{2}$$

dans lesquelles, pour $k=0$ on obtient les termes constants U_0 et I_0.

En posant **)

$$\underline{U}_k = \frac{\sqrt{2}}{2}(U''_k - jU'_k) \text{ et } \underline{U}_{-k} = \frac{\sqrt{2}}{2}(U''_k + jU'_k) = \underline{U}^*_k \tag{3}$$

$$\underline{I}_k = \frac{\sqrt{2}}{2}(I''_k - jI'_k) \text{ et } \underline{I}_{-k} = \frac{\sqrt{2}}{2}(I''_k + jI'_k) = \underline{I}^*_k \tag{4}$$

et en tenant compte des relations d'Euler

$$\sin k\omega t = \frac{\varepsilon^{jk\omega t} - \varepsilon^{-jk\omega t}}{2j},$$

$$\cos k\omega t = \frac{\varepsilon^{jk\omega t} + \varepsilon^{-jk\omega t}}{2},$$

on obtient la forme complexe des séries de Fourier représentant le régime déformant considéré

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{U}_k \, \varepsilon^{jk\omega t}, \tag{5}$$

*) Rapport présenté à la VI-e session scientifique du Corp Didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest le 18 décembre 1960.

**) Dans tout ce que suit, $j=\sqrt{-1}$, $\varepsilon=2{,}71828...$ base des logarithmes népériens et $\underline{U}_{-k} = \underline{U}^*_k$ est la valeur conjuguée de $\underline{U}_k$, grandeur complexe.

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{I}_k \, \varepsilon^{jk\omega t} . \tag{6}$$

Il est rappelé que, les coefficients $\underline{U}_k$ et $\underline{I}_k$ de ces séries se déterminent de la même façon que ceux de la série (1) ou (2) et sont donnés par des relations de la forme [5]

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) \, \varepsilon^{-jk\omega t} \, dt , \tag{7}$$

dans laquelles T est la période de la fonction $f(t)$.

2. *Valeur moyenne du produit de deux fonctions.* Soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$ deux fonctions de la forme (5) ou (6). Calculons la valeur moyenne pendant une période du produit de ces deux fonctions. On aura

$$M = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t) \cdot f_2(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k \, \varepsilon^{jk\omega t} \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{D}_k \, \varepsilon^{jk\omega t} \right] dt .$$

En effectuant le produit dans le second membre de cette relation et en changeant l'ordre de sommation on obtient

$$M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k \, \underline{D}_k \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^{j(k+k)\omega t} \, dt + \sum_{\substack{k,l=-\infty \\ k \neq l}}^{\infty} \underline{C}_k \, \underline{D}_l \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^{j(k+l)\omega t} \, dt = M_1 + M_2 . \tag{8}$$

Soit la somme

$$M_2 = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k \, \underline{D}_l \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^{j(k+l)\omega t} \, dt ,$$

dans laquelle $k \neq l$. En effectuant l'intégrale on trouve

$$I_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^{j(k+l)\omega t} \, dt = \frac{1}{j(k+l)\omega T} \left[\varepsilon^{j(k+l)\omega t} - 1 \right] ;$$

pour $k + l = N \neq O$ on peut écrire

$$\varepsilon^{jN\omega T} = \varepsilon^{j2\pi N} = \cos 2\pi N + j \sin 2\pi N = 1$$

et l'intégrale est nul ;

pour $k+l=N=0$, la paranthèse est toujours nule, mais le dénominateur de l'expression est aussi nul. En utilisant la règle d'Hôpital pour enlever l'indétermination, on trouve

$$I_2 = 1 .$$

On aura donc

$$M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k \, \underline{D}_k . \tag{9}$$

3. *Valeurs efficaces des ondes de tension et de courant et puissance active du régime.* La relation (9) permet de calculer la valeur efficace des ondes de courant et de tension et la puissance active dans un régime déformant.

En effet, en posant

$$f_1(t) = f_2(t) = i(t),$$

la relation (9) donne, en tenant compte des relations (4),

$$\frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{I}_k \underline{I}_{-k} = I_o^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \underline{I}_k \underline{I}_{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 \qquad (10)$$

qui est bien le carré de la valeur efficace de l'onde du courant [1] *).

En posant

$$f_1(t) = f_2(t) = u(t),$$

on trouve de même l'expression du carré de la valeur efficace de l'onde de tension du régime déformant.

En posant maintenant

$$f_1(t) = u(t) \text{ et } f_2(t) = i(t),$$

la relation (9) donne, en tenant compte des relations (3) et (4),

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot i(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{U}_k \underline{I}_{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\underline{U}_k \underline{I}_{-k} + \underline{U}_k \underline{I}_{-k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (U'_k I'_k + U''_k I''_k) \qquad (11)$$

Mais [1] **)

$$\left.\begin{aligned} U'_k &= U_k \cos\alpha_k\,,\quad U''_k = U_k \sin\alpha_k\,,\quad tg\,\alpha_k = \frac{U''_k}{U'_k}\,,\\ I'_k &= I_k \cos\beta_k\,,\quad I''_k = I_k \sin\beta_k\,,\quad tg\,\beta_k = \frac{I''_k}{I'_k}\,,\\ \alpha_k &- \beta_k = \varphi_k \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

et la relation (11) devient

$$\sum_{k=0}^{\infty} (U'_k I'_k + U''_k I''_k) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos(\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k = P\,,$$

relation qui représente l'expression de la puissance active du régime déformant considéré.

*) pag. 249.
**) pag. 186.

4. *Puissance réactive du régime déformant.* Il est facile de montrer que, pour une harmonique quelconque, la puissance réactive correspodante est donné par la relation

$$Q_k = j\,(\underline{U}_{-k}\,\underline{I}_k - \underline{U}_k\,\underline{I}_{-k});$$

en effet, en tenant compte des relations (3), (4) et (10) on trouve bien

$$Q_k = U_k\,I_k \sin\varphi_k\,.$$

Donc, la puissance réactive du régime déformant considéré sera representé par l'expression

$$Q = \sum_{k=}^{\infty} j\,(\underline{U}_{-k}\,\underline{I}_k - \underline{U}_k\,\underline{I}_{-k})\,. \tag{13}$$

5. *Puissance déformante du régime.* Suivant le principe de la séparation des puissances, la puissance apparente $S=UI$ d'un régime énergétique quelconque peut être décomposée en deux termes orthogonaux

$$S^2 = P^2 + P_f^2, \tag{14}$$

le premier de ces termes étant le carré de la puissance active, le second le carré de ce que Budeanu [4] *) appelle *puissance fictive* et Blondel [2] **), [3] ***) *hormanance apparente.*

À son tour, cette puissance fictive se décompose aussi en deux termes, aussi orthogonaux, le premier étant la *puissance réactive* du régime, le deuxième, la *puissance déformante ;* cette dernière est nule si le régime énergetique considéré est sinusoidal.

La relation (14) peut donc s'écrire

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2\,.$$

On déduit

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2\,,$$

ou, en se rapportant aux relations (10), (11) et (13),

$$D^2 = 4\,[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{U}_k\,\underline{U}_{-k}]\,[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{I}_k\,\underline{I}_{-k}] - [\sum_{k=0}^{\infty} (\underline{U}_k\,\underline{I}_{-k} + \underline{U}_{-k}\,\underline{I}_k)]^2 -$$

$$- [\sum_{k=0}^{\infty} j\,(\underline{U}_k\,\underline{I}_k - \underline{U}_k\,\underline{I}_{-k})]^2\,.$$

*) pag. 212.
**) pag. 1351.
***) pag. 248.

Effectuant les calculs et en tenant compte des relations (12), on trouve

$$D^2 = \sum_{\substack{k,l=0 \\ k \neq l}}^{\infty} [U_k^2 I_l^2 + U_l^2 I_k^2 - 2 U_k U_l I_k I_l \cos (\varphi_k - \varphi_l)]$$

qui est bien l'expression connue de la puissance déformante.

La chaire d'électrotechnique II
de l'Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Antoniu I. S.:* Chestiuni speciale de electrotehnică, Ed. Academiei R.P.R., București, 1956.
2. *Blondel A.:* Puissances et hormanances mutuelles des courants alternatifs, C.R.Ac.Sc. Paris, t. CLXXXVIII, 27 mai 1929.
3. *Blondel A.:* Les courants alternatifs, Ed. Baillière, Paris, 1933.
4. *Budeanu C.:* Puissances réactives et fictives, Ed. IRE, Bucarest, 1927.
5. *Franklin Ph.:* Fourier Methods, Ed. McGraw—Hill, New York, 1949.
6. *Каллер М. Я.,* Теоря электрических цепей, Трансжелдориздат, Москва 1956.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ РЯДОБ ФУРЬЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМИРУЮШЕГО РЕЖИМА

(Краткое содержание)

Исползуя комплексную форму для рядов фурье, устанавливаются основные соотношения, применяемые при изучении деформи рующего режима, а именно: эффективное значение волн напряжения и тока, а также и выражение мощности при любом дефформррующем режиме. Затем устанавливается выражение реактивной мошности: применяя принцип отделения мошностей, полугается выражение деформирущей мощности.

FOURIER'S SERIES WITH COMPLEX TERMS APPLIED TO STUDYING OF A DISTORTING SYSTEM

(Summary)

Starting from the complex form of the Fourier's series, the author establishes the basic relations generally used in studying of a distorting system, namely the square root value of the voltage and current waves, as well as the power expression in case of a some one distorting system.

He establishes then the reactive power expression and, besides, by taking into account the principle of powers separation, the distorted power expresion.

L'EMPLOI DES SÉRIES DE FOURIER À TERMES COMPLEXES À L'ÉTUDE DU RÉGIME DÉFORMANT

(Résumé)

En partant de la forme complexe de la série de Fourier, l'auteur établit les relations fondamentales utilisées dans l'étude du régime déformant, à savoir la valeur efficace des ondes de tension et de courant et l'expression de la puissance active dans un régime déformant quelconque. Il établit ensuite l'expression de la puissance réactive et, en tenant compte du principe de la séparation des puissances, l'expression de la puissance déformante.

UNTERSUCHUNG DES VERZERRUNGSBETRIEBS MITTELS KOMPLEXER FOURIER - REIHEN

(Zusammenfassung)

Durch Verwendung der komplexen Form von Fourier Reihen werden die für Untersuchung Verzerrungsbetrieb erforderlichen Grundbeziehungen und zwar: effektiven Werte der Spannungs- und Stromwellen sowie der Ausdruck der Wirkleistung bei beliebiger Verzerrungsbetrieb festgelegt. Es werden daraufhin der Ausdruck der Blindleistung und, nach dem Grundsatz der Sonderung der Leistungen, der Ausdruck der Verzerrungsleistung bestimmt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola 1

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF THE JUNCTION TRANSISTOR AT HIGH INJECTION LEVELS *)

By MIHAI DRĂGĂNESCU

1. INTRODUCTION

The theory of the junction transistor at small injection levels is completely developed. This is due to W. SCHOCKLEY [1] [2] and to J. M. EARLY [3]. On this basis, some authors have developed natural equivalent circuits for the junction transistor [4] [5].

The disadvantage of the theory at small injection levels is the fact that it does not explain the variations of the d.c. current amplification factor (and also of the a.c. current amplification factor) with the emitter current, and the same for some other parameters which appears in various equivalent circuit of the transistor.

The tehory at small injection levels is characterised by the supposition that the concentration of holes (p) into the base (for instance for a PNP transistor) is much smaller than the donor concentration (N). By definition the „injection level" has the expression

$$\triangle = \frac{p_1}{N} \tag{1}$$

where p_1 is the concentration of holes into the base at the contact with the barrier region of the emitter ($x=0$ in fig. 1) and N is the donor concentration in the base.

A principal point in the theory of the transistor is the establishment of the conditions for the limit of the differential equation which gives the hole distribution in the base. These conditions for limit, established by Schockley, are **).

$$x = 0 \qquad p_1 = p_n \in^{\frac{eu_e}{KT}} \tag{2}$$

$$x = w \qquad p_2 = p_n \in^{\frac{eu_c}{KT}} \tag{3}$$

*) The paper was read before the VI the scientific meeting of the Polythehnic Institute of Bucharest (the 17—18 dec. 1960).

**) See the list of symbols at the end of this paper.

Because $u_c < 0$ and $u_e > 0$, in general $p_1 \gg p_2$ ant the distribution of holes has the form indicated in fig. 2.

At high injection levels, when, $p_1 \gg N$, it is to be observed that for maintaining space charge neutrality in the base it is necessary an

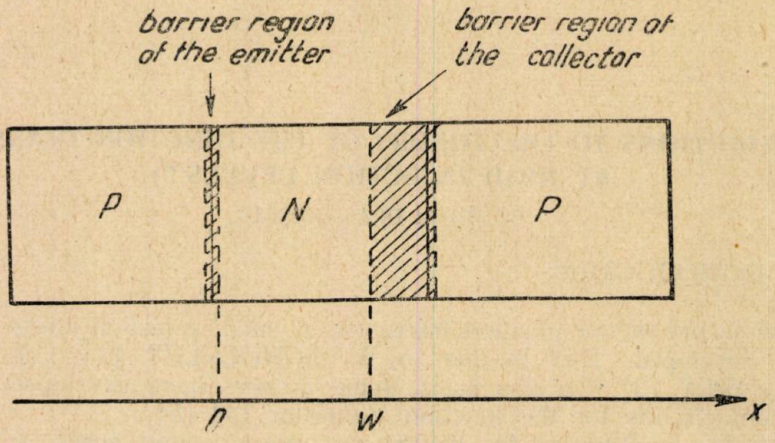


Fig. 1. — A unidimensional model of the transistor

increase of the electron concentration. If the condition for space charge neutrality is taken into account, then it is shown (for instance in work

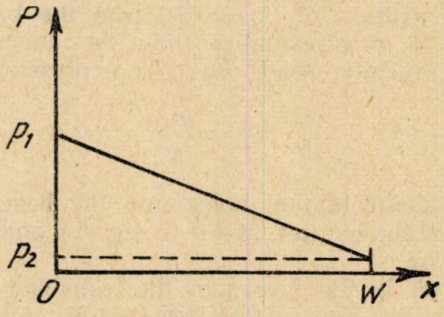


Fig. 2. — Hole distribution in the base, at small injection levels (no electric field in the base)

[6]) that the condition for the limit (2) must be replaced by the condition.

$$x = 0 \qquad p_1\left(1 + \frac{p_1}{N}\right) = p_n \in^{\frac{eu_e}{kT}} \tag{2'}$$

With respect to the question of what becomes the condition for the limit (3) in the case of high injection levels, in most of the theories

[7] [8] [9] [10] [6] it is supposed that the condition (3) holds. Another recent theory [11] does not consider the condition for the limit (3) to be valid, and some serious reasons are given. A confirmation of the point of vue of A. W. MATZ [11] may be deduced also from a work of

What is characteristic for the high injection level regim of the transistor is the fact that appears in the base an electric field. This electric field increases the speed of the holes and the process of volume recombination in the base is reduced. Therefore the distribution of the holes into the base must have values greater than those indicated in fig. 2.

If the volume recombination is completely neglected (surface recombination is also not taken into account) then Рябинкин obtains that $p(x) \approx$ const., but becuase he considers that the condition for the lmit (3) holds, then he represents the hole distribution into the base like in fig. 3.

It appears then, that in the presence of an electric field the hole distribution in the base may not satisfy the imposed condition (3) and is to be expected for p_2 to have a greater value. This is the principal feature of the A. W. MATZ [11] theory, who supposed that p_2 may not be given, but may be deduced if condition (3) is replaced by another condition. This another condition is

$$j_n(w) = 0 \tag{3'}$$

that is, the electron current at the collector is negligible small, which is a very good approximmation.

In the present work is presented a reformulation of the theory of A. W. MATZ [11] which was indicated in a previous note [13].

2. THE BASIC EQUATIONS

At the basis of the theory of the transistor are the following equations, which are written for the base region,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p - p_n}{\tau_p} - \frac{1}{e} \cdot \frac{d j_p}{d x} \tag{4}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{u - u_n}{\tau_{nB}} + \frac{1}{e} \cdot \frac{d j_n}{d x} \tag{5}$$

$$j_p = e \mu_p p \mathcal{E} - e D_{nB} \frac{d p}{d x} \tag{6}$$

$$j_n = e \mu_{nB} n \mathcal{E} + e D_{nB} \frac{d u}{d x} \tag{7}$$

$$div\, \mathcal{E} = \frac{e}{\varepsilon}(p - n + N) \tag{8}$$

The equation (4) and (5) represent the continuity equations for holes respectively for electrons.

It is suppose that
(I) τ_p, τ_{nB}, μ_p, μ_{nB}, D_p, D_{nB} are independent on the injection level.
(II) surface recombination is neglected
(III) the base region is neutral,

$$p - n + N \simeq 0 \tag{9}$$

Then, from (8),

$$\mathcal{E} \simeq \text{constant} \tag{10}$$

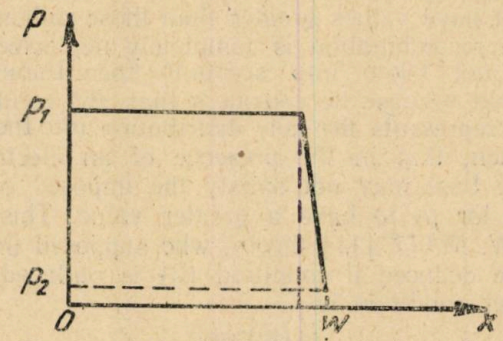


Fig. 3. — Hole distribution in the base, after Рябркин [12], when is present an electric field and when any recombination is neglected

From equations (4) and (6) one obtains the following differential equation

$$\frac{d^2 p}{d x^2} - \frac{e}{k T}\left[p \frac{d \mathcal{E}}{d x} + \mathcal{E} \frac{d p}{d x}\right] - \frac{p - p_n}{L_p} = 0 \tag{11}$$

where it was taken into account that [1]

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} \tag{12}$$

$$\mu_p = \frac{e D_p}{k T} \tag{13}$$

With the supposition (III), the equation (11) may be written

$$\frac{d^2 p}{d x^2} - \frac{e \mathcal{E}}{k T} \cdot \frac{d p}{d x} - \frac{p - p_n}{L_p^2} = 0 \tag{14}$$

It is supposed that
(IV) $$p \gg p_n \tag{15}$$

which is realy true for $0 < x < w$ as it will be seen.
Introducing the following quantities,

$$L_e = \frac{k T}{e \mathcal{E}} \tag{16}$$

$$\xi = \frac{L_p}{2\,L_e} \tag{17}$$

$$y = \frac{p}{N} \tag{18}$$

$$z = \frac{x}{L_p} \tag{19}$$

the equation (14) becomes

$$\frac{d^2 y}{d z^2} - 2\,\xi \frac{d y}{d z} - y = 0 \tag{20}$$

where ξ is a measure of the electric field in the base. All the quantities in equation (20) are normalised. Thus, y represents the normalised hole distribution and z the normalised distance from the emitter to a point in the base.

The conditions for the limit of the equation (20) will be noted :

$$z = 0 \qquad y = \frac{p_1}{N} = \Delta \tag{21}$$

$$z = \frac{w}{L_p} = z_B \qquad y = \frac{p_2}{N} = \Delta_2 \tag{22}$$

where Δ is given by condition (2') and where Δ_2 remains to be determined.

The parameter $z_B = \frac{w}{L_p}$ in the normalised length of the base region. (23)

The solution of the differential equation (20) with the conditions for the limit (21) and (22) is :

$$y = \epsilon^{\xi z} \frac{\Delta_2\, \epsilon^{-\xi z_B} \operatorname{sh} z \sqrt{\xi^2 + 1} + \Delta \operatorname{sh} (z_B - z) \sqrt{\xi^2 + 1}}{\operatorname{sh} z_B \sqrt{\xi^2 + 1}} \tag{24}$$

where ξ and Δ_2 must yet to be determined.

3. EXPRESSIONS FOR THE ELECTRIC CURRENTS

The currents will be normalised. For the hole current, the reference current will be

$$I_p = \frac{e\,D_p\,N}{L_p} \tag{25}$$

and for the electron current

$$I_n = \frac{e\,D_{nB}\,N}{L_p} = \frac{D_{nB}}{D_p} \cdot I_p = b\,I_p \tag{26}$$

where

$$b = \frac{D_{nB}}{D_p} = \frac{\mu_{nB}}{\mu_p} \tag{27}$$

Then, taking into account the notations (16) — (19) and the relation (13), one obtains from (6) the following expression for the normalised hole current:

$$i_p = \frac{j_p}{I_p} = 2\, y\, \xi - \frac{d\, y}{d\, \xi} \tag{28}$$

Similarly, for the normalised electron current, one obtains,

$$i_n = \frac{j_n}{I_n} = 2\,(1 + y)\,\xi + \frac{d\, y}{d\, \xi} \tag{29}$$

From these expressions one obtains,

$$i_p\,(o) = 2\,\Delta\,\xi - \left.\frac{d\, y}{d\, z}\right|_{z=0} \tag{30}$$

$$i_n\,(o) = 2\,(1 + \Delta)\,\xi + \left.\frac{d\, y}{d\, z}\right|_{z=0} \tag{31}$$

$$i_p(w) = 2\,\Delta_2\,\xi - \left.\frac{d\, y}{d\, z}\right|_{z=z_B} \tag{32}$$

$$i_n(w) = 2\,(1 + \Delta_2)\,\xi + \left.\frac{d\, y}{d\, z}\right|_{z=z_B} \tag{33}$$

From (24) it easy to proof that

$$\left.\frac{d\, y}{d\, z}\right|_{z=0} = \Delta\,(\xi - T_2) + \Delta_2\, T_0^{-1}\, T_1 \tag{34}$$

$$\left.\frac{d\, y}{d\, z}\right|_{z=z_B} = -\, T_0\, T_1\, \Delta + (\xi + T_2)\,\Delta_2 \tag{35}$$

where

$$T_0 = \epsilon^{z_B \xi} \tag{36}$$

$$T_1 = \sqrt{1 + \xi^2}\ \operatorname{csch} z_B \sqrt{1 + \xi^2} \tag{37}$$

$$T_2 = \sqrt{1 + \xi^2}\ \operatorname{cth} z_B \sqrt{1 + \xi^2} \tag{38}$$

Therefore,

$$i_p\,(o) = 2\,\Delta\,\xi - (\xi - T_2)\,\Delta - T_0^{-1}\, T_1\, \Delta_2 \tag{39}$$

$$i_n\,(o) = 2\,(1 + \Delta)\,\xi + (\xi - T_2)\,\Delta + T_0^{-1}\, T_1\, \Delta_2 \tag{40}$$

$$i_p(w) = 2\,\Delta_2\,\xi + T_0\, T_1\, \Delta - (\xi + T_2)\,\Delta_2 \tag{41}$$

$$i_n(w) = 2\,(1 + \Delta_2)\,\xi - T_0\, T_1\, \Delta + (\xi + T_2)\,\Delta_2 \tag{42}$$

In these four equations the following 7 parameters

$$\Delta, \Delta_2, \xi, i_p(o), i_n(o), i_p(w), i_n(w)$$

depend on the potentials of the electrodes.

The injection level Δ may be determined from equation (23). The electron current $i_n(o)$ must be equalled to the electron current which diffuses into the emitter but $i_n(w)=0$ because it is imposed to satisfy the condition (3′). Therefore it remains only 4 unknowns, Δ, ξ, $i_p(o)$ and $i_p(w)$ which may be determined from equations (39) — (42).

The first step will be to determine ξ. Before this, it is to be noted that [1] [2]

$$j_n(o) = \frac{e D_n n_p}{L_n}\left(\epsilon^{\frac{eu_e}{KT}} - 1\right) \simeq \frac{e D_n n_p}{L_n}\epsilon^{\frac{eu_e}{KT}} \tag{44}$$

Then

$$i_n(o) = \frac{j_n(o)}{I_n} = \frac{D_n}{D_{nB}} \cdot \frac{L_p}{L_n} \cdot \frac{n_p}{N}\epsilon^{\frac{eu_e}{KT}} \tag{45}$$

Introducing the value of $\epsilon^{\frac{eu_e}{KT}}$ from (23) and noting

$$\eta_o = \frac{D_n}{D_{nB}} \cdot \frac{L_p}{L_n} \cdot \frac{n_p}{p_n} \tag{46}$$

which is a technological parameter of the transistor, then

$$i_n(o) = \eta_o \Delta (1 + \Delta) \tag{47}$$

4. THE DETERMINATION OF THE NORMALISED ELECTRIC FIELD

If Δ_2 is eliminated between ecuations (40) and (42) and if are taken into account the conditions (45) and (3′), one obtains easily

$$\Delta = \frac{2\xi(3\xi + T_2 - T_1 T_0^{-1})}{\eta_0(1+\Delta)(3\xi + T_2) + 1 - 8\xi^2} \tag{48}$$

which represents a relation between Δ and ξ. To obtain from here $\Delta(\xi)$ or $\xi(\Delta)$ is complicated enough.

A considerable simplification of formula (48) is possible if approximate expressions are accepted for T_0, T_1 and T_2. Indeed for most transistors,

$$z_B = \frac{w}{L_p} \leqslant \frac{1}{100} \tag{49}$$

and ξ usually is smaller than 2 [11] [13]. Then, with good approximation the formulae (36) — (38) become

$$T_0 \simeq 1 + \xi z_B \tag{50}$$

$$T_1 \simeq \frac{1}{z_B} - \frac{1}{6} z_B (1 + \xi^2) + \ldots \simeq \frac{1}{z_B} \tag{51}$$

$$T_2 = \frac{1}{z_B} + \frac{1}{3} z_B (1 + \xi^2) + \ldots \simeq \frac{1}{z_B} \tag{52}$$

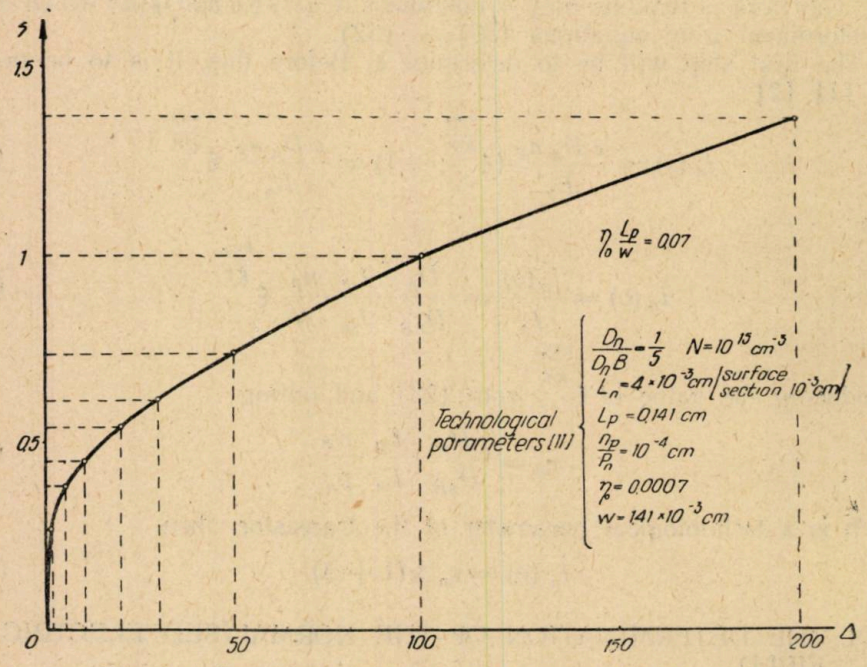


Fig. 4. — Dependence of the normalised electric field on the injection level

Then, the formula (48) becomes,

$$\xi = \sqrt{\frac{\Delta \left[1 + \eta_0 \frac{L_p}{w} (1 + \Delta)\right]}{8 (1 + \Delta)}} \tag{53}$$

This formula gives directly the normalised electric field in function of the injection level Δ. In this formula $\eta_0 \frac{L_p}{w}$ is a technological parameter of the transistor. The electric field in the base is depending on u_e (through Δ) and in a smaller measure also on u_e (through w [3]). In fig. 4 the dependence $\xi = f(\Delta)$ is represented for $\eta_0 \frac{L_p}{w} = 0{,}07$ This value of $\eta_0 \frac{L_p}{w}$ corresponds to the data indicated in fig. 4.

5. THE DETERMINATION OF $\triangle_2$.

The calculation of $\triangle_2$ is possible from the equations (40) and (42), which may be written if conditions (47) and (3′) are satisfied:

$$\eta_0 \Delta (1 + \Delta) = 2 (1 + \Delta) \xi + (\xi - T_2) \Delta + T_0^{-1} T_1 \Delta_2 \qquad (40')$$

$$0 = 2 (1 + \Delta_2) \xi - T_0 T_1 \Delta + (\xi + T_2) \Delta_2 \qquad (42')$$

From these equations one obtains:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3 \xi - T_2 + T_0 T_1 - \eta_0 (1 + \Delta)}{3 \xi + T_2 - T_0^{-1} T_1} \qquad (55)$$

This formula gives the posibility of an appreciation of the condition for the limit at $x = w$. This formula may be simplified if the approximations (50) — (52) are used, but in these expressions it will be taken into account the first two terms. In such conditions, which are valable for intermidiate and high injection levels, the formula (55) becomes:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4 \xi - \frac{1}{2} \frac{w}{L_p} (1 + \xi^2) - \eta_0 (1 + \Delta)}{4 \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{L_p} \right) (1 + \xi^2)} \simeq 1 - \frac{w}{L_p} \frac{1 + \xi^2}{4 \xi} - \eta_0 \frac{1 + \Delta}{4 \xi} \qquad (56)$$

This formula shows that in general $\frac{\Delta_2}{\Delta}$ will be very near the value 1 because η_0 has a very small value. Therefore the supposition of A. W. MATZ [11] that condition (3) does not hold when the electric field is taken into account seems to be correct. Thus the supposition (15) remains valid.

6. THE D. C. CURRENT AMPLIFICATION FACTOR

The expressions of the electric currents $i_n (o)$, $i_p (o)$ and $i_p (w)$ may be written,

from (47): $$i_n (o) = \eta_0 \Delta (1 + \Delta) \qquad (57)$$

from (30) and (31): $$i_p (o) = 2 (1 + 2 \Delta) \xi - i_n (o) \qquad (58)$$

from (33), (32) and (3′): $$i_p (w) = 2 (1 + 2 \Delta_2) \xi \qquad (59)$$

From (56) and (47) one obtains,

$$\Delta_2 = \Delta - \frac{i_n (o)}{4 \xi} - \Delta \frac{w}{L_p} \cdot \frac{1 + \xi^2}{4 \xi} \qquad (60)$$

and then,

$$i_p (w) = 2 (1 + 2 \Delta) \xi - i_n (o) - \frac{w}{L_p} \Delta (1 + \xi^2) = i_p (o) - \frac{w}{L_p} \Delta (1 + \xi^2) \qquad (61)$$

Now, *the transport factor* of the transistor may be easily calculated,

$$\beta = \frac{j_p (w)}{j_p (o)} = \frac{i_p (w)}{i_p (o)} \qquad (62)$$

If in the above expression is introduced the value of $i_p(w)$ from (61) one obtains,

$$\beta = 1 - \frac{w}{L_p} \cdot \frac{(1+\xi^2)\Delta}{i_p(o)} \tag{63}$$

Because, and this may be proofed by numerical calculations,

$$\frac{(1+\xi^2)\Delta}{i_p(o)} \approx \frac{(1+\xi^2)\Delta}{2(1+2\Delta)\xi} < 1 \tag{64}$$

and because $\frac{w}{L_p} \sim \frac{1}{100}$, it may be taken,

$$\beta \simeq 1 \tag{65}$$

The presence of an electric field in the base has reduced the volume recombination and the transport factor is almost equal to 1. This is in agreement with the initial supposition that $\Delta_2 \to \Delta$.

The emitter efficiency γ may also be calculated. By definition

$$\gamma = \frac{j_p(o)}{j_p(o) + j_n(o)} = \frac{1}{1 + \frac{j_n(o)}{j_p(o)}} \tag{66}$$

Because, as relations (26) — (29) show,

$$\left.\begin{aligned} j_n(o) &= i_n(o) \cdot I_n = b \cdot i_n(o)\, I_p \\ j_p(o) &= i_p(o) \cdot I_p \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

then

$$\gamma = \frac{1}{1 + b\frac{i_n(o)}{i_p(o)}} \tag{68}$$

Taking into account the expressions (58) and (57) one obtains

$$\frac{i_n(o)}{i_p(o)} = \frac{1}{\frac{2(1+2\Delta)\xi}{\eta_0 \Delta (1+\Delta)} - 1} \simeq \frac{\eta_0 \Delta (1+\Delta)}{2(1+2\Delta)\xi} \tag{69}$$

because

$$\frac{2(1+2\Delta)\xi}{\eta_0 \Delta (1+\Delta)} \gg 1 \tag{70}$$

as may be numerically proofed (in any case η_0 is a very small quantity). Thus,

$$\gamma \simeq 1 - b\frac{\eta_0}{2\xi} \cdot \frac{\Delta(1+\Delta)}{1+2\Delta} \tag{71}$$

Introducing the notation

$$\boxed{f_1(\Delta) = \frac{\Delta(1+\Delta)}{1+2\Delta}} \tag{72}$$

where $f_1(\Delta)$ is a general function depending on Δ, the following formula for the emitter efficiency is obtained

$$\gamma = 1 - b\frac{\eta_0}{2\xi}\cdot f_1(\Delta) \tag{73}$$

Then, the d.c. current amplification factor of the transistor will be

$$\boxed{\alpha = \beta\gamma \simeq \quad \overline{1 - b\frac{\eta_0}{2\xi} f_1(\Delta)}} \tag{74}$$

For $\Delta > 10$, $f_1(\Delta)$ is encreasing almost linearly with the injection level $\left(f_1(\Delta) \simeq \frac{\Delta}{2}\right)$ and ξ is encreasing — as may be seen from (54) — with $\sqrt{\Delta}$. Therfore, α is decreasing with the injection level. In fig. 5 it is represented the variation of α with the injection level for the transistor with

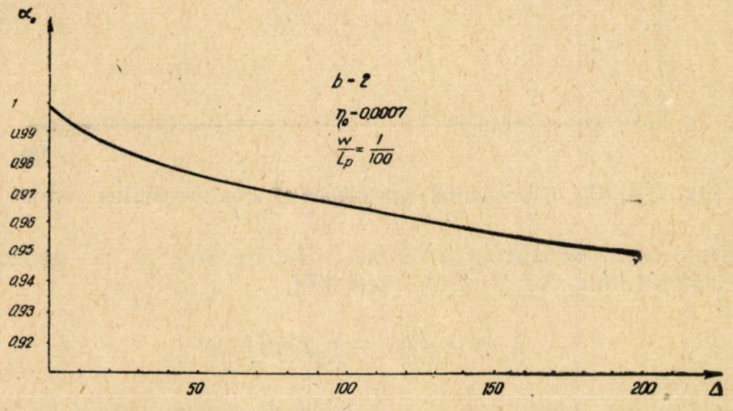


Fig. 5. — The dependence of the d.c. current amplification factor on the injection level. The surface recombination is neglected

the data indicated in fig. 4 (with $b=2$). The formula (74) gives directly the dependence of α on the injection level, which was not obtained in the work [11].

For $\Delta < 1$, formula (74) gives $\alpha \simeq 1$, which is contrary to the experimental facts (fig. 6). At small injection levels α is decreasing. This is due to the effect of surface recombination and also to the recombination in the barrier region of the emitter. Especially the surface recombination in the base region may play an important role at small, intermidiate and even at high injection levels. In the following paragraph the surface recombination will be taken into account using the method of W. M. WEBSTER [7]. It will not be taken into account the recombination in the barrier region of the emitter because this intervins only at very small injection levels.

7. THE EFFECT OF SURFACE RECOMBINATION

As it was experimentally, shown, the surface recombination may play an important role in the behaviour of a semiconductor device. A parameter characterising the process of surface recombination is the speed

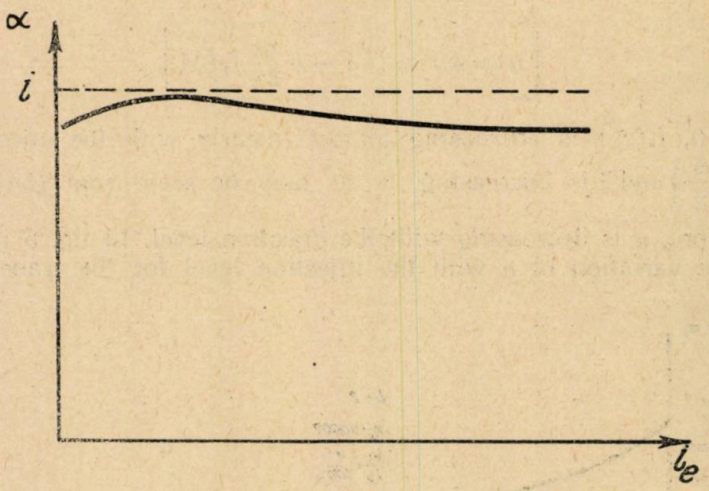


Fig. 6. — The experimental dependence of α on the emitter current

of recombination s measured in cm/sec. The density of the surface recombination current may be written then [7],

$$j_r = e\, s\, (p - p_o) \text{ surface} \tag{75}$$

where e is the electronic charge, p is the hole concentration at the surface and p_0 is the hole concentration at the thermal equilibrium.

In the present theory, a transistor with a junction surface equal to unity was considered. For a real transistor with a junction surface A and with an exterior surface of the base equal to A_s, the density of the surface recombination current may be written

$$j_{ps} = e\, s\, (p - p_n) \frac{A_s}{A} \tag{76}$$

because multiplying the former relation with A one obtains the real recombination current. It is to be noted that in expression (76) p is the hole concentration in the base taken as equal to the surface hole concentration. Because p is almost constant in the base (see paragraph 5),

$$p \simeq p_1 \gg p_n \tag{77}$$

Thus,

$$j_{ps} = e\, s\, p \frac{A_s}{A} = e\, s\, N \frac{A_s}{A} \Delta \tag{78}$$

The normalised current will be,

$$i_{ps} = \frac{j_{ps}}{I_p} = \Sigma \Delta \tag{79}$$

where

$$\Sigma = \frac{s \frac{A_s}{A} L_p}{D_p} \tag{80}$$

will be named *„the surface parameter"*.

If the surface recombination is taken into account, then the hole curent at $x = 0$ will be

$$i'_p(o) = i_p(o) + i_{ps} \tag{81}$$

Then the transport factor becomes,

$$\beta' = \frac{i_p(w)}{i'_p(o)} = \frac{i_p(w)}{i_p(o) + i_{ps}} \tag{82}$$

or

$$\frac{1}{\beta'} = \frac{i_p(o)}{i_p(w)} + \frac{i_{ps}}{i_p(w)} \tag{83}$$

If the relations (58) (61) and (79) are taken into account, then

$$\frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\beta} + \frac{\Sigma \Delta}{2(1 + 2\Delta_2)\xi} \tag{84}$$

Because $\frac{\Delta_2}{\Delta} \simeq 1$ (see paragraph 5), the former relation may be written

$$\frac{1}{\beta'} \simeq \frac{1}{\beta} + \frac{\Sigma \Delta}{2(1 + 2\Delta)\xi} \tag{85}$$

from where it is seen that the surface recombination reduces the transport factor.

The speed of surface decombination has usually values from 10—100 cm/sec and sometimes much more. For the transistor with the data given in fig. 4, $\frac{L_p}{D_p} = 2{,}85 \cdot 10^{-3}$ sec/cm. If it is taken $\frac{A_s}{A} = 1$, then from (80) one obtains $\Sigma = 2{,}85 \cdot 10^{-3}\, s$. For s having values from 10 to 100 cm/sec, the surface parameter Σ may take values from 0,0285 till 0,285. Therefore, the second member of relation (85), will be allways smaller

than 0,1 (to proof this, see the dependence of ξ on Δ in fig. 4). Because $\beta \simeq 1$,

$$\frac{1}{\beta'} = 1 + \frac{\Sigma \Delta}{2(1+2\Delta)\xi} \tag{86}$$

or

$$\boxed{\beta' = 1 - \frac{\Sigma \Delta}{2(1+2\Delta)\xi}} \tag{87}$$

In the presence of the surface recombination the injection efficiency becomes

$$\gamma' = \frac{i_p'(o)}{i_p'(o) + b\, i_n(o)} = \frac{1}{1 + b \dfrac{1}{\dfrac{i_p(o)}{i_n(o)} + \dfrac{i_{ps}}{i_n(o)}}} \tag{88}$$

that is

$$\gamma' = \frac{1}{1 + b \dfrac{1}{\dfrac{i_p(o)}{i_n(o)} + \dfrac{\Sigma}{\eta_0(1+\Delta)}}} \tag{89}$$

The surface recombination produces an encrease of the injection efficiency. Because $\dfrac{\Sigma}{\eta_0(1+\Delta)}$ is allways much smaller than $\dfrac{i_p(o)}{i_n(o)}$ (this may be proofed for the given numerical example), a very good approximation is

$$\gamma' = \gamma \tag{90}$$

Then the d.c. current amplification factor in presence of surface recombination will be

$$\alpha' = \beta' \gamma' \tag{91}$$

and if the approximated formulae (87) and (90) are used, one obtains

$$\alpha' = 1 - b\,\eta_0 \frac{f_1(\Delta)}{2\xi} - \frac{\Sigma \Delta}{2(1+2\Delta)\xi} \tag{92}$$

or

$$\boxed{\alpha' = \alpha - \frac{\Sigma \Delta}{2(1+2\Delta)\xi}} \tag{93}$$

The expression (93) shows clearly the effect of surface recombination on the d.c. current amplification factor. In fig. 7 α is represented for

$$\Sigma = 0{,}05\ ;\quad 0{,}1\ ;\quad 0{,}15\ .$$

It is seen that for not too small values of Δ (that is, excepting the values $\Delta<1$) the experimental result of fig. 6 is explained, because the emitter current is encreasing with the injection level.

The feature of the curves from fig. 7 is due to two factors: the effect of the electric field in the base and the effect of the surface recombination. From (78) it is to be noted that the surface recombination current is

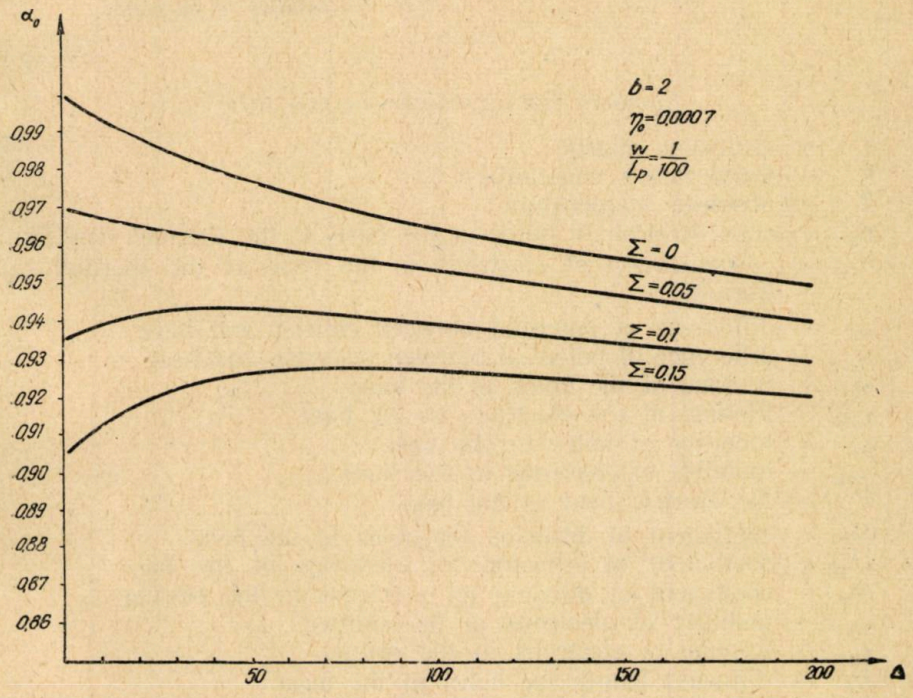


Fig. 7. — The dependence of the d.c. current amplification current on the injection level for different values of the surface parameter

encreasing with the injection level, but the effect of surface recombination in comparison with the field effect is greatear at intermidiate injection levels, as may be seen from fig. 8. At high injection levels the effect of the electric field is stronger than the surface recombination effect.

The calculations presented in this paragraph are not giving good results for $\Delta<1$, where α' has a tendency to increase with the decrease of the injection level, due to the fact that at very small injection level the surface recombination current strongly decreases. This encrease of α' for $\Delta<1$ was not represented in fig. 7.

The present theory, for $\Delta<1$, is not giving good results, because it does not take into account two other effects:

— the surface recombination velocity may encrease at small injection levels

— the volume recombination in the barrier region of the emitter, may play an important role at small injection levels. For the transistor with the numerical constants indicated in fig. 4, for $\triangle<1$ the emitter current has values smaller than 0,05 mA ! At such values of current it is certain that the recombination in the barrier region plays an important role.

Chaire of Electronics, Polytechnic
Institute of Bucharest

Symbols not explaines in the text

e — electronic charge
k — Boltzmann's constant
T — absolute temperature
p_n — concentration of holes in the base at the thermal equilibrium
n_n — concentration of electrons in the base at the thermal equilibrium
u_e — difference of potential between emitter and base
u_c — difference of potential between collector and base
τ_p — lifetime of the holes in the base
τ_{nB} — lifetime of the electrons in the base
μ_p — mobility of holes in the base
μ_{nB} — mobility of electrons in the base
E — the electric field in the base
D_p — coefficient of diffusion for holes in the base
D_{nB} — coefficient of diffusion for electrons in the base
D_n — coefficient of difusion for electrons in the emitter
μ_n — mobility of electrons in the emitter
τ_n — lifetime of electrons in the emitter
L_p — diffusion length for holes in the base
L_n — diffusion length for electrons in the emitter

BIBLIOGRAPHY

1. *W. Schockley :* The theory of PN junctions in semiconductors and PN junction transistors. Bell System Technical Journal 28 (1949), July, 435—489.
2. *W. Schockley, M. Sparks, G. K. Teal :* PN junction transistors. Physical Review 83 (1951), July, 151—162.
3. *J. M. Early :* Design theory of junction transistors. Bell System Technical Journal 32 (1935), Nov. 289—325.
4. *L. J. Giacoletto :* Study of PNP alloy juction transistors from d.c. trough medium frequencies. R.C.A. Review 15 (1954), 506—562.
5. *J. Zawels :* Physical theory of a new circuit representation for junction transistors. Journal of applied physics 25 (1954), Aug. 976—981.

6. *N. I. Meyer:* On the variation of transistor small signal parameters with emitter current and collector voltage. Journal of electronics and control 4 (1958), April, 305—334.
7. *W. M. Webster:* On the variation of junction transistor current amplification factor with the emitter current. Proceedings I.R.E. 42 (1954), No. 6, 914—919.
8. *E. S. Rittner:* Extension of the theory of the junction transistor. Physical Review 94 (1954), June, 1161—1171.
9. *T. Misawa:* Emitter efficiency of junction transistors. Journal of the Physical Society of Japan 10 (1955) May, 362.
10. *T. Misawa:* Diffusion capacitances and high level operation of jonction transistors. Proceedings I.R.E. 43 (1955), June, 749—750.
11. *A. W. Matz:* A modification of the theory of the variation of junction transistors current gain with operating point and frequency. Journal of electronics and control 7 (1959), Aug., 133—152.
12. *Ю. С. Рябинкин:* Электрическое поле в базе плоскостных транзисторов при малых уровнях инъекций. Физика твердого тела (Сборник статей) vol. I, 1959, pag. 159—169.
13. *M. Drăgănescu:* Matz theory of the junction transistors at high injection levels. Journal of electronics and control 8 (1960), June, 459—462.

К ВОПРОСУ О ТЕОРИИ ТРАНЗИСТОРА ПРИ ВЫСОКИХ УРОВНЯХ ИНЖЕКЦИИ

(Краткое содержание)

В статье излагается теоря транзистора, работающего при высоких уровниях инжекций (для стационарного режима). Излагаемая реория представет собой новую формулровку теории А. В. МАТЗ [11] указанную автором в предыдущей работе [13].

Учитывая эффект электрического поля в области базы транзистора и поверхностной ркомбинации, в статье вюводится выражение для коэффицента усиления по току, в зависимости от уровня инжекции и от скорости поверхсностей рекомбинации.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DU TRANSISTOR AUX GRANDES NIVEAU D'INJECTIONS

(Sommaire)

On expose une théorie du transistor aux grandes niveaux d'injection pour le regime stationaire. Cette theorie este une reformulation simplifiée de la theorie de A. W. MATZ [11], reformulation indiquée par l'auteur dans une note precedente [13].

En considerant l'effet du champ electrique dans la base et la recombinaison de surface, on obtient une formule pour le facteur d'amplification en courant en fonction du nivel d'injection et de la vitesse de recombinaison de surface.

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF THE JUNCTION TRANSISTOR AT HIGH INJECTION LEVELS

(Summary)

In this work is presented a theory of the junction transistor at high injection levels (for the d.c. regim). This theory is a simplified reformulation of the theory of A. W. MATZ [11] as indicated by the author in a previous note [13].

Taking into account the effect of the electric field in the base and the surface recombination, one obtains an expression for the d.c. amplification factor of the transistor in function of the injection level and of the surface recombination velocity.

BEITRAGE ZUR THEORIE DES TRANSISTORS BEI HOHEN INJEKTIONSNIVEAUS

(Zusammenfassung)

Es wird eine Theorie des Transistors bei hohen Injektionsniveaus für der stationären Betrieb dargelegt. Diese Theorie ist eine vereinfachte Neuformulierung der Theorie von A. W. MATZ [11], Neuformullerung die von Verfasser in einer früheren Note angekündigt wurde [13].

Indem man den Effekt des Elektrischen Feldes in der Basis und die Oberflächen-Rekombination in Betracht zieht, erhält man eine Formel für den Stromversärkungsfaktor als Funktion des Injektionsniveaus und der Oberflächen-rekombinationsgescwindigkeit.

MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1883

TIPOGRAFIA
INVĂȚĂMÎNTULUI
str. Mihai Vodă nr. 44-46
BUCUREȘTI
C. 668

INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană şi engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele şi iniţialele de pronume ale autorului, titlul şi volumul lucrării, editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIII — FASCICOLA 2

APRILIE — IUNIE

1961

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec lamention „pentru BuletinulInstitutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIII — FASCICOLA 2

APRILIE — IUNIE

1961

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*; Conf. *I. Berceanu*; Prof. Dr. *E. Bratu*; Prof. *Gh. Buzdugan*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*; Acad. Prof. Dr. *Tr. Negrescu*; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*; Prof. *M. Postelnicescu*; Prof. Dr. *R. Rădulet*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. Dr. *T. Tănăsescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei R.P.R

SUMAR

ȘTIINȚE SOCIALE

V. ROMAN — Unele aspecte ale implicațiilor militare ale revoluției tehnico-științifice contemporane (III) 13

MATEMATICĂ

C. IONESCU-BUJOR — Asupra unor transformări optice . . 31

FIZICĂ

I. AGÎRBICEANU — Structura straturilor subțiri de dialectrici și proprietățile lor optice 55

ORGANIZAREA ȘI PLANIFICAREA ÎNTREPRINDERILOR

H. GRIGORIU, V. KRAFT — Unele aspecte ale folosirii indicatorilor tehnico-economici în determinarea și utilizarea rezervelor interne în producția de îngrășăminte cu fosfor la fabrica „Petru Poni" — Valea Călugărească 61

CHIMIE

A. IANU — Über das Verhalten einiger Bleioxid gemische beim erhitzen und über die Möglichkeit ihrer praktischen Verwertung 87

CONSTRUCȚIA DE MAȘINI

GH. MANEA, M. R. MUSTAFA — Contribuții la calculul lagărelor axiale cu alunecare 97

O. OPREAN — Studiul experimental și proiectarea unui variator hidraulic 125

ENERGETICA

M. BERCOVICI — Calculul matricial al rețelelor electrice . . 147
S. CĂLIN — Sinteza generală a sistemelor automate liniare prin intermediul caracteristicilor logaritmice atenuare — frecvență ale sistemelor în stare deschisă 175

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

В. РОМАН — Некоторые аспекты отражения современной научно-технической революции в военной области (III) . 13

МАТЕМАТИКА

К. ИОНЕСКУ-БУЖОР — Об оптических преобразованиях . 31

ФИЗИКА

И. АГЫРБИЧАНУ — Структура диэлектрических тонких пленок и их оптические свойства 55

ОРГАНИЗАЦИЯ И ПЛАНИФИКАЦИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

Х. ГРИГОРИУ, В. КРАФТ — Некоторые виды применения технико-экономических показателей в определении и использовании внутренних резервов, при производстве фосфорных удобрений на фабрике „Петру Пони"-Валя Кэлугэряскэ 61

ХИМИЯ

А. ИАНУ — О поведении некоторых смесей окиси свинца при нагревании и о возможности их практического применения 87

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Гх. МАНЯ, М. Р. МУСТАФА — Вклад в расчете упорных подшипников 97

А. ОПРЯН — Экспериментальное исследование и проэктирование гидравлического вариатора 125

ЭНЕРГЕТИКА

М. БЕРКОВИЧ — Расчет электрических сетей с матрицами 147
С. КЭЛИН — Общий синтез автоматических систем с помощью логарифмических амплитудных часточных характеристик систем в разомкнутом состоянии . . . 175

CONTENTS

SOCIAL SCIENCES

V. ROMAN — Some Aspects of the implications consed in the military sphere by the contemporany tehnico-scientific revolution (III) 13

MATHEMATICS

C. IONESCU-BUJOR — Optic transformations 31

PHYSICS

I. AGÎRBICEANU — The structure of dielectric thin fils and their optical properties 55

ORGANISATION AND PLANNING OF ENTREPRISES

H. GRIGORIU, V. KRAFT — Some aspects of utilization of technical-echonomic indexes in establishing the use of internal reserves in the manufacturing of phosphorus fertizers at the „Petru Poni" factory 61

CHEMISTRY

A. IANU — Concerning the behaviour of lead oxide mixtures on beating, and their possible practical use 87

MECHANICAL ENGINEERING

CH. MANEA, M. R. MUSTAFA — Contribution to the calculation of the axial bearings 97

A. OPREAN — Experimental research and design of a hydraulic variator 125

ELECTRIC POWER

M. BERCOVICI — Matrix computation of electric networks . 147
S. CALIN — Control system synthesis using logarithmic atenuation — frequency diagrams of open-loap systems . . . 175

SOMMAIRE

SCIENCES SOCIALES

V. ROMAN — Quelques aspects de l'implication militaire de la révolution technique et scientifique contemporaine (III) . 13

MATHEMATIQUES

C. IONESCU-BUJOR — Sur les transmormations optiques . . 31

PHYSIQUE

I. AGÎRIBCEANU — La structure des couches minces diélectriques et les propriétès optiques 55

ORGANISATION ET PLANIFICATION DES ENTREPRISES

H. GRIGORIU, V. KRAFT — Quelques aspects de l'utilisation des indicateurs tehnico-économiques dans la détermination et l'emploi des reserves internes pour la production d'engrais phosphatés la fabrique „Petru Poni" — Valea Călugărească. 61

CHIMIE

A. IANU — Sur le comportement de certains mélanges d'oxydes de plomb pendant la chauffage et sur la possibilité de leur application pratique 87

CONSTRUCTION MECANIQUE

GH. MANEA, M. R. MUSTAFA — Contribution au calcul des paliers axiaux 97

A. OPREAN — Étude éxperimentale et projet d'un variateur hydraulique 125

ÉNERGÉTIQUE

M. BERCOVICI — Calcul matricial des réseaux életriques . . 147
S. CALIN — La synthèse générale des systêmes automatiques en utilisant les caractéristiques logaritmique atténuation — frequence des systemes avec la boucle ouverte . . . 175

INHALT

SOZIALWISSENSCHAFTEN

V. ROMAN — Einige aspekte der militärischen Auswirkungen der technisch- wissenschaftlichen Revolution der Gegenwart (III). 13

MATHEMATIK

C. IONESCU-BUJOR — Optische Transformationen . . . 31

PHYSIK

I. AGÎRBICEANU — Struktur dünner Dielektrik filme und ihre optichen Eigenschaften 55

DIE ORGANISIERUNG UND PLANIFIZLERUNG DER BETRIEBE

H. GRIGORIU, V. KRAFT — Einige probleme der anwendrung der technisch- ökonomische Indikatoren zur Feststellung und Verwertung der inneren Reserven zur Produktion von phosphor- düngemitteln in der Fabrik „Petru Poni" — Valea Călugărească 61

CHEMIE

A. IANU — Über des Verhalten einiger Bleioxidgemische beim erhitzen und über die Möglichreit ihrer praktischen Verwertung 87

MASCHINENBAU

GH. MANEA, M. R. MUSTAFA — Beitrag zu Berechnung der axialgleitlager 97

A. OPREAN — Experimentelle Untersuchung und Projektierung eines hydraulischen Drehzahlreglers 125

ENERGETIK

M. BERCOVICI — Matrizenrechnung elektrischer Netze . . 147
S. CALIN — Allgemeine synthese der Automatischen Systeme mit Hilfe der logaritmischen charakteristiken Frequenz — Dämpfung der Systeme mit offenem Regelkreis . . . 175

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola II

ȘTIINȚE SOCIALE

UNELE ASPECTE ALE IMPLICAȚIILOR MILITARE ALE REVOLUȚIEI TEHNICO-ȘTIINȚIFICE CONTEMPORANE (III) *)

de V. ROMAN

Este un fapt de necontestat că alături de marile transformări social-economice pe plan mondial și a revoluției tehnico-științifice contemporane generația noastră asistă și la înfăptuirea unei *revoluții în domeniul tehnicii militare*. Asistăm și în acest din urmă domeniu la o revoluție într-adevăr excepțională nemaiîntîlnită în decursul secolelor și care răstoarnă radical tot ce s-a cunoscut pînă acum în materie de tehnică militară, schimbă radical întreaga problemă a războiului.

Această revoluție s-a desfășurat în diferite direcții dintre care pe două principale: 1. — puterea de distrugere și 2. — mijloacele de purtare a acestei puteri de distrugere. Bomba cea mai puternică, în 1944, era de 10 tone TNT (trinitrotoluen) cu o rază de acțiune (distrugere) de cca. 100—150 metri. Prima bombă atomică de la Hiroșima, avea o rază de acțiune de 2.000—2.500 metri, în afară de acțiunea radioactivă. Bomba termonucleară de astăzi de 20 de megatone (echivalentă cu 20 milioane tone TNT) — o cantitate mult mai mare decît s-a consmuat în tot timpul celui de al doilea război mondial de către toți beligeranții — emite o asemenea căldură încît la 45 km de centrul exploziei se pot măsura 30 de calorii pe cm pătrat și deci se înregistrează o ardere de gradul trei (în afară de efectul destructiv și radioactiv). În privința purtătorului e suficient de amintit racheta balistică intercontinentală lansată de sovietici la 20 ianuarie a. c. și care la o viteză de 26 mii km pe oră, a parcurs 12.500 km cu o preciziune ca să spunem așa „milimetrică".

Această evoluție a lucrurilor sau mai bine zis această revoluție în domeniul tehnicii militare are consecințe imense, aproape incomensurabile, răsturnîndu-se toate concepțiile clasice legate de război, creindu-se un sistem strategic cu totul nou.

Într-adevăr în noua situație s-au răsturnat toate noțiunile strategiei de pînă acum. Așa bună oară războaiele din trecut au avut de regulă un început formal, o durată în care beligeranții s-au străduit să-și mobilizeze resursele umane și materiale pentru a înclina balanța raportului de forțe de partea

*) Vezi și numerile 4—1960 și 1—1961.

lor, precum și un sfîrșit formal, marcat prin iscălirea fie a unui compromis fie a unei capitulări. Astăzi nimeni nu prea mai știe cum se va putea prelungi războiul început, în vederea unei mobilizări, și cu atît mai mult opri un război atomic odată dezlănțuit. Și în nici un caz nu prea se știe dacă va mai exista posibilitatea, ca cineva să iscălească actul despre terminarea războiului.

Raportul forțelor militare, care înainte era relativ ușor de stabilit (numărul diviziilor în primul rînd) și care, de regulă, era hotărîtor pentru o bătălie, pentru un război, este astăzi mult mai greu de stabilit.

Pe aceeași linie se înscrie și numărul, densitatea populației și marile concentrări industriale pe teritorii restrînse care, în concepția clasică, erau factori ai puterii militare. O dată cu apariția armelor nucleare, acești factori de putere se transformă în factori de slăbiciune teritoriile reduse ca suprafață și cu populație densă și concentrări industriale devenind cauze ale vulnerabilității.

Și vechile noțiuni ca spatele frontului și refugiile își pierd cu totul vechea lor semnificație, spatele frontului nemaixistînd în condițiile războiului balisticonuclear, iar refugiile — la orice adîncime fantastică s-ar construi ele — nu pot feri și salva pe locatarii lor căci viața fără aer — după cum se știe — nu s-a inventat încă.

Iată parametrii considerați pînă foarte recent drept imuabili și care astăzi nu mai au nici o valoare reală. Noi arme — noi concepții.

Chiar și asemenea noțiuni ca frontiera, teritorii neutre și-au pierdut vechea lor semnificație. În vestita formulă a lui Litvinov agresorul era considerat acel care trece cu ajutorul unor forțe armate frontiera altuia. Oare în secolul balisticonuclear se mai poate menține această definiție? Sau cealaltă formulă din trecut, determinată de existența unor teritorii neutre situate între doi beligeranți, — „fără vecinătate nu există ostilitate" mai are astăzi vreo valabilitate?

Iată deci adevărate răsturnări de situații care determină la rîndul lor și răsturnarea radicală a strategiei contemporane. Rezultă deci că trăsătura principală a unui război rachetonuclear, provocat de imperialiștii agresivi, ar fi că inițiatorii lor nu vor putea scăpa de urmările catastrofale ale propriilor lor crime.

Și totuși monopolurile de armament, imperialiștii agresivi își concentrează eforturile în direcția „continuei perfecționări" a armelor de distrugere în masă.

Ce speră ei?

Nu încape îndoială că ei nădăjduiesc că eforturile lor le vor permite să „ajungă din urmă pe ruși" în domeniul rachetelor, al altor arme cît și în diferite ramuri ale științelor naturii, teoretice și experimentale, ba chiar să „depășească nivelul la care au ajuns rușii", asigurîndu-și, în acest fel, „superioritatea" mult dorită.

În legătură cu aceasta se cuvine să facem două precizări: prima: că aceste eforturi ale militariștilor americani și asociaților lor, într-o crimă

cu greu vor putea avea șanse de reușită și a doua : chiar dacă vor înregistra „succese" în acest domeniu, între timp nici rușii nu vor sta pe loc.

De altfel, distanțarea științei și tehnicii sovietice cît și a tehnicii militare sovietice față de cea americană nu poate fi privită ca un fenomen întîmplător. Dacă ar fi așa atunci, firește, calculele de mai sus ale americanilor ar putea avea o anumită șansă de reușită. Dar lucrurile nu stau nici pe departe așa.

Ajungerea din urmă a științei și tehnicii din țările capitaliste de către știința și tehnica sovietică, ca primă fază, depășirea acestui nivel, ca o a doua fază, cît și mărirea continuă a distanței dintre aceste două niveluri, ca o a treia fază a unuia și aceluiași proces de dezvoltare a științei și tehnicii sovietice este expresia unui proces legic care reflectă superioritatea incontestabilă a însăși societății socialiste, ce se afirmă tot mai categoric în domeniul forțelor de producție cît și în domeniul științei și tehnicii.

Această legitate își găsește expresia concretă și în domeniul tehnicii militare. Așa cum științele naturii și cele sociale au condiții de dezvoltare cu totul deosebite în socialism, ceea ce le asigură superioritatea față de știința din lumea capitalistă, tot așa și în domeniul științei militare, în domeniul tehnicii și al artei militare, socialismul creează acele condiții obiective și subiective care fac ca superioritatea socialismului să se manifeste și pe plan militar.

Trebuie subliniat că și în domeniul militar, al științei și tehnicii militare, superioritatea lagărului socialist și în primul rînd a U.R.S.S. va crește necontenit și va cuprinde tot mai numeroase domenii, la fel cum se va întîmpla și în domeniul superiorității pe tărîm științifico-tehnic general. Această tendință obiectivă a dezvoltării neîntrerupte și tot mai rapide nu înseamnă, desigur că țările capitaliste, îndeosebi în domeniul militar, nu vor avea realizări noi, nu se vor apropia într-un domeniu sau altul de realizările U.R.S.S.. Această dezvoltare relativ paralelă va avea loc însă pe fondul general al distanțării continue a U.R.S.S.

Cine nu vede caracterul legic al afirmării și creșterii superiorității lagărului socialist și pe tărîm militar se situează pe poziții false, trage concluzii necorespunzătoare care îl împing pe un drum ireal, funest, pe cel în cauză. În această situație se găsesc în primul rînd forțele agresive ale imperialiștilor americani, incapabile din cauza pozițiilor de clasă să aprecieze just și lucid perspectiva, sensul dezvoltării istorice, sensul marilor schimbări care s-au produs în ultimele decenii în toate domeniile vieții sociale.

*
* *

O problemă care se dispută vehement de către specialiști militari și sociologi burghezi este corelația dintre revoluția tehnico-științifică contemporană și revoluția în domeniul tehnicii militare, respectiv dacă revoluția tehnico-științifică contemporană a determinat revoluția în domeniul tehnicii militare sau invers.

S-ar părea, la prima vedere, că e vorba de problema găinii și a oului.

S-ar părea că această dispută ar fi lipsită de orice sens. Totuși elucidarea acestui lucru are o mare importanță teoretică și practică.

Oricît de straniu ar părea, în occident se răspîndește cu o insistență demnă de o cauză mai bună, ideia că fără descoperirile, „realizările" în domeniul militar n-a exista pur și simplu progres al științei și tehnicii, un progres al omenirii. Revoluția în domeniul tehnicii militare a determinat revoluția tehnico-științifică contemporană. Iată care este substratul „întîietății" revoluției în domeniul tehnicii militare față de revoluția tehnico-științifică contemporană.

Președintele marelui trust american „General Dinamics Corporation" Franc Pace a spus, în septembrie 1957, în fața adunării „Asociației americane a bancherilor" că *„cheltuielile militare, cercetările militare au contribuit la revoluția științifică din America și au servit ca un început al noii ere de avînt economic și cultural... progresul tehnic și științific au devenit posibile datorită cheltuielilor noastre pentru apărare"* (adică cheltuielile de război).

Microsociologii francezi aleargă în ajutorul miliardarilor americani. Astfel în organul lor de presă se expune într-un studiu, „documentat" ideia că războaiele au avut nu numai un caracter distructiv, ci au fost și *„generatoare de progres — tehnic și economic"* că datorită celor două războaie mondiale *„industria a putut face în decursul ultimilor cincizeci de ani progrese considerabile"*, că *„de-a-lungul întregii istorii, războiul apare ca unul dintre cei mai puternici revelatori ai forțelor de creație ale omului"* [1].

Făcînd largi incursiuni istorice și analize „marxiste" (citîndu-i nu odată pe Marx și Engels), presărînd argumentația cu unele constatări, afirmații și idei juste, cum ar fi cele legate de corelația dintre dezvoltarea economică și perfecționarea armelor și artei militare, studiul respectiv ocolește totuși esența problemelor legate de război. Ori tocmai în această escamotare a fondului problemei constă și viciul principal al studiului.

Trebuie spus că „ideea" — „progresul omenirii se datorește războaielor" nu este nouă. De la fericitul Augustin din secolul al IV-lea și pînă în epoca victoriei modului de producție capitalist găsim în repetate rînduri expusă, în special de către diferiți reprezentanți ai bisericii, ideia divinității, eternității și necesității războiului. Cei mai diferiți ideologi ai burgheziei reacționare, Proudhon [2], Renan [3], Kant [4], Hegel [5], Nietzsche [6], Klausewitz [7],

---

[1] „... *tot ce posedă ca energie fizică și morală, ca inteligență, virtutea civică, patriotism, știința acumulată, geniu industrial . . . războiul le scoate în evidență*" (Proudhon: „La guerre et la paix". Paris, 1937).

[2] „Cahiers Internationeaux de Sociologie". Iulie-decembrie 1959, Paris, pag. 35—35.

[3] „... *războiul este una din condițiile progresului, este lovitura de bici care împiedică un popor să adoarmă*" (Renan: „Le reforme intelectualle et morale de la France" Paris, 1881, p. 101).

[4] „... *războiul este o pîrghie în plus pentru a dezvolta pînă la cel mai înalt grad talentele utile civilizației*" (Kant: „Kritik des Urteilskraft". Leipzig. 1902. p. 81).

[5] „... *războiul ferește popoarele de putreziciunea care ar interveni ca o consecință a unei păci îndelungate*" (Hegel: „Philosophie des Rechts", vol. IX, p. 433).

[6] „... *războiul sfințește totul. Nu pacea înainte de toate, ci războiul*". (Nietzsche: „Also sprach Zarathustra". Leipzig. p. 66).

[7] „... *războiul singur poate reacționa împotriva acelor moliciuni ale sufletelor, care duc un popor la ruină*" (Klausewitz: „Vom Kriege". Capiaolul 6. Apărut în timpul lui Hitler).

Moltke [1] și mulți alții s-au situat pe poziția necesității războiului ca un factor deosebit de important, ba chiar decisiv în mersul ascendent al omenirii.

Dacă mai amintim aci și pe hitleriștii și ideologii lor — Spengler, Stegemann, Goebbels, o facem doar pentru a sublinia și mai mult înrudirea actualilor apologeți ai războiului cu predecesorii lor de trist renume.

Firește că toate aceste teorii apologetice nu pot fi comparate cu cele citate din studiul microsociologilor francezi. Nimeni nu-și mai poate permite astăzi reeditarea întocmai a acestor absurdități. De data aceasta felul nou de a pune problema constă în aceea că „demonstrația" influenței „binefăcătoare" a războaielor din trecut asupra dezvoltării tehnicii, a științei, a forțelor de producție etc. este făcută nu de pe poziții apologetice, ci de pe poziții „științifice" ba chiar „marxiste" că — în ce privește prezentul — se vorbește nu de război ca factor de progres, ci de influența „binefăcătoare" *a cercetărilor* în domeniul militar asupra progresului tehnico-științific în general.

Dar chiar în ce privește trecutul putem considera oare întîmplător și lipsit de o semnifiație cît se poate de precisă faptul că studiul se referă la *„progresele datorate războiului"*, trecînd cu totul cu vederea aspectul său destructiv, efectul de frînă jucat de războaiele de jaf și cotropire, de războaiele imperialiste în dezvoltarea societății? Firește că evitarea unor asemenea aspecte primordiale și esențiale au tîlcul lor bine determinat. A nu vorbi decît despre tecut și despre o anumită latură a corelației dintre război și societate, aceea dintre război și progresul tehnico-științific înseamnă o încercare serioasă de a induce în eroare, de a dezarma pe cei de a căror voință depinde, în ultimă instanță, soarta păcii.

Din partea tuturor teoreticienilor burghezi și a apologeților în slujba lor, are loc, vădit, o încercare serioasă de mistificare a unor adevăruri de necontestat. Ei toți încearcă, fiecare, în felul său, să pună semn de egalitate, de identitate, să confunde, în mod conștient, două lucruri în ceea ce privește efectul lor asupra progresului social: revoluția tehnico-științifică contemporană și revoluția în domeniul tehnicii militare.

Este adevărat (și acest adevăr am încercat să-l prezentăm la începutul acestui studiu) că marile descoperiri în domeniul științei și tehnicii au avut totdeauna, de-a-lungul întregii dezvoltări milenare a societății omenești o înrîurire puternică și tot mai puternică asupra dezvoltării sociale. A înlocui însă — după cum face bughezia și acoliții ei, sociologii burghezi —, în mod cu totul arbitrar, marile progese în domeniul științelor naturii și a tehnicii militare și a afirma că nu revoluția tehnico-științifică contemporană, ci revoluția în domeniul tehnicii militare împinge societatea umană înainte pe calea progresului este o absurditate, un fals grosolan.

Cu toate acestea trebuie să spunem — oricît de straniu ar părea aceasta — că războaiele, invențiile în domeniul militar au avut în trecut și au,

[1] „... *fără război lumea s-ar înnămoli în materialism*" (Moltke: Dintr-o scrisoare din 1880.

într-un anumit sens și într-o anumită măsură și astăzi, o influență asupra dezvoltării științei și tehnicii în general. Ar fi greșit să negăm anumite evidențe de necontestat, să ocupăm o poziție nihilistă în problema corelației dintre război și progresul tehnic. Este de netăgăduit faptul că necesitățile claselor dominante în diferitele epoci istorice, pregătirile făcute de ele în vederea purtării războaielor au stimulat, au împins înainte perfecționările și investițiile tehnice în general. În multe privințe atît în antichitate cît și în epoca renașterii multe dintre invențiile mecanice se datoresc necesităților suscitate de război. Studiind istoria dezvoltării armamentului și rolul pe care l-a jucat el în arta militară a epocilor trecute se pot trage o serie de concluzii instructive. Trebuie remarcat în primul rînd că în istoria de pînă acum a societății omenești armamentul a fost, de regulă, domeniul în care au fost folosite cu precădere noile descoperiri tehnice. De pildă, descoperirea metalelor a dus la fabricarea diferitelor arme din metal. După cum demonstrează datele arheologice, armele din metal au apărut de obicei concomitent sau chiar înaintea uneltelor de muncă din metal.

Mijloacele pirotehnice, apărute ca urmare a dezvoltării tehnologiei chimice, au fost folosite întîi sub formă de amestecuri incendiare de luptă (Bizanț), carburant pentru rachete (China). Arma de foc, apărută cu apoximativ 1.000 de ani în urmă, în China, a fost în fond prima formă de motor termic, transformînd energia eliberată prin arderea carburantului (praful de pușcă) în lucrul mecanic necesar pentru aruncarea proiectilului. Au trecut multe secole pînă cînd această idee a transformării energiei chimice, prin ardere, în lucru mecanic s-a ivit în alte domenii de producție. Este caracteristic faptul că primele încercări de a construi un motor termic au fost orientate spre folosirea într-un asemenea motor a arderii prafului de pușcă. Tocmai această cale a urmat-o cunoscutul fizician din secolul al XVII-lea, Huyghens, încercînd să rezolve problema motorului termic. Similar s-au petrecut lucrurile și cu o serie de alte descoperiri strălucite — de exemplu, submarinele.

Perfecționarea rapidă a avioanelor, a motoarelor are loc pentru prima oară în timpul primului, iar mai tîrziu în timpul celui de al doilea război mondial. Primele succese în domeniul nuclear, al radiolocației, electronicii, al rachetelor cît și ramurile industriei noi legate de aceste domenii, își cunosc nașterea lor „forțată" în anii pregătirii și în timpul ultimului război. Însuși chibernetica teoretică care joacă un rol din ce în ce mai mare în ansamblul științelor, a crescut nemijlocit din studiile făcute de N. Wiener privind reglarea automată a apărării antiaeriene, pe obiective în stare de mișcare rapidă, în timpul celui de al doilea război mondial. Este de netăgăduit de asemenea că necesitățile războiului impun în același timp și o producție în masă a armelor de tot felul, a mijloacelor de transport, a echipamentului etc. ceea ce a dus la perfecționarea forțelor de producție, a metodelor de producție, la crearea semiautomatelor, la introducerea sau perfecționarea liniilor automate, cît și la calificarea, specializarea muncitorilor. Chirurgia, în special neurochirurgia este copilul războiului.

Abordînd această problemă economistul american Gerhardt Kolm spune: *„Valul recentelor noutăți tehnice e nu numai rezultatul dezvoltării științei... el a fost de asemenea accelerat de eforturile tehnologice excepționale din*

timpul războiului. O mare parte din tehnica creată în vederea războiului și-a putut găsi ulterior unele aplicații pentru scopuri pașnice. În felul acesta, dezvoltarea tehnologică care, în alte condiții, ar fi avut nevoie de mai multe decenii ca să se realizeze, a fost comprimată într-o foarte scurtă fracțiune de timp".

Este un fapt de netăgăduit că nevoile militare ale imperialiștilor au stimulat creșterea volumului cercetărilor științifice, au contribuit — într-o anumită măsură — la dezvoltarea cercetărilor și descoperirilor tehnico-științifice în general. Ba chiar, pe baza diferitelor statistici, se poate afirma că *militarizarea* (factorul militar) a fost o forță, chiar *forța motrice principală a revoluției tehnico-științifice contemporane în S.U.A.* [1]

Toate acestea sînt constatări indiscutabile și nimeni nu se va grăbi să le nege. A te opri însă la aceasta și a nu pătrunde în esența corelației război-societate înseamnă a devia o problemă științifică pe cărările războiului rece, a cursei înarmărilor.

Trebuie spus cu toată tăria și claritatea necesară că în *primul* rînd, *progresul tehnic și tehnico-științific nu este legat în mod necesar de război;* omenirea a cunoscut perioade de acalmie și avînt multilateral (și epoca trecerii de la capitalism la socialism a unor țări din Europa și Asia o dovedește cu prisosință) în care progresul tehnic n-a fost indisolubil condiționat de dezvoltarea pregătirilor militare; în al *doilea* rînd, că *distrugerile materiale și de vieți omenești pricinuite de război au fost o frînă*, din ce în ce mai serioasă, *în dezvoltarea omenirii* un mijloc de întîrziere a progresului sub toate aspectele presupunînd, printre altele, epoci întregi de refacere și recuperare a pierderilor suferite, în al *treilea* rînd, că *fără război omenirea ar fi avansat într-un ritm mai accelerat pe drumul progresului istoric.*

Față de prejudiciul colosal pe care militarismul îl aduce dezvoltării științei și tehnicii, folosul unilateral și relativ al cercetărilor cu caracter militar este incomparabil mai mic și nu-și poate justifica existența. Alianța funestă a științei cu militarismul duce, în ultimă instanță, la consecințe nefaste pentru omenire.

Există, fără îndoială, o legitate a progresului istoric și anume cea a accelerării progresului social, care, în societățile bazate pe exploatare, acționează într-un fel cu totul deformat, frînînd acest progres, între altele tocmai datorită războaielor —, dar care se manifestă deja cu o putere deosebită în țările socialiste și care va avea cîmp cu totul liber de acțiune cînd vor dispare definitiv războaiele și imensele cheltuieli de război, cînd toate eforturile societății omenești vor fi îndreptate unic și exclusiv spre scopuri pașnice. În această perioadă a progresului social interdependența dintre progres și regres, care este cu capul în jos în toate societățile antagonice, își va

[1] Trebuie spus că nu aceasta a fost caracteristic pentru dezvoltarea științei și tehnicii în S.U.A. în trecut. Chiar și în preajma celui de-al doilea război mondial, cînd în Germania hitleristă și în alte țări imperialiste dezvoltarea științei și tehnicii era subordonată necesităților militare, în S.U.A. situația încă nu era identică. Începînd de la declanșarea celui de al doilea război mondial situația se schimbă radical; S.U.A. trece în fruntea țărilor imperialiste din acest punct de vedere. Greutatea specifică a cercetărilor cu caracter militar crește continuu și precumpănește de mult și tot mai vîrtos în ansamblul cercetărilor științifice și tehnice.

schimba radical caracterul său, societatea avînd posibilitatea unei dezvoltări progresive, accelerate, nelimitate.

Aceste constatări au o actualitate cu atît mai mare cu cît ne gîndim la ceea ce ar putea aduce un al treilea război mondial. În epoca bombelor atomice și a rachetelor intercontinentale și cosmice, cînd toate noțiunile și concepțiile clasice legate de război s-au răsturnat cu desăvîrșire, a continua susținerea unor teze, care nici pentru trecut nu sînt valabile deși au avut o largă circulație, este o acțiune mai mult decît absurdă. Este cu atît mai mult absurd a susține varianta modificată a vechei teze războinico-militariste și care constă în esență în a nu condamna cercetările și eforturile tehnico-științifice legate de problemele militare sub pretextul înrîuririi lor pozitive asupra științei și tehnicii în general. Aceste teze sînt — după cum spunea Lenin în 1913 referindu-se la asemenea „teoreticieni" — „pălăvrăgeli ale unor netrebnici".

Firește și aci are loc aceeași mistificare a lucrurilor specifică tuturor avocaților unor cauze nedrepte. Adevărul este răsturnat cu capul în jos. Eforturile în domeniul cercetărilor militare prin caracterul lor monstruos, unilateral nu numai că nu contribuie la dezvoltarea întregului front al științei și tehnicii, ci, dimpotrivă, reprezintă o frînă foarte serioasă a progresului omenirii.

În paranteză fie spus : faptul că S.U.A. și-au concentrat cercetările lor științifice exclusiv sau precumpănitor în diferite domenii militare a determinat nu dezvoltarea mai rapidă a întregului front tehnico-științific, ci dimpotrivă frînarea acestui front și — pînă la urmă — acest fel de abordare a problemelor a avut o înrîurire negativă și asupra domeniilor militare propriu zise.

În orbirea lor, agresorii americani și oamenii de știință în slujba lor nu și-au dat și nu-și dau seama nici astăzi de realitatea nouă a epocii noastre în ceea ce privește raportul dintre științele naturii și tehnica militară. Această nouă realitate ne arată că în măsura în care nivelul științei în general este mai ridicat în aceeași măsură se creează condiții obiective reale și pentru făurirea unei tehnici militare superioare și nici decum invers cum consideră americanii. De altfel tocmai aici se găsește explicația faptului că în domeniile hotărîtoare ale tehnicii militare americanii au rămas în urma sovieticilor, deși eforturile propriu zise ale americanilor în domeniul militar au fost, probabil, mai mari. Marile realizări științifice și tehnice ale sovieticilor, care au depășit pe cele ale americanilor au avut însă, datorită dialecticii implacabile a lucrurilor, o influență covîrșitoare și asupra perfecționărilor din domeniul tehnicii militare.

Revenind la tema abordată, adică a influenței „pozitive" a eforturilor tehnico-științifice în domeniul militar asupra progresului științei și tehnicii în general, trebuie să observăm că avem de-a face aci, într-un fel, cu aceeași logică care susține necesitatea războiului rece, a cursei înarmărilor în vederea „evitării șomajului, a crizelor economice". Nu ne vom opri asupra acestei „teorii" a cărei demascare cade în sarcina economiștilor. Demn de relevat este însă faptul că combaterea unor asemenea teze se face astăzi nu numai de către economiștii marxiști, ci și de un număr crescînd de

economiști burghezi din occident, care își dau seama că la capătul războiului rece se găsește, cel cald, foarte cald de ale cărui urmări nu ar putea scăpa nimeni.

Cine poate oare să se mai îndoiască de faptul că folosirea celor 100 de miliarde de dolari (bugetele de război), acelor 100 milioane de oameni (din armatele și industriile de război) cît și a zecilor de mii de oameni de știință (din domeniile militare) în scopuri pașnice ar duce la ridicarea simțitoare și rapidă a bunelstări generale? Aceasta nu este o „presupunere", ci o certitudine și pentru aceasta merită să lupți.

Teoria paradoxală și îngrozitoare, conform căreia drumul progresului științific și tehnic trebuie să fie pavat cu cheltuieli militare enorme, irosirea monstruoasă a resurselor materiale și a forțelor creatoare imense a geniului uman, și, pînă la urmă cu cadavrele a milioane și milioane (poate sute de milioane) de oameni nu poate avea și nici nu are nici o justificare de nici un fel. Numărul celora care își dau seama tot mai clar de acest adevăr crește necontenit. Deputatul englez Philip Noel Baker a spus că *„e ridicol și absurd să presupunem că toate aceste invenții (cum e de exemplu aviația) n-ar fi fost realizată niciodată dacă n-ar fi existat cercetările militare"*.

„Teoria" rolului binefăcător al cercetărilor în domeniul tehnicii militare pentru dezvoltarea tehnicii în general se dovedește tot atît de perimată ca și apologia fățișă a războiului ca factor de progres, a cărei variantă este. Produs ideologic al unor condiții social-economice și politice care și-au trăit traiul, ea trebuie să facă loc concepției realiste, lucide potrivit căreia în zilele noastre omenirea își croiește drumul spre progres nu cu prețul unor sacrificii sîngeroase și inutile, ci pe baza unirii eforturilor tuturor popoarelor, în vederea dezarmării generale și totale, ce va deschide științei și tehnicii noi și însemnate orizonturi.

*
* *

Un aspect al implicației militare a revoluției tehnico-științifice contemporane este însuși *corelația dintre dezvoltarea tehnicii militare*, a revoluției contemporane în domeniul tehnicii militare *și războiul*, (respectiv dintre dezvoltarea tehnicii militare și dezvoltarea social-politică) stabilirea justă, absolut științifică a acestei corelații fiind de o importanță uriașă pentru contemporaneitate, pentru dezvoltarea relațiilor internaționale actuale, pentru însăși soarta păcii.

Trebuie spus, de la început, că această problemă este extrem de complexă, îmbracă o serie de fenomene contradictorii și deci, cu atît mai mult, scoaterea pe prim plan din noianul considerentelor și factorilor care acționează pe acest tărîm, a acelora care sînt principali și hotărîtori, (fără neglijarea celorlalți factori, cu caracter secundar) este o condiție imperioasă a aprecierii juste a corelației și deci a consecințelor și a concluziilor ce decurg de aci.

O judecată rapidă, neaprofundată ar putea să ducă la concluzia că dacă este just că dezvoltarea științei și tehnicii influențează dezvoltarea socială (ceea ce s-a arătat în primul capitol al acestui studiu), nu acelaș

lucru se poate spune despre tehnica militară. De sigur aceasta ar fi o concluzie pripită și greșită. Studiul atent (istoric) al dezvoltării armelor, a tehnicii militare arată că apariția unor arme noi în diferite epoci istorice au avut în mod necesar, consecințe nu numai cu caracter pur militar (asupra artei militare), ci și asupra dezvoltării sociale și politice.

Este marele merit al lui Engels (care s-a ocupat mai îndeaproape de problemele militare) de a fi scos la iveală această legătură, de a fi arătat concret această interacțiune. Vorbind despre apariția armelor de foc (în secolul al XIV-lea) Engels preciza că apariția lor „*a acționat în chip revoluționar nu numai asupra ducerii războiului însuși, ci și asupra relațiilor politice de dominație și supunere*“ [1].

Engels arată și concret, cum a acționat această armă nouă „*Armele de foc au fost . . . de la început arme ale orașelor și ale monarhiei în ascensiune, care se sprijinea pe orașe împotriva nobilimii feudale. Zidurile de piatră ale cetăților nobililor, inexpugnabile pînă atunci, cedară în fața tunurilor orășenilor, gloanțele slobozite din puștile tîrgoveților străpungeau armurile cavalerilor. Odată cu cavaleria îmbrăcată în zale a nobilimii, s-a prăbușit și dominația nobilimii . . .*“ [2].

Iată poziția, concludentă a lui Engels în problema raportului dintre tehnica militară și dezvoltarea socială.

Clasicii marxism-leninismului au relevat însă un aspect și mai categoric al influenței tehnicei militare asupra dezvoltării social-politice, anume caracterul dialectic al dezvoltării tehnicii militare în sensul consecințelor contrarii celor așteptate de clasele exploatatoare, în sensul că, la un moment dat, tehnica creată pentru război acționează împotriva declanșării războiului, că această tehnică începe să exercite presiune în favoarea (direcția) păcii.

În condițiile războaielor bonapartiste Marx scria : „*Revoluționarea totală a condițiilor generale ale războiului datorită înrolării întregii populații apte pentru serviciul militar în armate care nu se mai numărau de cît în milioane, precum și datorită armelor de foc, obuzelor și explozibilelor de o eficacitate nemaicunoscută pînă atunci, puse brusc capăt, pe de o parte, perioadei războaielor bonapartiste, asigurînd o dezvoltare industrială pașnică, prin faptul că făcea imposibil orice alt război în afara unui război mondial, aducător de grozăvii nemaipomenite și al cărui deznodămînt este cu totul incalculabil*“ [1].

Rezultă cît se poate de clar importanța ce dădea Marx influenței tehnicii militare asupra evoluției sociale, asupra soartei războaielor. Engels s-a pronunțat la rîndul său în această problemă. Prevăzînd primul război mondial care a fost îndelung pregătit de ambele tabere imperialiste (Puterile centrale și Antanta) Engels a remarcat : „*Ambele tabere se pregătesc pentru bătălia decisivă pentru un război cum nu a cunoscut încă lumea, pentru un război în care își vor sta față în față între 10 și 15 milioane de oameni înarmați. Numai două împrejurări au împiedicat pînă acum izbucnirea acestui război*

[1] *F. Engels :* „Anti-Dühring“, E.S.P.L.P. 1955. pag. 185.

[2] Ibidem.

[1] *K. Marx, F. Engels :* Opere alese, vol. I, E.S.P.L.P. 1955, pag. 114.

îngrozitor; în primul rînd, dezvoltarea nemaipomenit de rapidă a tehnicii militare... și în al doilea rînd, imposibilitatea absolută de a cîntări șansele, de a ști cine va birui în cele din urmă în această luptă gigantică" [1].

Vom reproduce încă o precizare genială a lui Engels din care rezultă și mai clar ideia conescințelor contrare a dezvoltării tehnicii militare, a militarismului în general, în sensul că însăși dialectica dezvoltării militarismului duc la propria sa pieire. Vorbind despre „cursa dintre blindaj și tun" Engels arăta că: *„această luptă ne dezvăluie astfel și în domeniul războiului naval legile interne ale mișcării dialectice, potrivit cărora militarismul, ca orice alt fenomen istoric, piere de pe urma consecințelor propriei sale dezvoltări*" [2].

Vădit, considerente similare au stat la baza ideilor lui Lenin, relatate de N. K. Krupskaia: *„Va veni timpul cînd războiul va deveni atît de distrugător, încît în general fa deveni imposibil*" [3]. Relatînd în continuare, spusele unui inginer cu care Lenin a stat de vorbă, privitoare la eventualitatea posibilității distrugerii unor armate întregi de la distanță, Krupskaia reproduce remarca lui Lenin: *„Acest fapt va face orice război imposibil*" [4].

Această ideie a preocupat pe Lenin de mai mult. Această ideie el a susținut-o la Congresul din Stuttgart (1907) a Internaționalei a II-a în rezoluția căruia a intrat următorul pasaj: *„Războaiele vor lua sfîrșit* numai atunci cînd va înceta să mai existe orînduirea capitalistă sau *cînd numărul uriaș de jertfe omenești și materiale provocate de dezvoltarea tehnică-militară și indignarea popoarelor stîrnite de înarmări vor duce la înlăturarea acestui sistem*" [5].

Aceste previziuni geniale ale clasicilor marxism-leninismului au fost confirmate de întreaga evoluție istorică și au astăzi o semnificație și o valoare cu totul deosebită. Aceste constatări au o valoare cu atît mai mare astăzi — în epoca armei nucleare și a armelor rachete — cînd aceste arme create pentru distrugere de masă acționează — tocmai datorită consecințelor incalculabile unui război balistico-nuclear — nu în sensul declanșării celui de al treilea război mondial, ci în sens invers.

Firește nu e vorba de a atrage concluzii greșite de aci în sensul că starea actuală a tehnicii militare ar împiedica, în mod automat, prin sine însăși declanșarea războiului; ar exclude automat războiul din viața societății, că războiul ar muri de la sine, pacea ar triumfa de la sine. O asemenea concluzie nu rezultă nici decum din afirmațiile clasicilor. Ei n-au separat niciodată dezvoltarea științei și tehnicii, a tehnicii militare de dezvoltare socială, de nivelul de dezvoltare a forțelor de producție, dînd prioritatea celor din urmă. Nu există moartea „fatală" a războiului sau cum i se mai spune „inevitabilitatea fatală a păcii".

„Pieirea", „moartea" războiului, victoria păcii nu poate fi rezultatul unic și exclusiv al dezvoltării sau „autodezvoltării" tehnicii militare din moment ce războiul nu este un fenomen pur „tehnic" — ca să spunem

---

[1] *Marx, Engels:* Opere, prima ediție rusă, 1936, vol. 16 partea a 2-a, pag. 37.
[2] *F. Engels:* „Anti-Düring" E.S.P.L.P. 1955, pag. 192.
[3], [4] *N. K. Krupskaia:* „O Lenine". Gospolitizdat, Moscova, 1960, pag. 40—41.
[5] *V. I. Lenin:* Opere, vol. 15, E.S.P.L.P., 1957, 183.

așa —, ci un fenomen eminamente *social*. După cum apariția lui a fost determinată în primul rînd de anumite condiții *sociale* și nu numai tehnice tot așa și dispariția lui este legată în primul rînd, de anumite condiții *sociale* și nu numai pur tehnice. După cum dezvoltarea vijelioasă a științelor naturii și tehnicii, noua revoluție tehnico-științifică nu este în stare — contrar afirmațiunilor tuturor teoreticienilor burghezi, reformiști și revizioniști —, ea singură, să schimbe esența capitalismului, tot așa nici revoluția în domeniul tehnicii de război nu este în stare, ea singură, să schimbe esența războiului, să asigure pacea eternă. Știința militară se bazează — contrar concepției unor teoreticieni burghezi — nu numai pe legile obiective ale științei naturii, ci și pe legile nu mai puțin obiective ale științelor sociale și nu în ultima instanță chiar.

Vorbind de condițiile sociale de sigur nu trebuie exclus rolul pe care îl joacă, în ansamblul acestor condiții, știința și tehnica în general și tehnica militară în special ; nu trebuie exclus rolul din ce în ce mai activ și important pe care-l are știința și tehnica în dezvoltarea societății, respectiv rolul crescînd al tehnicii de război contemporane în soluționarea într-un fel sau altul a problemelor internaționale, în desfășurarea războiului. Dar războiul este dus nu de tehnică, ci de anumite forțe sociale, anumite clase sociale, de oamenii care folosesc această tehnică. Depinde deci de aceste forțe sociale dacă va mai exista și în viitor tehnica militară și război sau nu. Trăim tocmai în acea epocă cînd s-au născut și se întăresc rapid acele forțe sociale care pot face posibil ca, încă în condițiile existenței formațiunii social-economice capitaliste, să se împiedice dezlănțuirea unui nou război, să se elimine războiul din viața societății.

Este cea mai mare fericire pentru omenire că noua revoluție tehnico-științifică de proporții uriașe și noua revoluție în domeniul tehnicii militare coincide cu epoca marilor revoluții sociale din lume, care determină schimbarea radicală a raportului de forțe dintre lumea veche și cea nouă în avantajul acestuia din urmă factor hotărîtor în evoluția situației internaționale.

Dar ar fi tot atît de greșit să tragem de aci concluzia că toate acestea n-ar acționa asupra evoluției sociale pe plan internațional, asupra soartei războiului. Dacă aceste revoluții (tehnico-științifice și cea din domeniul tehnicii militare) nu sînt în stare, ele singure, să schimbe capitalismul și războiul, legat organic de primul, ele contribuie totuși serios la schimbarea radicală a condițiilor în care societatea omenească se dezvoltă, condițiile în care are loc confruntarea, întrecerea dintre cele două sisteme sociale diametral opuse. Îndeosebi, dezvoltarea vijelioasă a tehnicii de război (mijloacele tehnice ale luptei armate) este un factor obiectiv important care acționează și el — oricît de paradoxal ar părea aceasta — în sensul excluderii războiului din viața societății încă în timpul capitalismului. Aceasta este dialectica implacabilă a progresului tehnico-militar. Revoluția în domeniul tehnicii militare a creat un asemenea factor istoric nou care acționează fără nici o urmă de îndoială împotriva războiului, în favoarea victoriei ideii politicii coexistenței pașnice.

* * *

Un aspect strîns legat de cele tratate aci este și *problema influenței războiului* propriu zis *asupra evoluției istorice*, asupra dezvoltării sociale.

Dacă cercetăm desfășurarea marilor războaie de-a lungul secolelor vom constata că ele au fost însoțite totdeauna de mari mișcări sociale. Dacă luăm de exemplu războaiele din a doua jumătate a secolului trecut și cele din secolul nostru vom constata și mai lesne acest lucru. Vom constata că aceste războaie au avut consecințe revoluționare serioase. Oare glorioasa Comuna din Paris n-a fost o consecință directă a războiului franco-prusac din 1870—1871? Oare revoluția din 1905—1907 n-a fost urmarea logică și inevitabilă a războiului ruso-japonez?

Această legătură devine și mai evidentă dacă cercetăm consecințele social-politice ale celor două războaie mondiale. După cum se știe Marea Revoluție Socialistă din Octombrie a avut loc în timpul primului război mondial, iar revoluțiile socialiste în țările de democrație populară din Europa și Asia au triumfat după cel de al doilea război mondial.

Se pune întrebarea dacă războialele mondiale au premers revoluțiile socialiste oare nu sînt ele cumva și absolut necesare pentru înfăptuirea lor? Se poate oare pune problema că fără războiul mondial ar fi fost imposibilă victoria revoluției socialiste din Rusia — așa cum au încercat să prezinte această problemă începînd de la vestitul spion englez B. Lockart și pînă la social-democratul Otto Bauer? Ar fi oare justă concluzia că fără un nou război mondial n-ar fi posibilă victoria revoluțiiilor socialiste, că războiul mondial ar fi condiția sine qua non a revoluțiilor socialiste?

A pune problema în acest fel înseamnă a nu cunoaște legile obiective ale dezvoltării sociale, înseamnă a confunda condițiile în care are loc un fenomen, cu cauza care îl generează, determină; înseamnă a confunda în mod grosolan două lucruri bine distincte și diferite — legile războaielor și legile revoluției, legile războiului modern și legile revoluției socialiste.

Este adevărat că războiul, dezlănțuit de clasele exploatatoare, de imperialiști provoacă nemulțumirea generală a maselor populare, pune în fața lor tot mai hotărît problema îndepărtării acelei orînduiri care împinge poporul periodic, la suferințe și vărsări de sînge tot mai îngrozitoare și duce la ascuțirea contradicțiilor de clasă, contribuie la accelerarea crizei revoluționare. Este de netăgăduit că primul război mondial, determinat de ascuțirea contradicțiilor dintre marile puteri imperialiste, a accelerat mersul istoriei, că el a fost unul din factorii care au accelerat dezlănțuirea revoluției socialiste. Dar inevitabilitatea revoluțiilor socialiste și posibilitatea victoriei au fost determinate nu de războiul mondial, ci de dezvoltarea social-economică a Rusiei țariste de contradicțiile ei interne cît și de contradicțiile imperialismului în general.

Nu e voie să se confunde condițiile în care se maturizează și are loc revoluția socialistă cu cauzele care o generează. Războiul a fost nu cauza, ci o condiție, împrejurare care a ușurat explozia revoluționară. Dar aceasta n-a fost și nici nu poate fi nici în prezent o condiție obligatorie a revoluțiilor socialiste.

Revoluția socialistă este rezultatul inevitabil al dezvoltării societății capitaliste un proces obiectiv, legic al acestei dezvoltări, al ascuțirii contradicțiilor sale interne, al luptei de clasă. Socialismul este o orînduire nouă,

progresistă și trecerea la ea este inevitabilă. Revoluția socialistă are drept bază economică conflictul dintre forțele de producție, foarte dezvoltate în condițiile capitalismului și relațiile de producție învechite și care au devenit de mult o piedică serioasă în dezvoltarea forțelor de producție, în special în condițiile revoluției tehnico-științifice contemporane. Aceste contradicții cu caracter antagonic se rezolvă numai și tocmai prin revoluția socialistă. Revoluția socialistă este rezultatul dezvoltării și ascuțirii contradicțiilor ale însuși capitalismului

Lenin a arătat că victoria revoluțiilor socialiste este condiționată de existența condițiilor obiective și a unor factori subiectivi [1]. Aceste indicații ale lui Lenin și-au păstrat valabilitatea și astăzi. Trebuie spus că între condițiile obiective Lenin a înțeles și situația internațională favorabilă [2].

Ar fi oare just de a pune problema că un nou război mondial ar crea aceea situație favorabilă și necesară pentru ca revoluția socialistă să triumfe și în restul țărilor capitaliste, sistemul mondial socialist devenind în acest fel sistemul social-politic unic pe tot globul pămîntesc?

Acest lucru ar fi cît se poate de greșit, ar însemna să ignorez, să calci în picioare legile obiective ale dezvoltării istorice, ar însemna a supraaprecia forțele actuale ale imperialismului, a subaprecia forțele socialismului pe plan mondial, ar însemna lipsa de încredere în forțele proletaritului. Acest lucru mai înseamnă că nu te gîndești la două împrejurări deosebit de importante: la faptul că un al treilea război mondial — dat fiind existența armelor nucleare și armelor rachete — ar avea un caracter calitativ diferit față de primele două și că consecințele social-economice și politice ale acestui de al treilea război mondial ar putea să fie nu cele scontate sau, în orice caz, va duce la un asemenea grad de distrugere a valorilor materiale și spirituale ale omenerii care ar arunca omenirea așa departe înapoi pe scara dezvoltării sale încît, chiar în ipoteza absurdă a acceptării unei asemenea teze, „avantajele" ei ar fi cu totul iluzorii și este clar că drumul omenirii spre societatea comunistă n-ar fi nici decum scurtat și ușurat, ci ar fi mult mai anevoios și lung decît fără război. Războiul n-ar scurta, ci ar prelungi drumul spre socialism. Războiul mondial nu numai că n-ar fi o condiție a desfășurării revoluțiilor socialiste, ci, dimpotrivă, ar îngreuna nemăsurat.

La aceasta mai trebule adăugat că însuși acceptarea și deci propagarea unei asemenea teze greșite, absurde, nemarxiste ar duce la izolarea partidelor comuniste de masele cele mai largi din toate țările lumii, deci ar duce, în mod obiectiv, indiferent dacă autorii unei asemenea teze vor sau nu acest lucru, nu la slăbirea, ci la întărirea pozițiilor burgheziei monopoliste și în conecință, la îngreunarea dezvoltării procesului istoric, la prelungirea drumului popoarelor spre socialism.

Lenin a luat o poziție clară și cît se poate de categorică împotriva unor asemenea concepții, împotriva înfăptuirii revoluției cu ajutorul războiului. El scria: *Poate că autorii sînt de părere că interesele revoluției interna-*

[1] *V. I. Lenin:* Opere, vol. 21, Ed. Politică 1958, pag. 202.
[2] *V. I. Lenin:* Opere, vol. 31, E.S.P.L.P. 1956, pag. 47.

ționale cer ca aceasta să fie stimulată și că acest stimulent ar putea fi numai războiul și nicidecum pacea" [1].

Este cît se poate de clar că a proceda în acest fel ar însemna a păși pe drumul unui aventurism deosebit de periculos pentru însuși soarta omenirii. Și aceasta cu atît mai mult cu cît e vorba, în mod concret, de cel de al treilea război mondial, care dacă va fi, va fi atotdistrugător. Lozinca nemuritoare a lui Marx — „proletariatul, gropar al capitalismului" rămîne și astăzi vie, justă și actuală. Ea nu poate fi înlocuită cu lozinca — „războiul, gropar al capitalismului".

Concluzia din cele spuse mai sus este că atît dezvoltarea științei și tehnicii în general și a tehnicii militare în particular duce, împinge dezvoltarea socială nu pe drumul războiului, ci, dimpotrivă, pe drumul unei dezvoltări pașnice, garanția cea mai sigură, că omenirea va ajunge în condiții infinit mai favorabile și într-un ritm mult mai rapid la socialism pe tot globul pămîntesc, decît în condițiile și drept consecință al unui al treilea război mondial.

Inevitabilitatea războiului în condițiile imperialismului s-a schimbat datorită și dezvoltării științe și tehnicii în general și a tehnicii militare în special. Fără a supraaprecia acest factor (factorul primordial, determinant în această schimbare fiind nașterea și întărirea primului stat socialist din lume, cît și nașterea și întărirea lagărului socialist) totuși nu se poate trece cu vederea importanța crescîndă a acestuia. În epoca contemporană s-au schimbat deci două lucruri în mod radical; 1. — raportul de forțe pe plan mondial dintre capitalism și socialism și 2. — caracterul războiului.

Tehnica militară acționează în favoarea păcii cu atît mai mult cu cît aceasta (și după cum se știe, ea este superioară celeia care se găsește în mîinile imperialiștilor), pentru prima dată în istoria omenirii se găsește în mîinile socialismului, existența ei fiind folosită în mod conștient pentru a ține în frîu forțele agresive ale imperialismului.

Războiul a fost inevitabil în condițiile existenței imperialismului ca sistem unic pe tot globul pămîntesc, cînd imperialismul a fost forța dominantă pe arena internațională. Pășind în epoca trecerii omenirii de la capitalism la socialism, în condițiile existenței puternicului lagăr al socialismului, al destrămării totale a colonialismului, al maturizării proletariatului într-o serie de țări capitaliste și a voinței arzătoare de pace a popoarelor, omenirea a intrat și în epoca cînd războiul nu mai este inevitabil.

Trebuie subliniat că teza privind posibilitatea preîntîmpinării războiului dintre capitalism și socialism a trecut într-un fel examenul istoriei. Cel de al doilea război mondial n-a fost un asemenea război. Iar în ce privește prezentul trebuie spus că războaiele provocate de imperialiști, în ultimul timp, n-au fosa atomice și nu le mai aduc acele avantaje fabuloase pe care le-au adus războaiele, în special cu caracter colonialist, în trecut.

Este interesant de remarcat că războaiele purtate de imperialiști în perioada de după terminarea celui de al doilea război mondial: Indochina (1946—1954); Indonezia (1945—1947); Coreea (1950—1953); Palestina (1948—1949); Egipt (1956); Algeria (din 1954) n-au mai adus nici un

[1] *V. I. Lenin*: Opere, vol. 27, Editura Politică, 1959, pag. 54.

folos direct imperialiștilor. Războiul chiar și local în vederea subjugării popoarelor a devenit un fenomen mai rar, tot mai greu de dezlănțuit și de susținut.

Întreaga dezvoltare istorică confirmă justețea tezei privind posibilitatea preîntîmpinării și excluderii războiului mondial din viața societății încă în perioada existenței pe o parte a globului pămîntesc a orînduirii capitaliste, încă înaintea victoriei definitive a socialismului pe scară mondială. Revoluția tehnico-științifică contemporană folosită de lagărul socialist sînt un ajutor de neprețuit al omenirii pe drumul păcii și socialismului.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ОТРАЖЕНИЯ СОВРЕМЕННОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ В ВОЕННОЙ ОБЛАСТИ

(Краткое содержание)

В настоящей (третьей) части работы, первые два раздела которой были опубликованы в предыдущих номерах бюллетеня, рассматривается вопрос об отражении современного научно-технического переворота в военной области. В первую очередь автор останавливается на особенностях переворота в области военной техники, который развивался главным образом в двух направлениях: I. разрушительная сила на огневую единицу и 2. в отношении носителя этой разрушительной силы.

Анализируются последовательно следующие вопросы: соотношение между современной научно-технической революцией и революцией в области военной техники, в частности вопрос о том, обусловила ли современная научно-техническая революция революцию в области военной техники, или наоборот; соотношение между развитием военной техники, современной революциии в области военной техники и войной (соответственно между развитием военной техники и общественно-политическим развитием), что имеет огромное значение для современности, для хода развития международных отношений, для судеб мира; вопрос о влиянии собственно войны на историю, на общественное развитие.

В заключение указывается, что весь ход исторического развития подтверждает правильность положения о возможности предотвращения и исключения мировой войны из жизни общества еще в период существования на части земного шара капиталистического строя, еще до окончательной победы социализма в мировом масштабе. Использование современного научно-технического переворота социалистическим лагерем является неоценимой помощью для чоловечества на пути мира и социализма.

SOME ASPECTS OF THE IMPLICATIONS CAUSED IN THE MILITARY SPHERE BY THE CONTEMPORARY TEHNICO-SCIENTIFIC REVOLUTION

(Summary)

In Part III of the study, the first two parts of which were published in previous issues of the Bulletin, the author analyses the implications of a military nature brought about by the contemporary technico-scientific revolu-

tion. In the first place, reference is made to the specific features of the revolution in the sphere of military technics. In this sphero, the revolution unfolded in particular along two lines : firstly, with regard to destructive power calculated per firing unit ; secondly, as regards the carrier of this destructive power.

One after the other, the following points are subjected to analysis ; the correlation between the contemporary technico-scientific revolution and the revolution in the sphere of military technics, that is, the question is dealt with whether the contemporary technico-scientific revolution has determined the revolution in the field of military technics, or vice versa ; the correlation betmeen the development of military technics, the contemporary revolution in the sphere of military technics, and war'that is, the correlation between the development of military technics and socio-political development (the correct, strictly scientific establishment of thos correlation being of prime importance for contemporaneous events, for the development of present-day international relations, for the fate of peace itself) ; the problem of the impact of actual war on historical evolution, on social development.

The author concludes by pointing out that the entire historical development bears out the correctness of the idea concerning the possibility of preventing and excluding world war from the life of mankind even with capitalism still existing on part of our globe and even before the final, world-wide victory of socialism. The contemporary technico-scientific revolutions, which are being made use of by the socialist camp, are of invaluable assistance to mankind along the road of peace and socialism.

QUELQUES ASPECTS DE L'IMPLICATION MILITAIRE DE LA RÉVOLUTION TECHNIQUE ET SCIENTIFIQUE CONTEMPORAINE

(Résumé)

Dans cette troisième partie de l'essai — les deux premières ayant paru dans les numéros antérieurs du bulletin — l'auteur analyse les implications militaires de la révolution technique et scientifique contemporaine. Il indique, en premier lieu, les traits caractéristiques de la révolution dans le domaine de la technique militaire, révolution réalisée spécialement dans deux directions : 1) le pouvoir destructif d'une unité de feu et 2) le porteur de ce pouvoir destructif.

L'auteur analyse tour à tour les problèmes suivants :

— la corrélation entre la révolution technique et scientifique contemporaine et la révolution dans le domaine de la technique militaire, c'est-à-dire si la révolution technique et scientifique contemporaine a déterminé la révolution dans le domaine de la technique militaire, ou par contre ;

— la corrélation entre le développement de la technique militaire — la révolution contemporaine dans le domaine de technique militaire — et la guerre (plus généralement, la corrélation entre le développement de la technique militaire et le développement social et politique) ; il s'agit d'établir au juste, d'une manière absolument scientifique cette corrélation qui a une

importance immense pour la contemporanéité, pour le développement des relations internationales actuelles, pour le sort même de la paix ;

— l'influence de la guerre proprement dite sur l'évolution historique, sur le développement social.

En conclusion l'auteur démontre que le développement historique en entier confirme la justesse de la thèse concernant la possibilité de prévenir la guerre mondiale et de l'exclure de la vie de la société, même pendant l'existence du régime capitaliste sur une partie du globe, même avant la victoire définitive du socialisme dans le monde entier. L'utilisation des résultats de la révolution technique et scientifique contemporaine par le camp socialiste constitue une aide innapréciable pour l'humanité dans sa marche vers la paix et le socialisme.

EINIGE ASPEKTE DER MILITÄRISCHEN AUSWIRKUNGEN DER TECHNISCH-WISSENSCHAFTLICHEN REVOLUTION DER GEGENWART

(Zusammenfassung)

In diesem (dem dritten) Teil der Studie — die bei den ersten sind in zwei vorhergehenden Nummern des Bulletins erschienen — analysiert der Verfasser das Problem der Auswirkungen militärischen Charakters der technisch-wissenschaftlichen Revolution der Gegenwart. Vor allem werden die charakteristischen Wesenszüge der Revolution auf dem Gebiete der Militärtechnik gezeigt, die sich insbesondere nach zwei Richtungen hin entwickelt hat : 1. — die Zerstörungskraft je Feuereinheit und 2. — auf dem Gebiete des Trägers dieser Zerstörungskraft.

Folgende Probleme werden nacheinander analysiert : die Wechselbeziehung zwischen der technisch-wissenschaftlichen Revolution der Gegenwart und der Revolution in der Militärtechnik, beziehungsweise, ob die technisch-wissenschaftliche Revolution der Gegenwart die Revolution in der Militärtechnik bedingte oder umgekehrt ; die Wechselbeziehung zwischen der Entwicklung der Militärtechnik, der gegenwärtigen Revolution in der Militärtechnik und dem Krieg (beziehungsweise zwischen der Entwicklung der Militärtechnik und der sozial-politischen Entwicklung), da die richtige, absolut wissenschaftliche Ermittlung dieser Wechselbeziehung von gewaltiger Bedeutung für die Zeitgenossen, für die Entwicklung der gegenwärtigen internationalen Beziehungen, für das Schicksal des Friedens selbst ist ; ferner wird der Einfluss des Krieges als solchem auf die historische Entwicklung, auf die gesellschaftliche Entwicklung analysiert.

Es wird die Schlussfolgerung gezogen, dass die gesamte historische Entwicklung die Richtigkeit der These erhärtet, dass es möglich ist, einen Weltkrieg aus dem Leben der Gesellschaft bereits in der Periode zu verhindern und auszuschalten, da auf einem Teil der Erde die kapitalistische Gesellschafts-ordnung besteht, also noch vor dem endgültigen Sieg des Sozialismus im Weltmassstab. Die technisch-wissenschaftlichen Revolutionen der Gegenwart, deren sich das sozialistische Lager bedient, sind eine unschätzbare Hilfe für die Menschheit auf dem Weg des Friedens und des Sozialismus.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola II

MATEMATICA

ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI OPTICE

de CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

1°. *Transformarea optică determinată de o lentilă convergentă.*

Considerăm o lentilă convergentă cu centrul optic în O și cu un focar în F. Punctele O, F determină o axă $x'x$, având origina în O. Fie Oy o axă perpendiculară pe Ox. Axa $x'x$ este *axa tentilei*, iar planul xOy *planul lentilei.*

Fie M un punct oarecare pe Ox și M_1 conjugatul său. În optica geometrică se arată că

$$\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_1} = \frac{1}{OF}. \tag{1}$$

Dacă I este inversiunea de pol O și modul 1, notînd M', M_1' F' transformatele punctelor M, M_1, F prin I, relația (1) devine

$$OM' - OM_1' = OF',$$

deci (2)

$$\overline{M'M_1'} = -\overline{OF'}.$$

Ca urmare, dacă t_0 este translația de vector $-\overline{OF'}$, punctul M_1 este transformatul punctului M prin produsul de transformări

$$I\, t_0\, I.$$

Considerăm în planul xOy segmentul de dreaptă MN, perpendicular pe Ox. Imaginea acestuia este segmentul M_1N_1 de asemenea perpendicular pe Ox, iar punctele O, N, N_1 sînt coliniare. Dacă N', N_1' sînt transformatele

---

Comunicare prezentată la a VI-a sesiune științifică a Institutului Politehnic București, 17—18 decembrie 1960.

punctelor N, N_1 prin inversiunea I, atunci dreptele $M'N'$, $M_1'N_1'$ sînt perpendiculare pe NN_1 și astfel

$$\overline{N'N_1'} = -OF' \cos\alpha \frac{\overline{ON}}{ON}, \qquad (\alpha = \sphericalangle x\, ON).$$

Numind t_α translația definită de vectorul $N'N_1'$, rezultă că N_1 este transformatul punctului N prin produsul de transformări

$$It_\alpha\, I.$$

Astfel corespondența dintre un punct oarecare al planului xOy și imaginea sa prin lentilă pune în evidență o transformare, care pe o dreaptă ce trece prin centrul optic se comportă ca o translație t_α. Să definim această transformare pe care o vom numi *translație convergentă.*

2°. *Translația convergentă și transformarea prin lentilă convergentă.*

Translația convergentă plană este o transformare punctuală determinată de un punct O și de un vector $\bar{v}$, care transformă punctul N ale planului ce trece prin O și este paralel cu $\bar{v}$ într-un punct N_1 astfel încît

punctele O, N, N_1 sînt coliniare,

$$\overline{NN_1} = v\cos(\pi+\alpha)\frac{\overline{ON}}{ON}, \qquad \text{unde } \alpha = (\widehat{\bar{v}, \overline{ON}}).$$

Numim punctul O centrul de convergență al transformării, iar axa Ox paralelă cu $\bar{v}$, *axa translației convergente.*

Astfel, transformarea optică din paragraful precedent este definită de produsul de transformări

$$I\ T\ I,$$

unde T este translația convergentă determinată de centrul O și de vectorul $\overline{OF'}$. Vom extinde această transformare optică, sub numele de transformare prin lentilă convergentă, astfel:

Transformarea prin lentilă convergentă a punctelor unui plan P este o transformare punctuală L, definită de un punct O al planului P, de un vector $\bar{v}$ paralel cu planul și de un număr real k, prin produsul de tansformări

$$I\ T\ I,$$

unde I este inversiunea de pol O și modul k, iar T este translația convergentă de centru O și vector $\bar{v}$.

Punctul O este *centrul transformării* prin lentilă convergentă, $\bar{v}$ este *vectorul transformării,* iar k este *modulul* ei.

Paralela Ox la vectorul $\bar{v}$ este *axa transformării L,* iar dreapta Oy, perpendiculară pe Ox *este lentila transformării L.*

Dacă $OF' = \bar{v}$, iar F este transformatul punctului F' prin inversiunea I, punctul F se numește *focarul transformării prin lentilă convergentă* considerată.

3°. *Asupra poziției în plan a transformatului unui punct printr-o translație convergentă.*

Fie translația convergentă T, aplicată planului P, definită de centrul O și de vectorul $\bar{v}$, Ox axa tranformării T și dreapta Oy perpendiculară pe Ox.

Dreapta Oy, exceptînd punctul O, este o dreaptă de puncte duble față cu translația convergentă T.

Dacă $\overline{OF'} = \bar{v}$, numim *cerc caracteristic al transformării* T cercul (γ) de diametrul OF'.

Punctul O, are o infinitate de transformate prin T, corespunzătoare dreptelor ce trec prin O. Transformatele punctului O prin translația convergentă T aparțin cercului (γ'), simetricul cercului (γ) față de O. Totdeodată orice punct al cercului caracteristic se transformă în O.

Dreapta Oy separă planul P în două semiplane pe care le numim P^+, P^-, unde P^+ este semiplanul care conține punctul F'.

Prin translația convergentă T, punctele situate în interiorul cercului caracteristic se transformă în puncte situate pe P^-. Celelalte puncte ale semiplanului P^+ și punctele semiplanului P^- se transformă respectiv în puncte situate în semiplanele P^+, P^-.

4°. *Grupul translațiilor convergente centroaxiale.*

a) Considerăm multimea $[T]$ a translațiilor convergente aplicate planului P, definite de același centru O și avînd aceeași axă Ox. Transformările acestei mulțimi sînt deci definite de vectori coliniari.

O translație convergentă de vector nul este o transformare identică.

b) *Inversa unei translații convergente T de centru O și vector $\bar{v}$ este translația convergentă de centru O și vector $-\bar{v}$.*

În adevăr, fie M un punct situat în semiplanul P^+, exterior cercului caracteristic (γ). Notînd.

$$\bar{u} = \frac{\overline{OM}}{OM}, \quad (\widehat{\bar{v}, \overline{OM}}) = \alpha$$

și M_1 transformatul punctului M prin T, avem

$$\overline{MM_1} = v \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}.$$

M_1 fiind situat în P^+, vectorul $-\bar{v}$ face cu $\overline{OM_1}$ unghiul $\pi + \alpha$ și astfel prin traslația convergentă T' de centru O și vector $-\bar{v}$ punctul M_1 se transformă în M_2 situat pe $O\,M$, iar

$$\overline{M_1M_2} = v \cos(2\pi + \alpha)\,\frac{\overline{OM_1}}{OM_1} = v \cos\alpha\,\bar{u}.$$

Rezultă

$$\overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} = 0$$

sau

$$M_2 \equiv M .$$

Dacă M este interior cercului (γ), M_1 se află în P^- și $(-\overset{\frown}{\bar{v}, \overline{OM_1}}) = \alpha$. Astfel

$$\overline{M_1M_2} = v \cos(\pi + \alpha) \frac{\overline{OM_1}}{OM_1}$$

și cum $\overline{OM}$, $\overline{OM_1}$ au sensuri contrare,

$$\overline{M_1M_2} = - v \cos(\pi + \alpha)\, \bar{u}$$

și regăsim

$$M_2 \equiv M .$$

Dacă vom considera pe dreapta $O\,M$ un punct M' în P^-, atunci $(\overset{\frown}{\bar{v}, \overline{OM'}}) = \pi + \alpha$, iar M_1' transformatul lui M' prin T aparține dreptei $O\,M$, este în P^- și

$$\overline{M'M_1'} = v \cos(2\pi + \alpha) \frac{\overline{OM'}}{OM'} = - v \cos\alpha \cdot \bar{u} .$$

Deoarece $(-\overset{\frown}{\bar{v}, \overline{OM_1'}}) = \alpha$, numind M_2' transformatul punctului M_1' prin T', avem

$$\overline{M_1'M_2'} = v \cos(\pi + \alpha) \frac{\overline{OM_1'}}{OM_1'} = v \cos\alpha \cdot \bar{u} .$$

Deducem astfel

$$\overline{M'M_1'} + \overline{M_1'M_2'} = 0 ,$$

deci

$$M_2' \equiv M' .$$

Conchidem că

$$T' = T^{-1} .$$

Astfel

$$T^{-1} \in [T] .$$

c) *Produsul a două transformări ale mulțimii [T] este echivalent cu o transformare a mulțimii [T].*

Fie T_1, T_2 două transformări ale mulțimii $[T]$, definite de vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$. Dacă $\overline{OF_1'} = \bar{v}_1$, numim P^+ semiplanul mărginit de Oy, care conține

punctul F_1' Fie M un punct situat în P^+ și

$$\frac{\overline{OM}}{OM} = \bar{u}, \qquad (\widehat{\bar{v}_1, \overline{OM}})$$

Presupunem că vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ *au același sens.* Prin transformarea T_1 punctul M se transformă în M_1 și

$$\overline{MM_1} = v_1 \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}. \tag{3}$$

1) Dacă M este exterior cercului caracteristic (γ_1) al transformării T_1, atunci M_1 este în P^+ și notînd cu M_2 transformatul său prin T_2, avem

$$\overline{M_1M_2} = v_2 \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}. \tag{4}$$

Astfel

$$\overline{MM_2} = (v_1 + v_2)\cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}. \tag{5}$$

2) Dacă M' este un punct situat pe OM, interior cercului (γ_1), M_1' transformatul său prin T_1 este în P^- și, întrucît vectorul $\bar{v}_2$ face cu $\overline{OM_1'}$ unghiul $\pi + \alpha$, rezultă

$$\overline{M_1'M_2'} = v_2 \cos(2\pi + \alpha)\,\frac{\overline{OM_1'}}{OM_1'} = v_2 \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}.$$

M_2' fiind transformatul punctului M_1' prin T_2.
Deoarece, după (3)

$$\overline{M'M_1'} = v_1 \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}.$$

rezultă

$$\overline{M'M_2'} = (v_1 + v_2)\cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}. \tag{5'}$$

3) Dacă punctul M' situat pe OM este în P^-, vectorul $\bar{v}_1$ face cu $\overline{OM'}$ unghiul $\pi + \alpha$ și notînd M_1' transformatul lui M' prin T_1,

$$\overline{M'M_1'} = v_1 \cos(2\pi + \alpha)\,\frac{\overline{OM'}}{OM'} = v_1 \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}.$$

Punctul M_1' este de asemenea în P^-, deci unghiul vectorilor $\bar{v}_2$, $\overline{OM_1'}$ este $\pi + \alpha$. Ca urmare, M_2' fiind transformatul punctului M_1' prin T_2,

$$\overline{M_1'M_2'} = v_2 \cos(2\pi + \alpha)\,\frac{\overline{OM_1'}}{OM_1'} = v_1 \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}.$$

deci

$$\overline{M'M_2'} = (v_1 + v_2)\cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}. \tag{5''}$$

Relațiile (5) ne arată că podusul $T_2\ T_1$ este echivalent cu o translație convergentă $T \in (T)$, al cărei vector este $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$.

Presupunem că vectorul $\bar{v}_2$ *nu are același sens cu* $\bar{v}_1$. Păstrînd notațiile de mai sus, în cazul 1) unghiul vectorilor $\bar{v}_2$, $\overline{OM_1}$ este $\pi + \alpha$, deci

$$\overline{M_1M_2} = v_2 \cos(2\pi + \alpha) \frac{\overline{OM_1}}{OM_1} = -v_2 \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}$$

și astfel

$$\overline{MM_2} = (v_1 - v_2)\cos(\pi + \alpha)\,\bar{u}. \tag{6}$$

În cazul 2), unghiul vectorilor $\bar{v}_2$, $\overline{OM_1'}$ este α, deci

$$\overline{M_1'M_2'} = v_2 \cos(\pi + \alpha) \frac{\overline{OM_1'}}{OM_1'} = -v_2 \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u},$$

deci

$$\overline{M'M_2'} = (v_1 - v_2)\cos(\pi + \alpha)\,\bar{u} \tag{6'}$$

În cazul 3) se regăsește relația (6').

Relațiile (6) ne arată că *produsul* $T_2\ T_1$ *este echivalent cu o translație convergentă* $T \in [T]$ *al cărei vector este* $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ *și în cazul cînd vectorii* $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ *au sensuri diferite.*

d) *Din cele arătate mai sus rezultă că mulțimea translațiilor convergente definite de același punct O, avînd vectorii coliniari de direcție* Δ *formează un grup comutativ.* Vom numi translațiile convergente ale grupului definit de punctul O și de direcția Δ, *translații centroaxiale* și vom nota $[T\ (O, \Delta)]$ acest grup.

5°. *Grupul translațiilor convergente cu același centru.*

Considerăm mulțimea $[T(O)]$ a tuturor translațiilor convergente definite de același centru O. Dacă

$$T \in [T(O)], \quad \text{atunci și } T^{-1} \in [T(O)].$$

Să arătăm că *produsul a două transformări ale mulțimii* $[T(O)]$ *este echivalent cu o transformare a acestei mulțimi.*

Fie $T_1 \in [T(O)]$ și $T_2 \in [T(O)]$ două translații convergente definite de vectorii $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$. Dacă M este un punct oarecare al planului, notăm

$$(\widehat{\bar{v}_1, \overline{OM}}) = \alpha, \quad (\widehat{\bar{v}_2, \overline{OM}}) = \beta, \quad \frac{\overline{OM}}{OM} = \bar{u},$$

M_1 transformatul punctului M prin T_1 și M_2 transformatul punctului M_1 prin T_2.

Avem

$$\overline{MM_1} = v_1 \cos(\pi + \alpha)\,\bar{u},$$

$$\overline{M_1M_2} = v_2 \cos(\pi + \beta)\,\bar{u},$$

deci

$$\overline{MM_2} = -(v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta)\,\bar{u}.$$

Dar

$$v_1 \cos\alpha = v_1\bar{u}, \qquad v_2 \cos\beta = v_2\bar{u}$$

și astfel

$$v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)\,\bar{u} = \bar{v}\,\bar{u}.$$

Dacă unghiul vectorilor $\bar{v}$, $\overline{OM}$ este γ, rezultă

$$v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta = v \cos\gamma$$

și

$$\overline{MM_2} = v \cos(\pi + \gamma)\,\bar{u}.$$

Ca urmare, *produsul* $T_2\,T_1$ *este echivalent cu o translație convergentă* $T \in [T(O)]$ *definită de vectorul sumă al vectorilor* $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$.

De asemenea, rezultă

$$T_2\,T_1 = T_1\,T_2.$$

Conchidem că mulțimea translațiilor convergente cu același centru formează un grup comutativ.

Grupul $[T(O)]$ are o infinitate de subgrupuri $[T(O, \Delta)]$. Grupul $T(O)]$ este izomorf cu grupul $[\tau]$ al translațiilor plane, stabilind corespondența între $T \in [T(O)]$ și $\tau \in [\tau]$ care sînt definite de același vector $\bar{v}$.

6°. *Mulțimea translațiilor convergente plane.*

a) Fie $[T]$ mulțimea translațiilor convergente aplicate planului P, definite de punctele planului P și de vectorii acestui plan și $[\tau]$ mulțimea traslațiilor definite de acești vectori.

Dacă $T \in [T]$ *este translația convergentă definită de centrul* O *și de vectorul* $\bar{v}$, *iar* $\tau \in [\tau]$ *este translația definită de vectorul* $\bar{w}$ *corespondenta transformării* T {1, § 1°} *în raport cu* τ *este translația convergentă* $T_1 \in [T]$, *definită de centrul* O_1, *transformat al punctului* O *prin* τ, *și de vectorul* $\bar{v}$, *întrucît avem*

$$\tau\,T = T_1\,\tau. \tag{7}$$

De asemenea transformarea T este, în raport cu τ, corespondenta unei translații convergente $T' \in [T]$ definită de centrul O' care se transformă în O prin τ și de vectorul $\bar{v}$.

Rezultă că mulțimea translațiilor convergente aplicate planului P este perfect simetrică {*1, § 10°*} *în raport cu mulțimea translațiilor aplicate aceluiaș plan.*

b) Echivalența (7) permite să exprimăm translația convergentă T_1 de centru O_1 și de vector $\bar{v}$ cu translația convergentă T de centru O și de vector $\bar{v}$ și cu translația τ de vector $\overline{OO_1}$, astfel

$$T_1 = \tau T \tau^{-1}. \tag{8}$$

Deci orice translație convergentă aplicată planului se poate exprima cu o translație convergentă a mulțimii $[T(O)]$ și cu o translație a mulțimii $[\tau]$.

7°. *Grupul $[T(O)]$ al translațiilor convergente de centru O este perfect simetric în raport cu grupul rotațiilor de centru O.*

a) Corespondenta unei translații convergente $T \in [T(0)]$ de vector $\bar{v}$, în raport cu o rotație R de centru O și unghi α este translația convergentă $T_1 \in [T(O)]$ definită de vectorul $\bar{v}_1$, transformat al vectorului $\bar{v}$ prin rotația R. În adevăr, avem

$$R\,T = T_1\,R. \tag{9}$$

De asemenea, transformarea T este corespondenta în raport cu transformarea R, a unei translații convergente $T' \in [T(O)]$, definită de vectorul $\bar{v}'$, care se transformă în $\bar{v}$ prin R. Rezultă astfel proprietatea enunțată și

$$T_1 = R\,T\,R^{-1}.$$

b) Rezultă că mulțimea $[RT]$, formată din produsele fiecărei translații convergente a grupului $[T(O)]$ cu fiecare rotație a grupului $[R]$, este un grup {1, § 14°}. Acest grup este perfect simetric în raport cu grupul $[R]$. {2, § 24°}.

Mulțimea $[S_1]$ definită astfel

$$[S_1] = [T(O)]\ U\ [R]\ U\ [RT]$$

formează un grup {1, § 17°}.

Întrucît $[R]$ este un grup autosimetric {2, § 26°} grupul $[S_1]$ este perfect simetric în raport cu $[R]$ {2, § 25°}.

8°. *Grupul $[T(O)]$ al translațiilor convergente de centru O este perfect simetric în raport cu grupul $[H]$ al omotetiilor de centru O.*

a) Corespondenta unei translații convergente $T \in [T(O)]$ de vector $\bar{v}$, în raport cu omotetia $H \in [H]$ de raport k este translația convergentă $T_1 \in [T(O)]$ de vector $k\bar{v}$, deoarece

$$H\,T = T_1\,H. \tag{10}$$

De asemenea T este corespondenta în raport cu H a unei translații convergente $T' \in [T(O)]$ de vector $\frac{1}{k}\,\bar{v}$. Astfel rezultă proprietatea enunțată și

$$T_1 = H\,T\,H^{-1}.$$

b) Mulțimea $[HT]$, formată din produsele fiecărei translații convergente a grupului $[T(O)]$ cu fiecare omotetie a grupului $[H]$ este un grup {1, § 14°}.

Acest grup este perfect simetric în raport cu grupul $[H]$ {2, § 24°}.

Mulțimea $[S_2]$ definită astfel

$$[S_2] = [T(O)] \cup [H] \cup [HT]$$

formează un grup {1, § 17°}.

Întrucît $[H]$ este un grup autosimetric {2, § 26°}, grupul $[S_2]$ este perfect simetric în raport cu $[H]$ {2, § 25°}.

c) Grupul $[T(O)]$ fiind perfect simetric în raport cu grupul rotațiilor $[R]$ de centru O și în raport cu grupul omotetiilor $[H]$ de centru O, este perfect simetric în raport cu grupul de transformări $[RH]$ format din produsul fiecărei omotetii a grupului $[H]$ cu fiecare rotație a grupului $[R]$ {2, § 24°}.

Urmează că $[RHT]$, unde $T \in [T(O)]$, $R \in [R]$, $H \in [H]$, este un grup {1, § 14°} și că acest grup este perfect simetric în raport cu grupul $[RH]$ {2, § 24°}.

De asemenea $[R]$, $[H]$ fiind autosimetrice și reciproc perfect simetrice, $[RH]$ este un grup perfect simetric în raport cu $[H]$ și $[R]$. Cum și $[T(O)]$ este perfect simetric în raport cu $[H]$ și $[R]$, urmează că grupul $[RHT]$ este perfect simetric în raport cu $[H]$ și $[R]$.

d) Deoarece mulțimile $[T(O)]$, $[R]$ sînt perfect simetrice în raport cu mulțimea omotetiilor $[H]$ de centru O, grupul de transformări $[RT]$, considerat la (§7°, b) este perfect simetric în raport cu $[H]$ {1, § 13°}.

Astfel grupul $[S_1] = [T(O)] \cup [R] \cup [RT]$ este perfect simetric în raport cu grupul $[H]$ {2, § 25°}.

Ca urmare, mulțimea $[HS_1]$,

$$[HS_1] = [HT] \cup [HR] \cup [HRT]$$

este un grup {1, § 14°}, perfect simetric în raport cu $[H]$ {2, § 24°}.

Rezultă că *mulțimea*

$$[S] = [S_1] \cup [H] \cup [HS_1] =$$

$$= [T(O)] \cup [R] \cup [RT] \cup [H] \cup [HT] \cup [HR] \cup [HRT]$$ *este un grup* {1, § 17°}, *perfect simetric în raport cu grupul* $[H]$ {2, § 25°}.

e) Deoarece mulțimile $[T(O)]$, $[H]$ sînt perfect simetrice în raport cu mulțimea rotațiilor $[R]$ de centru O, grupul de transformări $[HT]$, considerat la § 8°, *b* este perfect simetric în raport cu grupul $[R]$ {1, § 13°}.

Astfel grupul $[S_2] = [T(O)] \cup [H] \cup [HT]$ este perfect simetric în raport cu grupul $[R]$ {2, § 25°}.

Ca urmare, mulțimea $[RS_2]$,

$$[RS_2] = [RT] \cup [RH] \cup [RHT],$$

este un grup {1 § 14°}, perfect simetric în raport cu grupul $[R]$ {2, § 24°}.

Rezultă că *mulțimea*

$$[S'] = [S_2] \cup [R] \cup [RS_2] =$$

$$= [T(O)] \cup [H] \cup [HT] \cup [RT] \cup [RH] \cup [RHT]$$ *este un grup* {1, § 17°}, *perfect simetric în raport cu grupul* $[R]$.

Întrucît produsul de transformări RH este comutativ,

$$[S'] = [S].$$

Astfel grupul $[S]$ este perfect simetric în raport cu grupurile $[R]$, $[H]$. Urmează că $[S]$ este perfect simetric în raport cu $[RH]$ {2, § 24°}.

9°. *Formule de transformare.*

Se dă translația convergentă T de centru O și vector $\bar{v}$. Fie Ox axa translației convergente și pe ea punctul F', astfel încît $\overline{OF'} = \bar{v}$. Se ia ca sens pozitiv pe axa Ox sensul vectorului $\overline{OF'}$. Considerăm sistemul de axe rectangulare xOy și punctul $M(x, y)$. Prin T punctul M se transformă în $M_1(x_1, y_1)$.

Întrucît

$$\overline{MM_1} = v \cos(\pi + \alpha) \frac{\overline{OM}}{OM}, \qquad \alpha = (\widehat{\bar{v}, \overline{OM}})$$

rezultă

$$\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{MM_1} = \left(1 - \frac{v \cos \alpha}{OM}\right) \overline{OM}$$

sau, notînd $\bar{i}$, $\bar{j}$ versorii axelor Ox, Oy și cum

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ rezultă}$$

$$x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} = \left(1 - \frac{v x}{x^2 + y^2}\right)(x \bar{i} + y \bar{j}).$$

Astfel avem următoarele formule de transformare pentru translația convergentă

$$x_1 = x\left(1 - \frac{v x}{x^2 + y^2}\right), \qquad y_1 = y\left(1 - \frac{v x}{x^2 + y^2}\right) \tag{11}$$

sau

$$x = x_1\left(1 + \frac{v x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right), \qquad y = y_1\left(1 + \frac{v x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right). \tag{12}$$

10°. *Proprietăți.*

a) *Translația convergentă transformă o dreaptă într-o cubică care trece prin punctele ciclice, avînd centrul translației punct dublu.*

Dreapta

$$Ax + By + C = 0$$

este transformată prin translația convergentă T în cubica

$$(Ax + By + C)(x^2 + y^2) + vx(Ax + By) = 0. \tag{13}$$

În particular, dreapta care trece prin origina

$$Ax + By = 0$$

se transformă în ea însăși și în cercul (γ'),

$$x^2 + y^2 + vx = 0$$

simetricul cercului caracteristic al transformării T în raport cu centrul O al transformării.

b) *Translația convergentă transformă un cerc* (Γ) *care trece prin centrul ei într-un cerc* (Γ_1) *care trece prin acest centru și în cercul* (γ'). *Centrele cercurilor* (Γ), (Γ_1) *aparțin unei paralele la axa translației.*

Cercul

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

se transformă prin T în cercul

$$(\Gamma_1) \quad x^2 + y^2 - 2\left(a - \frac{v}{2}\right)x - 2by = 0 \tag{14}$$

și în cercul (γ')

$$x^2 + y^2 + vx = 0$$

Observăm că punctele cercului (Γ), cu excepția centrului translației convergente, se transformă în puncte ale cercului (Γ_1), iar centrul translației se transformă în cercul (γ').

c) *Translația convergentă transformă un cerc care nu trece prin centrul ei într-o cuartică bicirculară având centrul translației punct dublu.*

Cercul

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

se transformă prin T în cuartica

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(vx - ax - by) +$$
$$+ (v^2 - 2av + c)x^2 - 2bvxy + cy^2 = 0.$$

d) *Translația convergentă* T *transformă familia de cubice*

$$(x^2 + y^2)(Ax + By + C) + \lambda x(Ax + By) = 0 \tag{15}$$

unde A, B, C, *sînt constante, iar* λ *parametru, în ea însăși și în cercul* (γ').

În adevăr, cubica corespunzînd valorii λ_1 a parametrului se transformă în

$$(x^2 + y^2)(Ax + By + C) + (\lambda_1 + v)x(Ax + By) = 0$$

și în cercul

$$x^2 + y^2 + vx = 0$$

Ca urmare, cubica (13) în care se transformă prin T dreapta

$$Ax + By + C = 0$$

se transformă prin T^n în cubica

$$(x^2+y^2)(Ax+By+C)+nvx(Ax+By)=0.$$

Cubica

$$(x^2+y^2)(Ax+By+C)-vx(Ax+By)=0$$

se transformă prin T în dreapta

$$Ax+By+C=0$$

și în dreptele izotrope care trec prin centrul tranformării T.

CONCLUZIE. Grupul translațiilor convergente centroaxiale $[T(O,\Delta)]$ păstrează cubicele familiilor

$$(x^2+y^2)(Ax+By+C)+\lambda x(Ax+By)=0.$$

11°. *Invarianți.*

a) Considerăm grupul $[T(O,\Delta)]$ al translațiilor convergente definite de același centru O și de aceeași axă Δ. Considerînd sistemul de axe rectangulare xOy, în care $Ox\equiv\Delta$, dacă $M_1(x_1, y_1)$ este transformatul punctului $M(x, y)$ printr-o transformare $T\in[T(O,\Delta)]$, avem

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y}{x}.$$

Rezultă că $\frac{y}{x}$ este un invariat față cu grupul $[T(O,\Delta)]$, iar geometria planului definită de grupul $[T(O,\Delta)]$ se referă la studiul expresiilor $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Ca urmare,

$$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4)$$

fiind 4 puncte situate în planul xOy, expresia

$$E(M_1M_2M_3M_4)=\frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}} \tag{16}$$

este un invariat față de transformările grupului $[T(O,\Delta)]$.

Dacă notăm OM_iM_j aria triunghiului format de punctele O, M_i, M_j rezultă că invariantul $E(M_1M_2M_3M_4)$ este biraportul de arii

$$\frac{OM_1M_3}{OM_2M_3}:\frac{OM_1M_4}{OM_2M_4}.$$

b) $E(M_1M_2M_3M_4)$ *este un invariant față de grupul rotațiilor de centru* O.

În adevăr, considerînd o rotație R de centru O și unghiu ϑ, dacă $M'(x'\ y')$ este transformatul unui punct $M(x,\ y)$ prin rotația R și notăm $\alpha = x\widehat{OM}$, avem

$$\frac{y}{x} = tg\,\alpha, \quad \frac{y'}{x'} = tg(\alpha + \vartheta).$$

Deci

$$\frac{y'}{x'} = \frac{tg\,\vartheta + \dfrac{y}{x}}{1 - tg\,\vartheta\,\dfrac{y}{x}}. \tag{17}$$

Astfel $\dfrac{y'}{x'}$ este transformata lui $\dfrac{y}{x}$ prin omografia (17) și cum omografia păstrează raportul armonic a patru numere, rezultă că $M_i'(x_i', y_i')$ fiind transformatele punctelor $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ prin rotația R, avem

$$E(M_1M_2M_3M_4) = \left(\frac{y_1}{x_1}\ \frac{y_2}{x_2}\ \frac{y_3}{x_3}\ \frac{y_4}{x_4}\right) = \left(\frac{y_1'}{x_1'}\ \frac{y_2'}{x_2'}\ \frac{y_3'}{x_3'}\ \frac{y_4'}{x_4'}\right)$$

și E este un invariant față de grupul rotațiilor cu centrul O.

Proprietatea rezultă și din semnificația geometrică a expresiei $E(M_1M_2M_3M_4)$.

c) *$E(M_1M_2M_3M_4)$ este un invariant față de grupul $[T(O)]$ al translațiilor convergente cu același centru O.*

În adevăr $T \in [T(O)]$ fiind translația convergentă definită de un vector $\bar{v}$ având direcția și sensul semiaxei Ox, dacă $T_1 \in [T(O)]$ este o translație convergentă definită de un vector $\bar{v}_1$ care face unghi ϑ cu Ox și are mărimea $v_1 = v$, atunci am arătat că

$$T_1 = R\ T\ R^{-1}$$

unde R este rotația de centru O și unghi ϑ.

Întrucît $E(M_1M_2M_3M_4)$ nu își schimbă valoarea prin translația convergentă T și prin rotațiile R^{-1}, R, nu își schimbă valoarea prin T_1.

d) *$E(M_1M_2M_3M_4)$ este invariant în raport cu grupul* [S] definit la § 8°, *d*, întrucît $E(M_1M_2M_3M_4)$ este invariant în raport cu grupul $[T(O)]$ al translațiilor convergente de centru O, în raport cu grupul $[R]$ al rotațiilor de centru O și — cum se verifică imediat — în raport cu grupul $[H]$ al omotetiilor de centru O.

12°. *Grupul transformărilor prin lentilă convergentă cu același centru și modul.*

Fie $[L(O, k)]$ mulțimea transformărilor prin lentilă convergentă definite de centrul O și modulul k.

a) Inversa transformării $L \in [L(O, k)]$ de vector $\bar{v}$, este o transformare a mulțimii considerate, definită de vectorul $-\bar{v}$.

În adevăr T fiind translația convergentă de centru O și vector $\overline{v}$, T^{-1} translația convergentă de centru O și vector $-\overline{v}$, iar I inversiunea de pol O și modul k, avem

$$L = ITI \quad , \quad L \in [L(0,k)] \quad \text{și}$$
$$L' = IT^{-1}I \, , \quad L' \in [L(0,k)].$$

Rezultă

$$L\,L' = 1 \, , \text{ deci} \qquad L' = L^{-1}.$$

b) *Produsul a două transformări ale mulțimii* $[L\,(O,k)]$ *este echivalent cu o transformare a acestei mulțimi.*

Fie $L_1 \in [L\,(O,\ k)]$, $L_2 \in [L\,(O,\ k)]$ definite respectiv de translațiile convergente T_1, T_2. Avem

$$L_2\,L_1 = (I\,T_2\,I)\,(I\,T_1\,I) = I\,(T_2\,T_1)\,I$$

și cum $[T\ (O)]$ este un grup, produsul $T_2\ T_1$ este echivalent cu translație convergentă T a acestui grup.

Deci, notînd

$$\mathrm{L} = \mathrm{I\,T\,I}\,, \; L \in [L\ (O,\ k)]$$

avem

$$L_2\ L_1 = L.$$

CONCLUZIE. Mulțimea. $[L\ (O,\ k)]$ *este un grup.*

Grupul $[L\ (O,\ 1)]$ este acel care se aplică în teoria imaginilor prin lentilele biconvexe.

13. *Grupul transformărilor prin lentilă convergentă, cu același centru.*

Fie $[L\,(O)]$ mulțimea transformărilor prin lentilă convergentă cu același centru O. Să arătăm că produsul a două transformări ale acestei mulțimi este echivalent cu o transformare a mulțimii.

Considerăm $L_1 \in [L\ (O)]$ definită de translația convergentă T_1 de centru O și de inversiunea I, cu polul O și modul k_1,

$$L_1 = I_1\ T_1\ I_1.$$

De asemenea, considerăm $L_2 \in [L\ (O)]$ definită de translația convergentă T_2 de centru O și de inversiunea I_2, cu polul O și modulul k_2,

$$L_2 = I_2\ T_2\ I_2.$$

Avem

$$L_2\ L_1 = (I_2\ T_2\ I_2)\ (I_1\ T_1\ I_1).$$

Dar $I_2\ I_1$ este echivalent cu o omotetie H de centru O, deci

$$L_2\ L_1 = I_2\ T_2\ H\ T_1\ I_1$$

și dacă T_1' este corespondenta translației convergente T_1 în raport

cu H, avem

$$H\,T_1 = T_1'\,H$$

$$L_2\,L_1 = I_2\,T_2\,T_1'\,H\,I_1.$$

Cum translațiile convergente cu același centru formează un grup, $T_2\,T_1'$ este echivalent cu o translație convergentă T de centru O. De asemenea

$$H\,I_1 = I_2.$$

Astfel

$$L_2\,L_1 = I_2\,T\,I_2.$$

Deci

$$L_2\,L_1 = L \in [L\,(O)].$$

14°. *Mulțimea transformărilor prin lentile convergente plane.*

a) Fie $[L]$ mulțimea transformărilor prin lentile convergente ale planului P, având drept centre punctele planului, definite de vectorii acestui plan și de numerele reale k, $[\tau]$ mulțimea translațiilor definite de vectorii planului P.

Dacă $L \in [L]$ este transformarea prin lentilă convergentă definită de centrul O, de vectorul $\overline{v}$ și de modulul k, iar $\tau \in [\tau]$ este translația de vector $\overline{w}$, corespondenta transformării L în raport cu τ este $L_1 \in [L]$ definită de centrul O_1, transformat al punctului O prin τ, de vectorul $\overline{v}$ și de modulul k.

În adevăr, dacă T este translația convergentă dată de centrul O și de vectorul $\overline{v}$, iar I inversiunea de pol O și modul k, avem

$$L = I\,T\,I.$$

T_1 fiind corespondenta transformării T în raport cu τ,

$$\tau\,T = T_1\,\tau.$$

De asemenea inversiunea I_1 având polul O_1 și modulul k este corespondenta inversiunii I în raport cu τ, întrucît

$$\tau\,I = I_1\,\tau.$$

Transformarea prin lentilă convergentă L_1 este

$$L_1 = I_1\,T_1\,I_1.$$

Și cum

$$\tau\,L = \tau\,I\,T\,I = I_1\,\tau\,T\,I = I_1\,T_1\,\tau\,I = I_1\,T_1\,I_1\,\tau = L_1\,\tau,$$

rezultă că L_1 este corespondenta transformării L în raport cu τ.

La fel se arată că L este corespondenta unei transformări $L' \in [L]$ definită de centrul O', care se transformă în O prin τ, de vectorul $\overline{v}$ și de modulul k.

Rezultă că mulțimea transformărilor prin lentile convergente ale planului este perfect simetrică în raport cu mulțimea translațiilor planului.

Avem și

$$L_1 = \tau L \tau^{-1}.$$

Astfel orice transformare prin lentilă convergentă a planului se poate exprima cu o transformare prin lentilă convergentă a mulțimii $[L(O)]$ și cu o translație a mulțimii $[\tau]$.

15°. *Grupul* $[L(O)]$ *al transformărilor prin lentile convergente de centru* O *este perfect simetric în raport cu grupul rotațiilor de centru* O.

a) Corespondenta unei transformări prin lentilă convergentă $L \in [L(O)]$ de vector $\bar{v}$ și modul k în raport cu o rotație R de centru O și unghi α, este transformarea $L_1 \in [L(O)]$ definită de vectorul $\bar{v}_1$, dedus din $\bar{v}$ prin R și de modulul k.

În adevăr, dacă T este translația convergentă de centru O și de vector $\bar{v}$, iar T_1 este corespondenta sa în raport cu transformarea R, dacă I este inversiunea de pol O și modul k, avem

$$RT = T_1 R$$

și

$$RI = IR.$$

De asemenea

$$L = LTI, \quad L_1 = IT_1 I.$$

Rezultă

$$RL = R(ITI) = IRTI = IT_1 RI = IT_1 IR = L_1 R$$

și astfel L_1 este corespondenta transformării L în raport cu transformarea R.

La fel se arată că L este corespondenta în raport cu transformarea R a unei transformări $L' \in [L(O)]$, definită de vectorul $\bar{v}'$, care prin R se transformă în $\bar{v}$ și de modulul k.

Ca urmare, $[L(O)]$ este perfect simetrică în raport cu grupul $[R]$ al rotațiilor de centru O și avem

$$L_1 = RLR^{-1}.$$

b) Deducem, avînd în vedere {1, § 14°}, că mulțimea $[RL]$, formată din produsele fiecărei transformări a grupului $[L(O)]$ cu fiecare rotație a grupului $[R]$, este un grup perfect simetric în raport cu grupul $[R]$.

De asemenea mulțimea de transformări $[\omega_1]$ definită astfel

$$[\omega_1] = [L(O)] \cup [R] \cup [RL]$$

formează un grup perfect simetric în raport cu grupul $[R]$.

Și ținînd seama de § 7°, mulțimea de transformări

$$[\omega_1^x] = [T(O)] \cup [L(O)] \cup [R] \cup [RT] \cup [RL]$$

este perfect simetrică în raport cu grupul $[R]$.

16°. *Grupul [L (O)] al transformărilor prin lentile convergente de centru O este perfect simetric în raport cu grupul [H] al omotetiilor de centru O.*

a) Corespondenta unei transformări prin lentilă convergentă $L \in [L(O)]$ de vector $\bar{v}$ și modul k în raport cu o omotetie H de centru O și raport λ este transformarea $L_1 \in [L(O)]$ definită de vectorul $\bar{v}_1 = \lambda \bar{v}$ și de modulul k. În adevăr, dacă T este translația convergentă de centru O și de vector $\bar{v}$, iar T_1 este corespondenta sa în raport cu transformarea H, dacă I este inversiunea de pol O și modul k, avem

$$H T = T_1 H$$

și

$$H I = I H.$$

Atunci

$$L = I T I, \; L_1 = I T_1 I$$

și rezultă

$$H L = H (I T I) = I H T I = I T_1 H I = I T_1 I H = L_1 H,$$

de unde rezultă că L_1 este corespondenta transformării L în raport cu H,

$$L_1 = H L H^{-1}$$

La fel se arată că L este corespondenta în raport cu H a unei transformări $L' \in [L(O)]$ definită de vectorul $\bar{v}' = \frac{1}{\lambda} \bar{v}$ și de modulul k.

Conchidem că $[L(O)]$ este un grup perfect simetric în raport cu grupul $[H]$.

b) Urmează că mulțimea $[HL]$, formată din produsele fiecărei transformări a grupului $[L(O)]$ cu fiecare omotetie a grupului $[H]$, este un grup perfect simetric în raport cu grupul $[H]$.

De asemenea mulțimea $[\omega_2]$ definită astfel

$$[\omega_2] = [L(O)] \, U [H] \, U [HL]$$

formează un grup perfect simetric în raport cu grupul $[H]$.

Ținînd seama de § 8° mulțimea de transformări

$$[\omega_2^x] = [T(O)] \, U [L(O)] \, U [H] \, U [HT] \, U [HL]$$

este perfect simetică în raport cu grupul $[H]$.

c) Grupul $[L(O)]$ fiind perfect simetric în raport cu grupul rotațiilor $[R]$ de centru O și în raport cu grupul omotetiilor $[H]$ de centru O, este perfect simetric și în raport cu grupul de transformări $[RH]$ format din produsul fiecărei omotetii a grupului $[H]$ cu fiecare rotație a grupului $[R]$.

Urmează că mulțimea de transformări $[RHL]$ sau $[HRL]$, unde $L \in [L(O)]$, $R \in [R]$, $H \in [H]$ este un grup perfect simetric în raport cu grupurile de transformări $[H]$, $[R]$, $[HR]$.

d) Întrucît grupul de transformări $[RL]$ este perfect simetric și în raport cu $[H]$ {1, § 13°}, deducem că grupul $[\omega_1]$ definit mai sus (§ 15°) este perfect simetric în raport cu grupul $[H]$ {2, § 25°} deci și cu $[HR]$.

Rezultă {2, § 24°} că mulțimea de transformări $[H\omega_1]$,

$$[H\omega_1] = [HL]\,U\,[HR]\,U\,[HRL]$$

este un grup, perfect simetric în raport cu $[H]$.

De asemenea *mulțimea de transformări*

$$[\omega] = [\omega_1]\,U\,[H]\,U\,[H\omega_1] =$$
$$= [L(O)]\,U\,[R]\,U\,[RL]\,U\,[H]\,U\,[HL]\,U\,[HR]\,U\,[HRL]$$

este un grup perfect simetic în raport cu grupul $[H]$.

e) Întrucît mulțimile $[L\ (O)]$, $[H]$ sînt perfect simetrice în raport cu mulțimea $[R]$ a rotațiilor de centru O, grupul de transformări $[HL]$ este perfect simetric în raport cu grupul $[R]$.

Ca urmare, grupul

$$[\omega_2] = [L(O)[\,U\,[H]\,U\,[HL]$$

este perfect simetric în raport cu grupul $[R]$.

Astfel mulțimea de transformări

$$[R\omega_2] = [RL]\,U\,[RH]\,U\,[RHL]$$

este un grup, perfect simetric în raport cu grupul $[R]$.

Rezultă că *mulțimea de transformări*

$$[\omega'] = [\omega_2]\,U\,[R]\,U\,[R\omega_2] =$$
$$= [L(O)]\,U\,[H]\,U\,[HL]\,U\,[R]\,U\,[RL]\,U\,[RH]\,U\,[RHL]$$

este un grup {1, § 17°}, *perfect simetric în raport cu grupul* $[R]$.

Deoarece produsul de transformări $R\ H$ este comutativ,

$$[\omega'] = [\omega[\,.$$

Conchidem că *grupul de transformări* $[\omega]$ *este perfect simetric în raport cu grupurile* $[R]$, $[H]$, *deci și cu* $[H\ R]$.

17°. *Formule de transformare.*

Considerăm transformarea prin lentilă convergentă L, definită de centrul O, de vectorul $\overline{v}$ și de modulul k, apoi inversiunea I de pol O și modulul k și translația convergentă T, definită de centrul O și vectorul $\overline{v}$.

Raportînd punctele planului la sistemul de axe rectangulare Ox, Oy unde Ox are direcția și sensul vectorului $\overline{v}$, un punct $M\ (x,\ y)$ se transformă prin I în $M'\ (x',\ y')$. Acesta se transformă în $M''\ (x'',\ y'')$ prin T, iar M'' se transformă în $M_1\ (x_1,\ y_1)$ prin I. Punctul M_1 este deci transformatul lui M prin L.

Avem

$$x' = \frac{k\,x}{x^2 + y^2} \quad , \qquad y' = \frac{k\,y}{x^2 + y^2}$$

și — ținînd seama de § 9°

$$x'' = x'\left(1 - \frac{v\,x'}{x'^2 + y'^2}\right) \quad , \quad y'' = y'\left(1 - \frac{v\,x'}{x'^2 + y'^2}\right)$$

deci

$$x'' = \frac{x}{x^2 + y^2}(k - v\,x) \quad , \quad y'' = \frac{y}{x^2 + y^2}(k - v\,x). \tag{18}$$

Întrucît

$$x_1 = \frac{k\,x''}{x''^2 + y''^2} \quad , \quad y_1 = \frac{k\,y''}{x''^2 + y''^2}$$

găsim *formulele care definesc transformarea* L:

$$x_1 = \frac{k\,x}{k - v\,x} \quad , \quad y_1 = \frac{k\,y}{k - v\,x} \tag{19}$$

sau

$$x = \frac{k\,x_1}{k + v\,x_1} \quad , \quad y = \frac{k\,y_1}{k + v\,x_1}. \tag{20}$$

18°. *Proprietăți.*

a) *Transformarea prin lentilă convergentă transformă dreptele planului în drepte.*

Transformarea L, definită în § 17°, transformă dreapta

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

în

$$k(A\,x + B\,y + C) + C\,v\,x = 0.$$

În particular, dreptele, care trec prin centrul transformării, se transformă în ele însele.

b) *Transformarea prin lentilă convergentă transformă o dreaptă perpendiculară pe axa lentilei într-o dreaptă perpendiculară pe axa lentilei.*

Dreapta

$$x = a$$

se transformă prin L în

$$x = \frac{a\,k}{k - a\,v}.$$

c) *Raportul armonic a patru puncte coliniare este invariat față de transformările grupului* $[L(O)]$,

deoarece formulele (19), (20) arată că aceste transformări sînt niște transformări omografice plane.

d) În raport cu transformarea L, lentila transformării este o dreaptă de puncte duble.

e) În general, L transformă cercurile în conice. Astfel cercul

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

este transformat în conica.

$$k^2(x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c) - 2kvx(ax + by - c) + cvx^2 = 0$$

Dar cercurile care au centrul pe axa transformării L și satisfac relația

$$\frac{c}{2a} = k,$$

se transformă în cercuri cu centrul pe axa transformării.

f) Expresia

$$E(M_1M_2M_3M_4) = \frac{OM_1M_3}{OM_2M_3} : \frac{OM_1M_4}{OM_2M_4}$$

este invariant în raport cu transformările grupului $[L(O)]$.

De asemenea este invariant față cu transformările grupului $[\omega]$.

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Ionescu-Bujor.* Sur les transformations correspondantes par rapport à une transformation donée. I. Bul. Inst. Politehnic București. Tom. XXI. Fasc. 1.

2. *C. Ionescu-Bujor.* Sur les transformations correspondantes par rapport à une transformation donnée. II. Bul. Inst. Politehnic București. Tom. XXI. Fasc. 2.

ОБ ОПТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

(Краткое содержание)

Сходящаяся плоская трансляция является преобразованием T, определяемым точкой и вектором $\bar{v}$. Оно преобразует точку N плоскости P, которая проходит через (.) O параллельно вектору $\bar{v}$ в точку N_1, таким образом что точки O, N, N_1 оказываются на одной прямой,

$$\overline{NN_1} = v\cos(\pi + \alpha)\frac{\overline{ON}}{ON}, \text{ где } \alpha = (\widehat{\bar{v}, \overline{ON}}).$$

Точка O является центром преобразования T, $\bar{v}$ вектором его.

Пусть I обратное преобразование, имеющее точку O полюсом, модуль которого равен K.

Даётся название преобразования через линзу сходящегося в одной точке плоскости P, преобразованию L, определённому как произведение преобразований ITI.

1. Сходящиеся трансляции, имеющие один и тот же центр, вектора которых колинеарны, образуют коммутативную группу.

2. Сходящиеся трансляции, которые имеют один и тот же цетр O образуют коммутативную группу. $[T(O)]$.

3. Множество сходящихся трансляций действующих в плоскости P являются совершенно симметричными относительно множества трансляций, приложенных в этой плоскости.

4. Группа $[T(O)]$ является совершенно симметричной относительно группы $[R]$ плоских вращений, центр которых находится в точке O. $[T(O)]$ является также совершенно симметричным по отношению к группе обобщенного подобия [H], которая имеет центром точку $(O)]$

5. Множество $[S]=[T(O)]\cup[R]\cup[H]\cup[RT]\cup[HT]\cup[RH]\cup[RHT]$. является совершенно симметричной группой относительно $[R], [H],]RH]$.

6. Показываются подобные свойства для множества преобразований L.

OPTIC TRANSFORMATIONS

(Summary)

The convergent translation of the plan is a transformation T determined from a point O and from a vector $\overline{v}$.

She transforms the point N of the plan P that pass by O, parallel at the vector $\overline{v}$, in a point N_1 so that:

the points O, N, N_1 are collinear,

$$\overline{NN_1} = v\cos(\pi+\alpha)\frac{\overline{ON}}{ON}\ , \qquad \text{with } \alpha = (\widehat{\overline{v}, \overline{ON}}).$$

O ist the centre of the transformation T, $\overline{v}$ is hers vector. *We* consider the inversion I that has in O the centre and $\sqrt{\lambda}$ the radius hers circle. The transformation by convergent lentil of the plan P is a transformation L equivalent to the product of transformations $I.T.I$.

1. The convergent translations with the same centre and collinear vectors, form an abelian group.

2. The convergent translations with the same centre O form an abelian group $[T(O)]$.

3. The set of convergent translations of the plan P is perfect symmetric in connexion with the set of the translations of the plan.

4. The group $[T(O)]$ is perfect symmetric in connexion with the group $[R]$ of the rotations that have in O the centre. $[T(O)]$ is also perfect symmetric in connexion with the group $[H]$ of the homothetic transformations that have in O the centre.

5. The set

$$[S] = [T\ (O)]\ U\ [R]\ U\ [H]\ U\ [RT]\ U\ [HT]\ U\ [RH]\ U\ [RHT]$$

is a perfect symmetric group in connexion with $[R]$, $[H]$, $[RH]$.

6. We demonstrate similar theorems for the set of transformations L.

SUR LES TRANSFORMATIONS OPTIQUES

(Résumé)

La translation convergente plane est une transformation T déterminée par un point O et un vecteur $\bar{v}$. Elle transforme le point N du plan P qui passe par O, parallèle à $\bar{v}$, en un point N_1, tel que

les points O, N, N_1 sont en ligne droite,

$$\overline{NN_1} = v \cos(\pi + \alpha) \frac{\overline{ON}}{ON}, \quad \text{où} \quad \alpha = (\widehat{\bar{v}, \overline{ON}}).$$

O est le centre de la transformation T, $\bar{v}$ est le vecteur de T.

Soit I l'inversion ayant O comme pôle, dont le module est k. On donne le nom de transformation par lentille convergente des points du plan P, à la transformation L définie par le produit de transformations ITI.

1. Les translations convergentes qui ont le même centre, dont les vecteurs sont en ligne droite, forment un groupe commutatif.

2. Les translations convergentes qui ont le même centre O forment un groupe commutatif $[T\ (O)]$.

3. L'ensemble des translations convergentes appliquées au plan P est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble des translations appliquées au même plan.

4. Le groupe $[T\ (O)]$ est parfaitement symétrique par rapport au groupe $[R]$ des rotations planes dont le centre est O. $[T\ (O)]$ este aussi parfaitement symétrique par rapport au groupe $[H]$ des homothéties qui ont O comme centre.

5. L'ensemble

$$[S] = [T\ (O)]\ U\ [R]\ U\ [H]\ U\ [RT]\ U\ [HT]\ U\ [RH]\ U\ [RHT]$$

est un groupe parfaitement symétrique par rapport à $[R]$, $[H]$, $[RH]$.

6. On démontre des propriétés similaires pour l'ensemble des transformations L.

OPTISCHE TRANSFORMATIONEN

(Zusammenfassung)

Die konvergente Verschiebung der Ebene ist eine Transformation, die von einem Punkte O und einem Vektor $\bar{v}$ bestimmt wird. Es sei P die Ebene, die O enthält und mit dem Vektor $\bar{v}$ parallel ist. Die konvergente

Verschiebung T der Ebene P, geht den Punkt N der Ebene in einem Punkt N_1 über und

die Punkte O, N, N_1 gehören einer Gerade,

$$\overline{NN_1} = v \cos(\pi + \alpha) \frac{\overline{ON}}{ON}, \quad \text{wo} \qquad \alpha = (\widehat{\bar{v}, \overline{ON}}).$$

O ist der Mittelpunkt der Transformation, $\bar{v}$ ist seiner Vektor.

Es sei I die Inversion, deren Mittelpunkt O ist.

Die Transformation mit konvergenter Linse wird von dem Produkt $I\ T\ I$ definiert.

1. Die konvergenten Translationen, die denselben Mittelpunkt und die Vektoren auf derselben Gerade haben, bilden eine Gruppe.

2. Die konvergenten Translationen, die denselben Mittelpunkt O haben, bilden eine kommutative Gruppe $[T\ (O)]$.

3. Die Menge der konvergenten Translationen, der Ebene P gelegt, ist eine vollkommensymetrische Menge in Beziehung auf die Menge der Translationen derselben Ebene gelegt.

4. Die Gruppe $[T\ (O)]$ ist vollkommensymetrische in Beziehung auf die Gruppe $[R]$ der Drehungen der Ebene um O.

$[T\ (O)]$ ist auch vollkommensymetrische in Beziehung auf die Gruppe $[H]$ der Ähnlichkeitstransformationen welche die Geraden in parallelen Geraden umgestalten und der Mittelpunkt O haben.

5. Die Menge

$$[S] = [T\ (O)]\ U\ [R]\ U\ [H]\ U\ [RT]\ U\ [HT]\ U\ [RH]\ U\ [RHT]$$

ist vollkommensymetrische in Beziehung auf die Mengen $[R]$, $[H]$, $[RH]$.

6. Wir beweisen gleichartige Sätze für die Menge der Transformationen L.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola II

FIZICA

STRUCTURA STRATELOR SUBȚIRI DE DIELECTRICI ȘI PROPRIETĂȚILE LOR OPTICE *)

de *ION AGARBICEANU*

Introducere.

Stratele subțiri de dielectrici au o importanță crescîndă din cauza aplicațiilor numeroase în interferometria cu fascicole multiple, în eliminarea reflecției luminei incidente, în dispozitive de polarizare, în realizarea de oglinzi speciale (de ex. „oglinzi reci", care reflectă vizibilul dar nu reflectă infraroșul), etc. Deasemenea sub formă de semiconductori au atras atenția prin posibilitățile lor electrice și fotoelectrice în aplicații deosebit de interesante (bolometre, etc.).

În lucrarea de față ne-am ocupat de unele aspecte optice pe care le prezintă multistratele subțiri de dielectrici. Este vorba de depuneri de 7 pînă la 11 strate obținute prin evaporare termică în vid și cu indici de refracție alternînd.

Depuneri de felul acesta au aplicații la etaloane Fabry-Perot, la filtre de lumină, etc. Avantajul lor residă în faptul că uresc un coeficient de reflecție mare (în etaloanele Fabry-Perot) cu o bună transmisie. Aceasta din cauza comportării dielectricilor față de unele electromagnetice. În cazul etaloanelor F.P. cu oglindă metalică, absorbția puternică de către metale a undelor electro-magnetice împiedică obținerea simultană a unei bune transparențe. Totuși și în cazul dielectricilor o structură neomogenă a stratelor depuse sau imperfecțiuni ale suportului pot provoca slăbirea fascicolului incident, fapt care echivalează cu o absorbție. Studiul sistematic al proprietăților optice ale acestor depuneri permite deci a culege informații asupra defectelor stratelor depuse și asupra calității suportului.

Două lucrări importante au apărut în acest domeniu: a lui Dierick Kossel („Interferenzen an Schichten mit einer totalreflektierenden Grenze" Z. f. Jhys., 126, pp. 233—260, 1949), și a lui Pierre Bousquet („Etude de la structure des couches minces transparentes à l'aide des propriétés opti-

*) Rezumat după lucrarea trimisă la sesiunea jubiliară a Universității Alexandru Ion Cuza din Iași, oct. 1960.

ques" : Ann, de Physique, T. 2, nr. 2—4, 1957, pp. 163—213) ; in ambele se studiază reflecția transmisia prin strate unice de criolit, fluorură de calciu, etc., depuse pe sticlă și de grosimi care depășesc de multe ori lungimea de undă.

Considerațiuni asupra teoriei multistratelor.

Stratele studiate de noi au fost depuse pentru a forma oglinzi de calitatea cerută în interferometria cu fascicule multiple de tip Fabry-Perot. În acest scop s-au depus, pe diferiți suporți, strate alternante de SZn și de $3NaF\text{-}AlF_3$ (criolit) ; prima substanță are indicile de refracție 2,36 iar a doua 1,36. Sistemul realizat forma o pilă cu un număr impar de strate, $2\ N + 1$. Grosimea optică a stratelor (n.d), pentru reflecția maximă în incidență normală, este dată de relația bine cunoscută :

$$nd = (2\,k + 1)\frac{\lambda_0}{4} \qquad (1)$$

iar care n este indicele de refracție, d, grosimea geometrică a stratului, k, ordinul de interferență, iar λ_0, lungimea de undă în vid a radiației considerate. Se știe că dacă grosimea stratului satisface relația (1) și acesta este situat între două strate cu indicii de refracție ambii mai mici sau ambii mai mari, atunci raza reflectată la prima interfață, interferează constructiv cu raza reflectată la a doua interfață. Reflecția este cu atît mai puternică cu cît contrastul între indicii de refracție este mai mare și crește cu numărul stratelor. De fapt alte considerații vin și limitează numărul stratelor.

Calculul reflectanței pilelor în strate $\lambda_0/4$ se face mai convenabil cu ajutorul calculului matricial introdus în acest gen de probleme încă din 1947 de Weinstein W. [J. Opt. Soc. Amer., 37, 576, 1947], Herpin A. [C. R. Acad. Sci. Paris, 225, 182, 1947], Abelés F. [C. R. Acad. Sci. Paris, 226, 1808, 1948], Muchmore R. [J. Opt. Soc. Amer., 38, 20, 1948], Sukhanovsky [Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., 106, 226, 1956], etc.

Într-un etalon Fabry-Perot, dacă notăm cu n_1 indicele de refrecție al mediului exterior, în general aerul ($n_1 = 1$), cu n_2 și cu n_3 indicii de refracție ai celor două substanțe (în cazul nostru *SZn* și Criolit), și cu n_e, indicile de refracție al suportului, avem șirul următor :

$$\underset{\uparrow}{n_1}\ n_2\ n_3\ n_2\ n_3 \ldots n_2\ n_3\ \underset{\uparrow}{n_2}\ n_e$$
$$\overbrace{\qquad\qquad 2\,N+1 \qquad\qquad}$$

Matricea caracteristică *) a acestui multistrat este

$$\mathbf{M}_{2N+1} = \mathbf{M}_{2N} \cdot \mathbf{M}$$

*) Abeles F., Ann. Phys. 3, 504, 1948.

În incidență normală și pentru strate $\lambda_0/4$, $\mathbf{M}_{2N}$ se reduce la

$$\mathbf{M}_{2N}=\begin{bmatrix}\left(-\frac{n_3}{n_2}\right)^N & 0\\ 0 & \left(-\frac{n_2}{n_3}\right)^N\end{bmatrix}.$$

și avem deci:

$$\mathbf{M}_{2N+1}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{i}{n_2}\left(-\frac{n_3}{n_2}\right)^N\\ -in_2\left(-\frac{n_2}{n_3}\right)^N & 0\end{bmatrix}.$$

De aici se obține reflectanța:

$$R_{2N+1}=\left[\frac{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\frac{n_2}{n_l}\right)\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}{1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\frac{n_2}{n_l}\right)\left(\frac{n^2}{n_3}\right)^{2N}}\right]^2$$

Un calcul simplu arată că pentru $N > 3$ (adică mai mult de 7 strate $\lambda_0/4$) surplusul de reflectanță crește lent.

Această teorie presupune strate omogene plan paralele și suport ideal. În acest caz reflecția ca și transmisia dată de o pilă constituită din astfel de strate, duce la un cîmp uniform luminat atît pentru reflecție cît și pentru transmisie, dacă incidența se face în lumină paralelă. Unghiul de incidență nu modifică decît culoarea luminii reflectate sau transmise.

În realitate stratele depuse nu sînt omogene, există zone de tranziție și o parte din lumină este difuzată. Aceasta echivalează cu o absorbție și calculul se face în ipoteza unui mediu absorbant, cu indicile de refracție complex dat de

$$n_a = n - i\,k_a$$

ca în cazul metalelor. Aceasta reprezintă un defect serios și răpește din calitatea esențială a stratelor multiple de dielectrici $\lambda_0/4$, de-a avea simultan o bună transmisie și o reflectanță mare.

Calitatea suportului este deasemenea importantă pentru proprietățile optice ale multistratului.

Defectele proprii stratelor și defectele suportului vor apare în special la unghiuri de incidență mare și cîmpul de reflecție și transmisie va trebui să apară diferit ca omogeneitate în cazul incidenței pe partea aer-suport, față de incidența pe fața aer-strat [al $2N + 1$ — lea] în cazul defectelor de suport. Aceasta din cauza nivelărilor acestora prin stratele depuse (ca stratul de zăpadă care reduce denivelările de teren). Franje produse prin interferențe multiple ale lumirei difuzate de neomogeneitățile stratelor, așa cum a studiat Kossel (loc citat) și Bousquet (loc citat) la strate unice, nu pot fi explicate la o pilă multistrat paralelă decît prin neomogeneități optice care provoacă intern unghiuri favorabile reflecției totale la interfețe de separație fie între suport-strat, fie între diferite strate succesive.

Studiu experimental.

Considerațiile expuse succint mai sus ne-au sugerat un șir de experiențe în care am studiat cîmpul de reflecție și cel de transmisie al unor pile de multistraturi depuse pe diverși suporți.

Studiul s-a făcut în lumină naturală și în lumină polarizată. Experiențele realizate sînt următoarele:

1. *Reflecția și transmisia pilelor de 9 și 11 strate alternante depuse pe placă de sticlă comună (sticlă de placă fotografică).* La unghiurile de incidență mici (0°—40° aprox.) cîmpul de reflecție și de transmisie prezintă suficientă uniformitate. La incidențe mai mari, se obținea un sistem de franje colorate, mai precis conturate pentru reflecția în incidența $n_2\ n_3\ n_2\ n_3 \ldots n_2\ n_1$ decît în incidența $n_1\ n_2\ n_3\ n_2\ n_3 \ldots n_2\ n_1$, fapt care pare să confirme nivelarea neegalităților suportului la suprafața pilei. Franjele obținute sînt complimentare în lumină polarizată și sînt polarizate.

2. *Reflexia și transmisia multistratelor depuse pe suporți plan-paraleli lucrați optic și fără tensiuni.*

În acest caz nu se obține un cîmp de reflecție și transmisie brăzdat de franje decît pentru unghiuri de incidență mai mari de 80°.

Se interpretează rezultatele de la pct. 1 și 2 prin existența stratelor de tranziție și prin neomogeneitățile optice și neregularitățile suportului. Unghiurile mari de incidență, amplifică neregularitățile de suprafață și favorizează unghiuri interne de incidență care pot duce la reflecții totale și interferențe multiple.

3. S-a putut pune în evidență o ușoară birefrigență a pilelor de multistraturi în condițiuni care indică o orientare normală perpendiculară pe suport a moleculelor substanțelor depuse.

Concluzii.

Studiul făcut arată posibilitatea cercetării structurii stratelor și calității suportului prin examinarea mai ales în lumina polarizată, a cîmpului de reflecție și transmisie a acestor multistraturi.

Aduc mulțumiri deosebite cercetătorului Laurențiu Blănaru pentru depunerile de straturi.

„LA STRUCTURE DES COUCHES MINCES DIÉLECTRIQUES ET LES PROPRIÉTÉS OPTIQUES"

(Résumé)

On a étudié la transmission et la reflection, en lumière polarisée, des films minces diélectriques, sous un angle d'incidence grand.

On montre que dans ces conditions les défauts des couches et des supports peuvent être mis en évidence plus facilement.

En certains cas, des reflections multiples conduisent à la formation des franges d'interférence. Une faible biréfringence des films sugèrent une orientation normal au support.

„THE STRUCTURE OF DIELECTRIC THIN FILMS AND THEIR OPTICAL PROPERTIES"

(Summary)

The transmission and reflection of polarized light on multilayer dielectric films have been studied under high angle of incidence. It is shown that in this case the defects of the layers and the supports can be detected and contribute in some cases to the formation of interference fringes. A slight birefringence of the films sugests an orientation normal to the supporting plate.

STRUKTUR DÜNNER DIELEKTRIKFILME UND IHRE OPTISCHEN EIGENSCHAFTEN

(Zusammenfassung)

Die Durchlässigkeit und das Reflesionsvermögen dielektrischer Mehrschichtfilme für polarisiertes Licht wurde für grosse Einfallwinkel untersucht. Es wird gezeigt, dass die fehler der Schichten und der Unterlage in Evidenz gesetzt werden körnen und dass sie in manchen Fällen zur Bildung von Interferenzstreifen beitragen können. Eine schwache Doppelbrechung der Filme lässt eine Orientierung normal zur Unterlage vermuten.

СТРУКТУРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОНКИХ ПЛЕНОК И ИХ ОПТИЧЕРКИЕ СВОИСТВА

(Краткое содержание)

Отражение поляризованного света от диэлектрических многослойных пленок и их прозрачность при этом свете изучались при дольших углов падения.

Показывается, что в таких случаев недостатки єлоев и их подставок могут быть обнаружены, и что они участвуют в образовании интерференционных полос.

Из-за слабого двоиного преломления можно подумать об периендикулярной направленность к плоскости подставки.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola II

ORGANIZAREA ȘI PLANIFICAREA ÎNTREPRINDERILOR

UNELE ASPECTE ALE FOLOSIRII INDICATORILOR TEHNICO-ECONOMICI ÎN DETERMINAREA ȘI UTILIZAREA REZERVELOR INTERNE ÎN PRODUCȚIA DE ÎNGRĂȘĂMINTE CU FOSFOR LA FABRICA „PETRU PONI" — VALEA CĂLUGĂREASCĂ *)

H. GRIGORIU și *V. KRAFT*

Transpunerea în practică a ideilor leniniste privind importanța deosebită a evidenței pentru economia socialistă, se realizează prin folosirea unui sistem de indicatori, a căror structură trebuie să corespundă în fiecare etapă de dezvoltare nevoilor economiei naționale.

După cum se știe, indicatorii constituie expresii numerice cu ajutorul cărora se planifică, se coordonează, se urmărește și se analizează activitatea sectoarelor economice. Dată fiind importanța lor, activitatea metodologică de continuă îmbunătățire a sistemului de indicatori constituie o preocupare de bază a cadrelor de specialitate din U.R.S.S. și țările de democrație populară. Lucrările acestora urmăresc elaborarea unui sistem de indicatori statistici codificabili, care să ofere o schemă generală în vederea analizei economice multilaterale a dezvoltării economiei naționale, a ramurilor și întreprinderilor. În realizarea acestui scop se preconizează utilizarea unor scheme cu grad de extindere sau detaliere care poate cuprinde pînă la 20000 indicatori. (Astfel Dir. Statist. de Stat din R. S. Cehoslovacă a elaborat o lucrare, prima de acest gen în lume, cu un volum de peste 18000 indicatori). În examinarea aspectelor teoretice și practice ale problemelor menționate, specialiștii din țara noastră și-au adus contribuția lor, concretizată în propuneri de scheme de indicatori, care prin gradul de detaliare prevăzut reprezintă o îmbunătățire însemnată față de schemele actualmente folosite **).

Elaborarea și folosirea indicatorilor trebuie să cuprindă aspectele tehnico-economice la toate nivelele, începînd de la procesul de producție din întreprinderi. La acest nivel, o deosebită atenție trebuie acordată indicatorilor naturali analitici ai procesului de producție, care prin structura lor și prin posibilitatea de extindere permit realizarea unei analize multilaterale a elementelor procesului de producție: mijloacele de muncă, obiectele muncii

*) Comunicare prezentată la a VI-a sesiune științifică a cadrelor didactice din IPB, 17—18 decembrie 1960.

**) Revista de Statistică nr. 9 și 11/1959.

și forța de muncă. Ori, metodologia actuală folosește un număr restrîns de indicatori naturali, numai pentru caracterizarea în ansamblu a procesului de producție (de ex. : consumul specific de materii prime, utilizarea intensivă a agregatelor de bază etc.). În acest fel însă nu se realizează urmărirea și analiza completă a desfășurării procesului de producție. Față de această situație considerăm necesar să se introducă un sistem de indicatori care să permită urmărirea și analiza procesului de producție în toate etapele desfășurării sale.

În industria chimică, ținînd seama de gruparea și de succesiunea proceselor de muncă, în desfășurarea procesului de producție survin următoarele etape :

— stadiile, care reprezintă o parte a procesului de producție ce se execută în aparate unitare (izolate) sau în grupe de aparate legate nemijlocit între ele. Astfel la fabricarea H_2SO_4 se deosebesc 3 stadii : pregătirea materiei prime (pirita), fabricarea SO_2 și obținerea H_2SO_4 din SO_2 ;

— operațiile, care sînt părți componente ale stadiilor, ce au drept scop schimbarea unei caracteristici (forma, aspectul, structura etc.) a obiectului muncii. Astfel în cadrul stadiului de concasare a piritei, operațiile sînt : concasarea, ciuruirea, mărunțirea în valțuri, a 2-a ciuruire. În cadrul stadiului de fabricație a SO_2 operațiile sînt : prăjirea piritei și purificarea gazelor.

— fazele reprezintă o parte a operațiunilor, caracterizate prin menținerea aceluiași regim de lucru (sau a unor factori specifici) ; schimbarea unora din acești factori determină trecerea la o nouă fază. Astfel în operația de prăjire a piritei în cuptor, fazele sînt : aducerea piritei la cuptor, încărcarea piritei în cuptor, descărcarea cenușii din cuptor, transportul cenușii, supravegherea procesului de prăjire. La operația de purificare a gazelor, fazele sînt : desprăfuirea gazelor în cicloane pentru îndepărtarea impurităților mecanice și purificarea în filtre electrice pentru îndepărtarea impurităților volatile (ca oxizi de arsen) și a impurităților mecanice foarte fine (coloidale). Fazele procesului de producție se descompun în acțiuni și — în continuare — în mînuiri (mișcări elementare, de nedescompus, ale acțiunilor).

Caracterizarea procesului de producție, pe etapele desfășurării sale, poate avea loc cu ajutorul principalilor indicatori ai folosirii utilajului, materialelor și forței de muncă în cadrul acestui proces, (fig. 1).

Folosirea acestui sistem de indicatori, pe etapele procesului de producție, va trebui să evidențieze, mai ales : utilizarea intensivă și extensivă a instalațiilor, agregatelor, etc. în cadrul cărora materiile prime sînt supuse succesiv proceselor fizice și chimice. Utilizarea extensivă trebuie determinată și pentru fondul de timp zilnic ;

— durata desfășurării etapei respective ;

— pierderile de materii, materiale auxiliare și energie, precum și deșeurile rezultate ;

— manopera specifică privind muncitorii direct productivi.

Se preconizează ca acești indicatori să fie determinați pe etapele cît mai simple ale procesului (pe faze), în directă corelație cu parametrii tehnologici ai etapei de producție respectivă. Determinarea și utilizarea indicatorilor de calitate economică a procesului de producție, pe stadiile, operațiile și chiar fazele procesului, pentru planificarea și urmărirea rezultatelor

SCHEMA

UTILIZARII PRINCIPALILOR INDICATORI NATURALI ANALITICI AI PROCESULUI DE PRODUCTIE

INDICATORII UTILIZARII MIJLOACELOR DE MUNCA
- productivitatea utilajului
- folosirea fondului de timp

INDICATORII UTILIZARII FORTEI DE MUNCA
- manopera specifică

INDICATORII UTILIZARII MATERIALELOR
- pierderile de materiale și energie

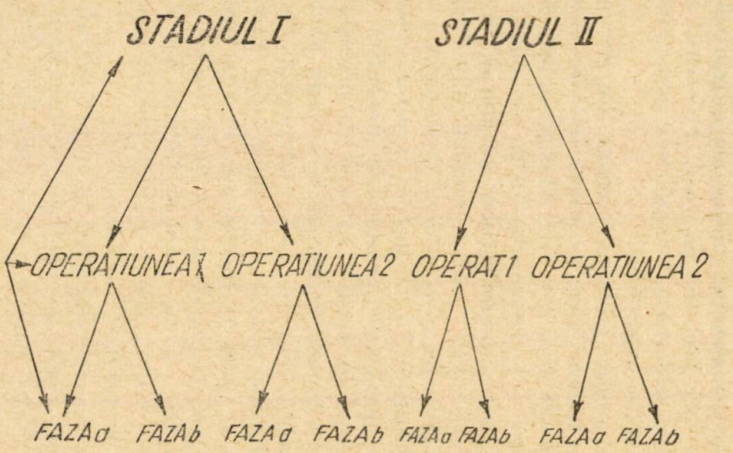


Fig. 1

activității în cadrul întreprinderii, permite evidențierea, dimensionarea justă, precum și folosirea rezervelor interne ale întreprinderii și stabilirea măsurilor în vederea reducerii prețului de cost. Folosirea acestor indicatori necesită desigur o evidență riguroasă privind toți parametrii tehnico-organizatorici ai procesului producției respective.

Atualitatea acestor probleme rezultă din documentele de partid în legătură cu continua îmbunătățire a tuturor indicilor economici ai activității întreprinderilor. În expunerea tov. Gh. Gheorghiu-Dej, la plenara C.C. al P.M.R. din 31 octombrie — 1 noiembrie 1960, se subliniază necesitatea folosirii experienței prețioase a organizațiilor de partid, în mobilizarea energiei creatoare a oamenilor muncii, pentru productivitate mai înaltă, pentru reducerea continuă a prețului de cost, pentru descoperirea și valorificarea rezervelor interne ale producției. În ansamblul acestor rezerve, utilizarea deplină a capacităților de producție prezintă o deosebită importanță, prin efectele economice realizate, în special în ceea ce privește folosirea mai judicioasă a investițiilor. În expunerea făcută la ședința plenară a C.C. al P.M.R. din 26—28 noiembrie 1958, tov. Gh. Gheorghiu-Dej a arătat că „fondurile destinate investițiilor trebuie îndreptate spre lucrările de mare eficacitate economică, care să ducă la dezvoltarea în ritm accentuat a economiei naționale și a venitului național. Acest lucru obligă cadrele de conducere din economie ca, înainte de a propune lucrări noi de investiții, să cunoască și să studieze cu cea mai mare grijă rezervele existente în folosirea deplină a capacităților de producție existente" *).

Sarcinile principale stabilite de Congresul al III-lea al partidului, au ca fir conducător creșterea continuă a eficienței economice a investițiilor, care constituie, după cum a arătat tov. Gh. Gheorghiu-Dej „o preocupare permanentă a partidului nostru". Între principalele căi de realizare a acestui scop, se menționează folosirea suprafețelor construite și a capacităților existente.

Unele deficiențe în utilizarea rezervelor de capacitate existente sînt determinate de aspectele metodologice ale calculului capacității de producție. În această problemă trebuie bine delimitate elementele principale care sînt:

— factorii care determină mărimea capacității de producție existentă la un moment dat;

— căile de utilizare maximă a acestei capacități și respectiv stabilirea planului de producție.

Pentru primul aspect trebuie pornit de la definiția capacității de producție, ca volum al producției maxim posibil în decurs de un an, în condițiile folosirii tehnologiei celei mai moderne și organizării avansate a producției și a muncii, fără a lua în considerare „locurile înguste". În determinarea acestui volum de producție maxim posibil, factorii esențiali sînt normele de utilizare intensivă și extensivă a utilajelor și agregatelor. Pentru întreprinderile chimice prezintă deasemenea deosebită importanță exprimarea capacității de producție în t/an materie primă prelucrată, cu luarea în considerare a conținutului mediu de substanță activă a acesteia și lichidarea sau redu-

*) Gh. Gheorghiu-Dej. Expunerea făcută la șed. plenară a C.C. al P.M.R. din 26—28.XI.1958, pag. 15.

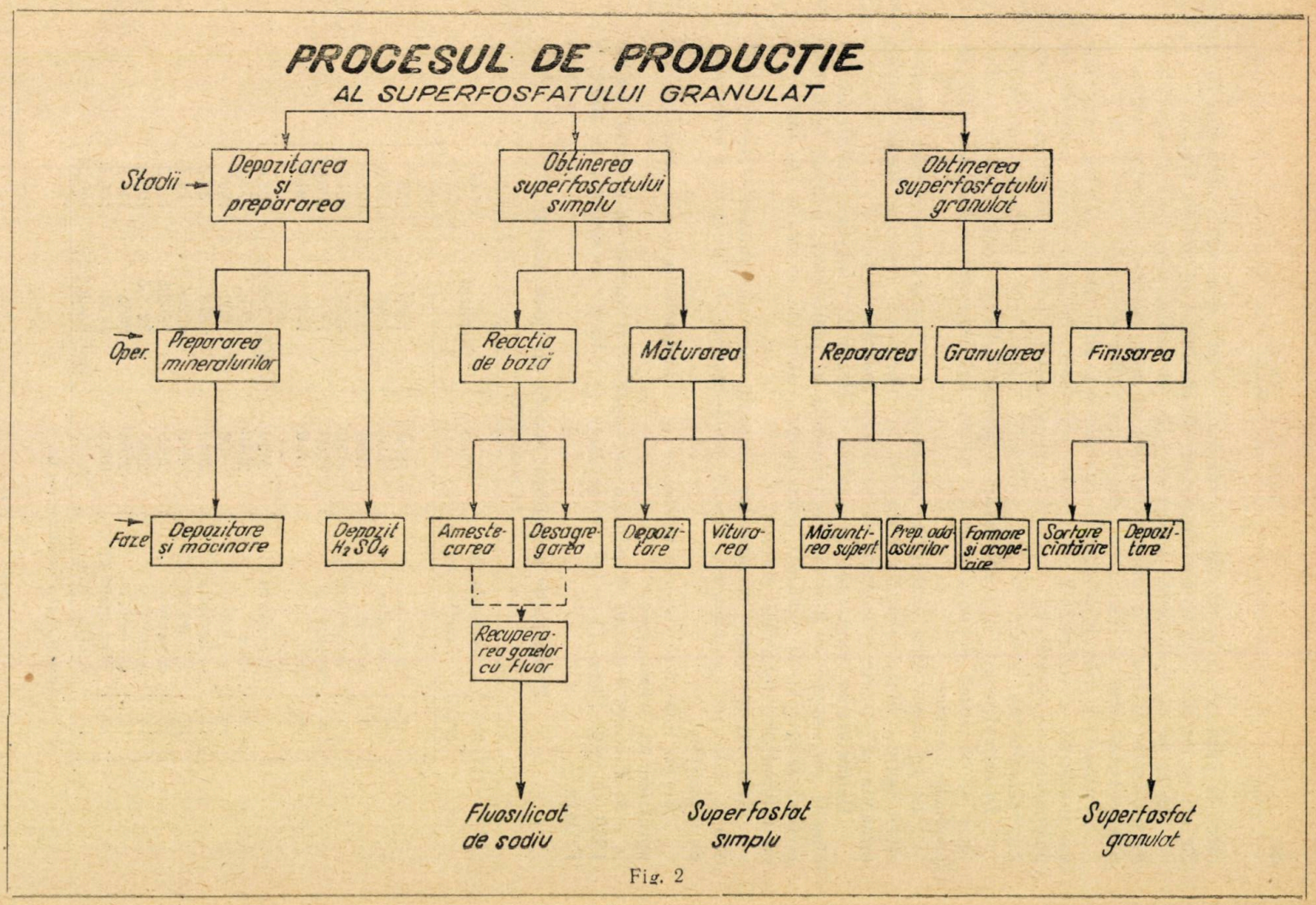

PROCESUL DE PRODUCTIE
AL SUPERFOSFATULUI GRANULAT
Stadii
Depozitarea și prepararea
Obținerea superfosfatului simplu
Obținerea superfosfatului granulat
Oper.
Prepararea mineralurilor
Reacția de bază
Măturarea
Repararea
Granularea
Finisarea
Faze
Depozitare și măcinare
Depozit H_2SO_4
Amestecarea
Desagregarea
Depozitare
Viturarea
Măruntirea superf.
Prep. adaosurilor
Formare și acoperire
Sortare cîntărire
Depozitare
Recuperarea gazelor cu fluor
Fluosilicat de sodiu
Superfosfat simplu
Superfosfat granulat

Fig. 2

cerea la minimum a pierderilor de substanță activă dealungul întregului flux. De aci va rezulta exprimarea capacității de producție în produs finit.

În ce privește al doilea aspect — căile de utilizare maximă a capacității de producție existentă la un moment dat în întreprindere, problema esențială este determinarea și utilizarea tuturor rezervelor existente.

Prezenta lucrare reprezintă o contribuție a autorilor în această problemă, ea urmărind determinarea rezervelor existente la principalul element al mijloacelor de producție, utilajele și agregatele folosite în producția de îngrășăminte cu fosfor la Uz. „PETRU PONI" — Valea Călugărească.

În cadrul secției de superfosfat a întrepr. „Petru Poni", folosirea utilajelor se planifică și se urmărește numai sub aspectul volumului fizic al producției zilnice.

În aplicarea celor arătate în prima parte a lucrării, referitoare la utilizarea indicatorilor, folosirea utilajelor în fabricarea superfosfatului trebuie urmărită pe etapele procesului de producție indicate în fig. 2.

Determinarea, urmărirea și analiza indicatorilor folosirii utilajelor, pe etapele respective, se bazează pe culegerea și prelucrarea datelor statistice privind producția și continuă prin analiza utilizării extensive și intensive, cu evidențierea rezervelor interne.

Prin interpretarea rezultatelor obținute s-au determinat valorile care dau o indicație aproximativă asupra posibilităților de utilizare a rezervelor de capacitate.

Aceste indicații trebuie verificate și completate pe baza unor calcule aprofundate, tehnologice.

A. *Producția secției.* Producția de superfosfat simplu în decursul anilor 1959 și 1960 (sem. I) a fost următoarea (producție recalculată în 100% t P_2O_5) :

Producția de superfosfat simplu (t. subst. activă) în anul 1959

Nr. crt.	Perioada de funcționare	Plan	Realizat	Grad. realiz. %
1	ianuarie	1200	1200	100
2	februarie	1600	1604	100,3
3	martie	1950	2020	103,5
4	Trimestrul I	4750	4824	101.56
5	aprilie	1800	1801	100,06
6	mai	1750	1600	91,6
7	iunie	—	268(*)	
8	Trimestrul II	3350	3402+268(*)	103,4
9	iulie	2040	1502	73,7
10	august	900	900	100
11	septembrie	2040	1818	89,2
12	Trimestrul III	4980	4220	84,7
13	octombrie	2265	2502,5	110,2
14	noiembrie	2260	2266,5	100,3
15	decembrie	2265	2655	117,3
16	Trimestrul IV	6790	7424	109,3
17	ANUL 1959	20.070	19.870+268(*)	100,34

(*) a funcționat instalația veche.

GRAFICUL PRODUCTIEI
(date prezentate în tab. 1)

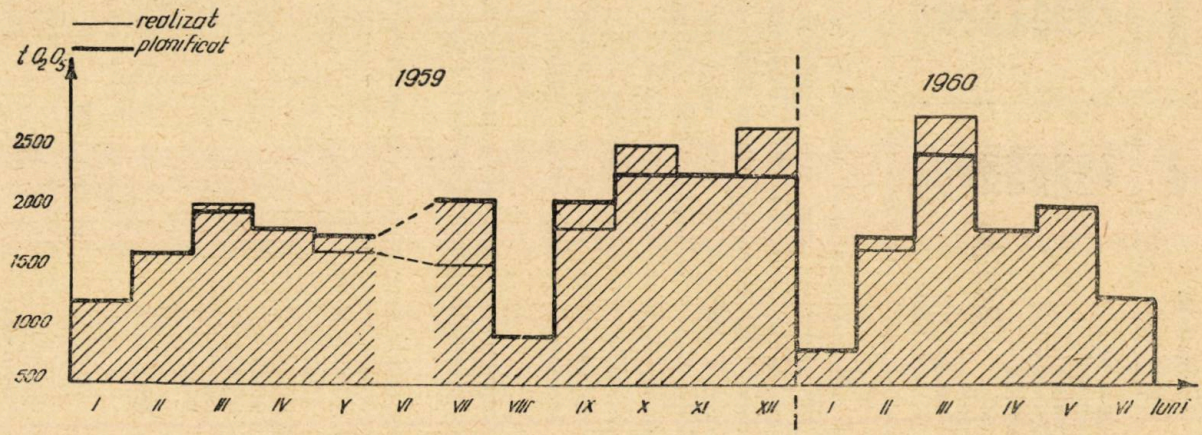


Fig. 3

În anul 1930

Nr. crt.	Perioada de funcționare	Plan	Realizat	Gradul realiz. %
1	ianuarie	800	811	101,4
2	februarie	1750	1629,6	93,3
3	martie	2450	2750,8	112,3
4	Trimestrul I	5000	5191,4	103,8
5	aprilie	1800	1805,3	100,3
6	mai	2000	2003,6	100,1
7	iunie	1250	1252,3	100,1
8	Trimestrul II	5050	5061,2	100,2
9	SEM. I. 1960	10.050	10.252,6	102,02

Se observă că volumul producției planificate a fost realizat la 100,34% pe întreg anul 1959 (datorită mai ales depășirii planului în trim. IV al anului) și la 102,02% în sem. I—1960. Producția nu a fost planificată și nici realizată ritmic. În decursul anului 1959, cea mai slabă realizare a producției planificate a survenit în luna iulie, iar cea mai bună realizare în luna decembrie. În sem. I al anului 1960, realizarea producției planificate s-a obținut în general, în afara lunii februarie.

În întreaga perioadă analizată, producția s-a planificat și realizat la instalația nouă. Instalația veche, în curs de demontare în decursul anului 1959, a fost repusă în funcțiune în iunie 1959, pentru a se putea realiza planul trimestrial.

Producția de superfosfat granulat în decursul anului 1959 și sem. I 1960 a fost următoarea (producție recalculată în t P_2O_5 100%) :

Producția de superfosfat granulat în anul 1959

Nr. crt.	Perioada de funcționare	Plan	Realizat	Gradul realiz. %
1	ianuarie	—	289,4	—
2	februarie	—	420,9	—
3	martie	—	446,5	—
	trim. I	—	1156,8	—
	..... oct.		156,0	—
	anul 1959	—	1312,8	—

în anul 1960

1	ianuarie	400	—	—
2	februarie	875	180,4	20,6
3	martie	550	300,4	54,7
4	aprilie	—	95,8	—
5	mai	—	—	—
6	iunie	—	406,4	—
	Sem. I 1960	1825	983,0	53,8

La granulare producția s-a obținut cu titlu experimental în anul 1959. În 1960 a continuat punerea la punct a instalației, ceea ce a determinat nivele slabe de producție.

B. *Utilizarea extensivă.*

1. În *stadiul „depozitarea și pregătirea materiilor prime"* are loc depozitarea minereurilor și a acidului sulfuric, precum și măcinarea minereurilor cu granulație mare.

Asupra utilizării extensive a instalației de măcinare nu dispunem de date statistice, ea fiind pusă de curînd în funcțiune.

2. În *stadiul „obținerea superfosfatului simplu"*, în analiza folosirii fondului de timp pentru utilajul tehnologic, s-a pornit de la considerația că procesul de producție se desfășoară continuu, iar între fazele din cadrul operațiunii „reacția de bază" nu există posibilitatea de depozitare; oprirea unui utilaj atrage întreruperea întregii instalații. În cadrul operațiunii „reacția de bază" utilizarea extensivă este determinată de folosirea utilajului din faza de desagregare și este egală pentru ambele faze. Urmărind din evidență zilele în care s-a înregistrat producție (din evidență nu s-au putut extrage orele efectiv lucrate) utilizarea extensivă reiese:

Folosirea fondului de timp în anul 1959

Nr. crt.	Perioada de funcționare	Fond calend. (F_c)	Timp de funct.		Utilizarea extensivă (%)		
			Planif. (T_p)	Realiz. (T_r)	$N_{ep} = \frac{T_p}{F_c} \cdot 100$	$N_{er} = \frac{T_r}{F_c} \cdot 100$	$i_{Ne} = \frac{N_{ep}}{N_{er}} \cdot 100$
1	ianuarie	31	13.	28	41,9	90,3.	215,2
2	februarie	28	25.	26	89,3	92,9.	104.
3	martie	31	26.	30.	83,8	96,6	115,3.
4	trimestrul I	90	64.	84.	71,1	93,3.	131,3.
5	aprilie	30	25	27.	83,3	90.	108.
6	mai	31.	27.	29.	87,1	93,6	107,4.
7	iunie	30.	8(*)	12(*)	26,7(*)	46(*)	150(*)
8	trimestrul II	91.	52+8(*)	56+12(*)	57,2	61,6	107,7
9	iulie	31.	26	25	83,8	80,6.	96,1
10	august	31.	27.	13.	87,1	41,9	48,3
11	septembrie	30.	26.	19.	86,7.	63,3.	73,1
12	trimestrul III	92.	79.	57.	85,9	62,	72,2
13	octombrie	31.	26.	28.	83,9	90,3.	107,6
14	noiembrie	30.	26.	27.	86,7	90.	103,8.
15	decembrie	31,	27.	29.	87,1	93,6	107,4.
16	trimestrul IV	92.	79.	84.	85,9	91,3.	106,4.
17	anul 1959	365.	274+8(*)	281+12(*)	75,1.	77.	102,5

(*) a funcționat instalația veche

în anul 1960

1	ianuarie	31.	18.	16.	58,1.	51,6	88.9
2	februarie	29.	25.	22.	86,2.	75,9.	88.
3	martie	31.	27.	29.	87,1.	93,6.	107,4
4	trimestrul I	91.	70.	67.	76,9.	73,6.	95,7
5	aprilie	30.	25.	25.	83,3.	83,3.	100,0
6	mai	31.	27.	26.	87,1.	83,8.	96,3
7	iunie	30.	14.	14.	46,6.	46,6.	100,0
8	trimestrul II	91.	66.	65.	57,1.	71,4.	98,6
9	sem. I—1960	182.	136.	132.	74,7.	72,5.	97,1

Urmărind datele se observă următoarele: pentru întreaga perioadă s-au prevăzut 1 zi/săptămînă reparații curente și 30 zile/an reparații generale; la începutul anului există cîteva zile prevăzute pentru revizuirea instalației. Această normă de reparații s-a stabilit experimental pentru utilajul de bază reactorul Moritz-Standard. Timpul de funcționare planificat a fost în unele perioade depășit (trim. I, trim. IV 1959) ceea ce a permis realizarea și depășirea fondului planificat în întreg anul 1959. Acest fapt ar fi trebuit să atragă (cel puțin în aceiași măsură — cu 2,5%), depășirea planului de producție pe 1959; întrucît realizarea planului de producție a atins 100,3% rezultă că în utilizarea extensivă există rezerve numeroase. În 1960 s-a prevăzut o utilizare mai bună a fondului de timp; fondul de timp planificat nu a putut fi însă realizat, din cauza întreruperilor și defecțiunărilor utilajului.

Orientîndu-ne după perioadele de timp în care a putut fi realizată utilizarea planificată (trim. I, trim. II, trim. IV în 1959) rezultă utilizarea medie posibilă:

$$Ne = \frac{28+26+30+27+29+12+28+27+29}{90+91+92} = \frac{236}{273} = 86{,}5\%$$

Față de media acestor utilizări, utilizarea efectivă a întregului an 1959 și a sem. I 1960, se situează astfel:

$$\delta\ 1959 = \frac{77}{86{,}5}\ 100 = 90\%;\quad \delta\ 1960 = \frac{72{,}5}{86{,}5}\ 100 = 84\%.$$

Rezervele ce reies în utilizarea extensivă (re) sînt astfel:

$$re\ 1959 = 100 - \delta\ 1959 = 10\%,\quad re\ 1960 = 100 - \delta\ 1960 = 16\%.$$

Ele sînt numai sumar dimensionate, în urma lipsei unei evidențe efective, minuțioase, privind orele lucrate în fiecare perioadă.

În ce privește utilajul din faza de amestec a aceleiași operațiuni, utilizarea extensivă poate atinge 95—98% din fondul calendaristic. În operațiunea următoare „maturarea" se folosesc numai 2 poduri rulante, care nu pot asigura vînturarea întregii producții de superfosfat.

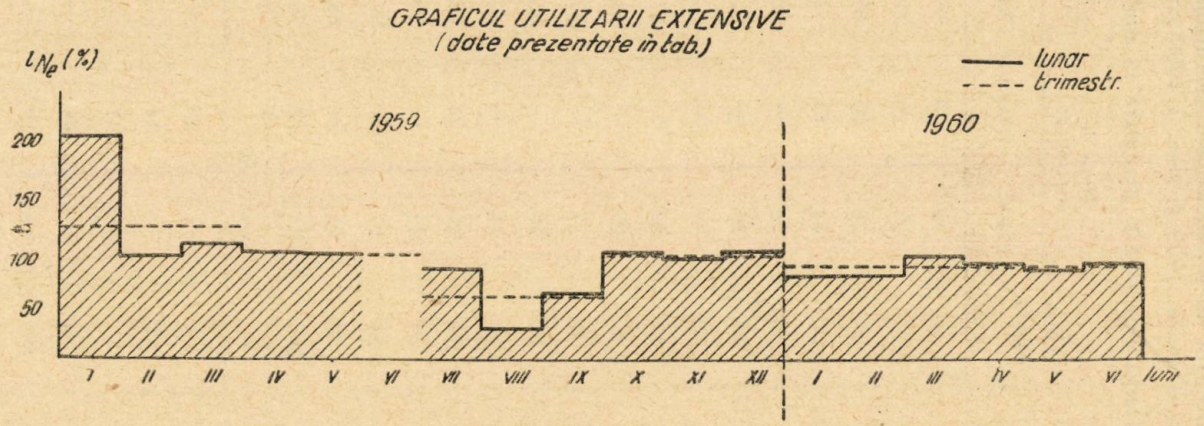

GRAFICUL UTILIZARII EXTENSIVE
(date prezentate in tab.)
$i N_e$ (%)
lunar
trimestr.
1959
1960
200
150
100
50
I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII
I II III IV V VI luni

Fig. 4

3. În *stadiul „obținerea superfosfatului granulat"* utilizarea extensivă este determinată de utilajul de granulare din operațiunea respectivă. Rezultatele obținute în decursul anului 1959 și sem. I 1960 sînt următoarele:

Utilizarea extensivă la granulare în anul 1959

Nr. crt.	Perioada de funcționare	Fond calend.	Timp de funcționare		Utilizarea extensivă (%)		
			Planif.	Realiz.	Nep.	Ner.	I Ne
1	ianuarie	31	13	18	41,9	58,1	138,5
2	februarie	28	25	20	89,3	71,4	80,0
3	martie	31	26	23	83,8	74,2	88,5
4	trimestrul I.	90	64	61	71,1	67,0	95,3
5	aprilie	30	26	—	86,6	—	—
6	mai	31	26	—	83,8	—	—
7	iunie	30	—	—	—	—	—
8	trimestrul II	91	52	—	57,2	—	—
9	iulie	31	26	—	83,8	—	—
10	august	31	27	—	87,1	—	—
11	septembrie	30	26	—	86,6	—	—
12	trimestrul III	92	79	—	85,9	—	—
13	octombrie	31	26	14	83,8	45,2	54
14	noiembrie	30	26	—	86,6	—	—
15	decembrie	31	27	—	87,1	—	—
16	trimestrul IV	92	79	—	85,9	—	—
17	anul 1959.	365	274	75	75	20,5	27,3
	în anul 1960						
1	ianuarie	31	—	—	—	—	
2	februarie	29	—	14	—	48,3	
3	martie	31	—	17	—	54,8	
4	trimestrul I.	91	—	31	—	34,1	
5	aprilie	30	—	6	—	20	
6	mai	31	—	—	—	—	
7	iunie	30	—	16	—	53,3	
8	trimestrul II	91	—	22	—	24,2	
9	sem. I—1960	182	—	53	—	29,1	

În anul 1959 la granulare s-a lucrat numai trim. I realizîndu-se 95,3% în utilizarea extensivă ; pe întreg anul utilizarea extensivă a atins 16,7% din fondul disponibil. Granularea superfosfatului a reînceput în febr. 1960, în sem. I 1960 realizîndu-se utilizarea fondului de timp 29,1%. Aceste realizări nesatisfăcătoare se datorează faptului că nu s-a putut dispune de superfosfat simplu maturizat în suficientă cantitate (cantitățile de superfosfat realizate au fost remise masiv direct beneficiarilor în urma cererii mari, fără a mai avea timp să se maturizeze) ; deasemenea în această perioadă nu s-a putut dispune de superfosfat de calit. I (minim 16% P_2O_5) necesar granulării (în aceste perioade producția de superfosfat a fost aprovizionată cu fosforite de Israel din care se obține superfosfat de calit. II) Rezervele în utilizarea extensivă evidențiază posibilități de producție de cca 5 ori mai mari (comparînd fondul de timp disponibil 86,5% din fondul calendaristic, rezultat la instalația M.S.).

În cadrul aceluiași stadiu utilizarea extensivă în fazele de pregătire a materiilor prime și adausurilor, precum și în fazele operațiunii de finisare, nu ridică probleme.

C. *Utilizarea intensivă.*

1. În *stadiul „depozitarea și pregătirea materiilor prime"*, utilizarea intensivă în fazele de depozitare este nesatisfăcătoare, întrucît minereurile sînt supuse degradării (se depozitează împreună cu pirita cu care se amestecă), iar rezervoarele de acid sulfuric sînt subdimensionate. În ceea ce privește utilizarea intensivă a instalației de măcinare, ea nu asigură prepararea necesarului de minereu.

2. *Stadiul „obținerea superfosfatului simplu"*.

a) Faza de amestec al reactanților se execută într-un malaxor prevăzut cu 4 agitatoare. Malaxorul este paralelipipedic avînd dimensiunile :

$$k = 4376 \cdot 1150 \cdot 1270 = 6{,}4 \text{ m}^3 \text{ — volum util}$$

Indicatorul utilizării intensive (norma tehnico-economică intensivă, exprimată în t P_2O_5/m^3.24 ore) rezultă conform datelor cunoscute (producția obținută, pag. 66, zile lucrate, pag. 69) astfel :

a se vedea pag. următoare :

În decursul anului 1959 s-au atins realizări slabe (6,7 t/m^3.zi în medie în ianuarie) precum și realizări bune (14,95 t/m^3.zi — în medie în septembrie), față de media anului (11,02 t/m^3.zi). Utilizarea intensivă planificată precum și cea realizată prezintă o dinamică defectuoasă. În sem. I 1960 s-au atins realizări superioare (în medie 12,12 t/m^3.zi, precum și în martie 14,83 t/m^3.zi).

Ținînd seama de vol. malaxorului și de timpul de retenție a materialelor pentru amestecare completă (3...5 min.), capacitatea malaxorului revine la 52,5 t pulpă/oră. Pentru superfosfatul cu 16% P_2O_5 (avînd coeficientul de

Utilizarea intensivă pentru faza de amestecare
în anul 1959

Nr. crt.	Perioada de funcționare	Producția (tone P_2O_5)		Zile de funcționare		K. m³-vol. util.	Ni (t/m³, zi)	
		Planificată	Realizată	Planificat	Realizat		Planificat	Realizat
1	ianuarie	1200	1200	13	28		14,42	6,68
2	februarie	1600	1604	25	26		10,00	9,64
3	martie	1950	2020	26	30		11,70	10,50
4	trimestrul I.	4750	4824	64	84		11,60	8,98
5	aprilie	1800	1801	25	27		11,25	10,41
6	mai	1750	1601	27	29		10,11	8,64
7	iunie	—	268(*)	8(*)	12(*)		—	—
8	trimestrul II	3550	3402+268(*)	52+8(*)	56+12(*)		10,69	9,50
9	iulie	2040	1502	26	25		12,25	9,39
10	august	900	900	27	13		5,20	10,84
11	septembrie	2040	1818	26	19	6,4 m³ vol. util.	12,25	14,95
12	trimestrul III	4980	4220	79	57		9,85	11,58
13	octombrie	2265	2502,5	26	28		13,61	13,90
14	noiembrie	2260	2266.5	26	27		13,52	13,01
15	decembrie	2265	2655	27	29		13,10	14,31
16	trimestrul IV	6790	7424	79	84		13,41	13,81
17	anul 1959.	20070	19870+268	274	281		11,71	11,02
	în anul 1960							
1	ianuarie	800	811	18	16		6,94	7,94
2	februarie	1750	1629,6	25	22		10,92	11,55
3	martie	2450	2750,8	27	29		14,2	14,73
4	trimestrul I.	5000	5191,4	70	67		11,16	12,10
5	aprilie	1800	1805,3	25	25	64	11,25	11,3
6	mai	2000	2003,6	27	26		11,59	12,05
7	iunie	1250	1252,3	14	14		13,96	13,93
8	trimestrul II	5050	5061,2	66	65		11,96	12,10
9	sem. I—1960	10050	10252,6	136	132		11,54	12,12

(*) a funcționat instalația veche

transformare $\frac{100}{16} = 6{,}25$), ținînd seama că din 52,5 t pulpă se obțin cca 50 t superfosfat, norma tehnică intensivă pe această fază rezultă.

$$N_{Ti} = \frac{\frac{50}{6{,}25} \times 24^{h}/_{zi}}{6{,}4\ m^3} = 30\ t\ P_2O_5/m^3\ 24\ ore.$$

Se observă că în lunile sept. 1959 și martie 1960, cînd s-a atins utilizarea maximă a malaxorului (14,95 și respectiv 14,83 t/m³.zi) s-a folosit abia cca 50% din capacitatea malaxorului. În medie posibilitățile maxime de producție au fost utilizate astfel :

— în decursul anului 1959 : $\eta_0 = \frac{11{,}02}{30} = 36\%$

— în decursul anului 1960, sem. I : $\eta_1 = \frac{12{,}12}{30} = 40\%$.

Rezerve în utilizarea intensivă rezultă :

$$r_{i\ 1959} = 100 - \eta_0 = 64\%\ ; \qquad r_{i\ 1960} = 100 - \eta_1 = 60\%.$$

b) Faza a 2-a a procesului are loc în reactorul Moritz-Standard, utilaj de bază al întregii instalații. al cărui volum util este 43,5 m³. Cunoscînd datele ce privesc producția (pag. 66) precum și utilizarea fondului de timp (pag. 69), indicatorul utilizării intensive (norma tehnico-economică intensivă, exprimată în t P_2O_5/m^3.24 ore) rezultă :

a se vedea pag. următoare :

În decursul anului 1959, utilizarea intensivă planificată s-a realizat la nivelul 96,5% (corespunzător valorii 1,625 t/m³.zi). După reparațiile generale din iunie 1959, utilizarea intensivă și realizarea indicatorului planificat sau îmbunătățit. În decursul sem. I 1960 s-a atins în medie 1,787 t/m³.zi ; s-a îmbunătățit și realizarea indicatorilor planificați :

$$\Delta_{Ni} = \frac{1{,}787}{1{,}626}\,100 = 109{,}9\%\ ; \qquad {}^{i}N_{i} = 104{,}93\%.$$

Din urmărirea datelor prezentate, privind utilizarea intensivă, se observă că în perioadele de vîrf, indicatorii au următoarele valori :

— în 1959, în decada 3-a a lunii septembrie s-au obținut 1030,7 t producție ; productivitatea maximă (norma tehn. int.) este deci :

$$N_{Ti\ 1959} = \frac{1030{,}7}{10.43{,}5} = 2{,}371\ {}^{t}/_{m^3-zi}$$

— în sem. I 1960, în decada a 3-a a lunii martie, s-au obținut 1305,79 t producție ; productivitatea maximă (norma tehn. int.) rezultă :

$$N_{Ti\ 1960} = \frac{1305{,}79}{10.43{,}5} = 3\ {}^{t}/_{m^3-zi}.$$

Utilizarea intensivă pentru faza de dezagregare

Nr. crt.	Perioada de funcționare	Producția (100% P_2O_5) t.		Fond calend.	Timp funcționare		K. m³ vol. util.	N_1^1 (t/m³, zi)		Gradul realiz. ^iN_i
		Planif.	Realizat		Planif.	Re lizat		Planif.	Realiz.	
în anul 1959										
1	ianuarie	1200	1200	31	13	28	43,5 m³—volum util.	2,123	0,985	46,3
2	februarie	1600	1604	28	25	26		1,474	1,421	96,5
1	martie	1950	2020	31	26	30		1,725	1,55	89,7
4	trimestrul I.	4750	4824	90	64	84		1,705	1,32	77,5
5	aprilie	1800	1801	30	25	27		1,655	1,535	92,7
6	mai	1750	1601	31	27	29		1,490	1,270	85,3
7	iunie	—	268(*)	30	8(*)	12(*)		—	—	—
8	trimestrul II	3550	3402+268(*)	91	52+8(*)	56+12(*)		1,572	1,396	88,6
9	iulie	2040	1502	31	26	25		1,825	1,381	75,7
10	august	900	900	31	27	13		0,768	1,593	208
11	septembrie	2040	1818	30	26	19		1,805	2,202	122
12	trimestrul III	4980	4220	92	79	57		1,453	1,70	117
13	octombrie	2265	2502,5	31	26	28		2.006	2,058	102,5
14	noiembrie	2260	2266,5	30	26	27		2,002	1,926	96,4
15	decembrie	2265	2655	31	27	29		1,932	2,1	108,7
16	trimestrul IV	6790	7424	92	79	84		1,981	2,032	102,5
17	anul 1959.	20070	19870+268	365	274	281		1,685	1,626	96,5
în anul 1960										
1	ianuarie	800	811	31	18	16	43,5 m³	1,022	1,167	114,1
2	februarie	1750	1629,6	29	25	22		1,608	1,702	105,7
3	martie	2450	2750,8	31	27	29		2,09	2,080	104,3
4	trimestrul I.	5000	5191,4	91	70	67		1,645	1,784	108,5
5	aprilie	1800	1805,3	30	25	25		1,657	1,661	100,2
6	mai	2000	2003,6	31	27	23		1,705	1,755	102,9
7	iunie	1250	1252,3	30	14	14		2,05	2,057	100,5
8	trimestrul II	5050	5061,2	91	66	65		1.76	1,79	101,7
9	sem. I—1960	10050	10252,6	182	136	132		1,703	1,787	104,93

(*) a funcționat instalația veche

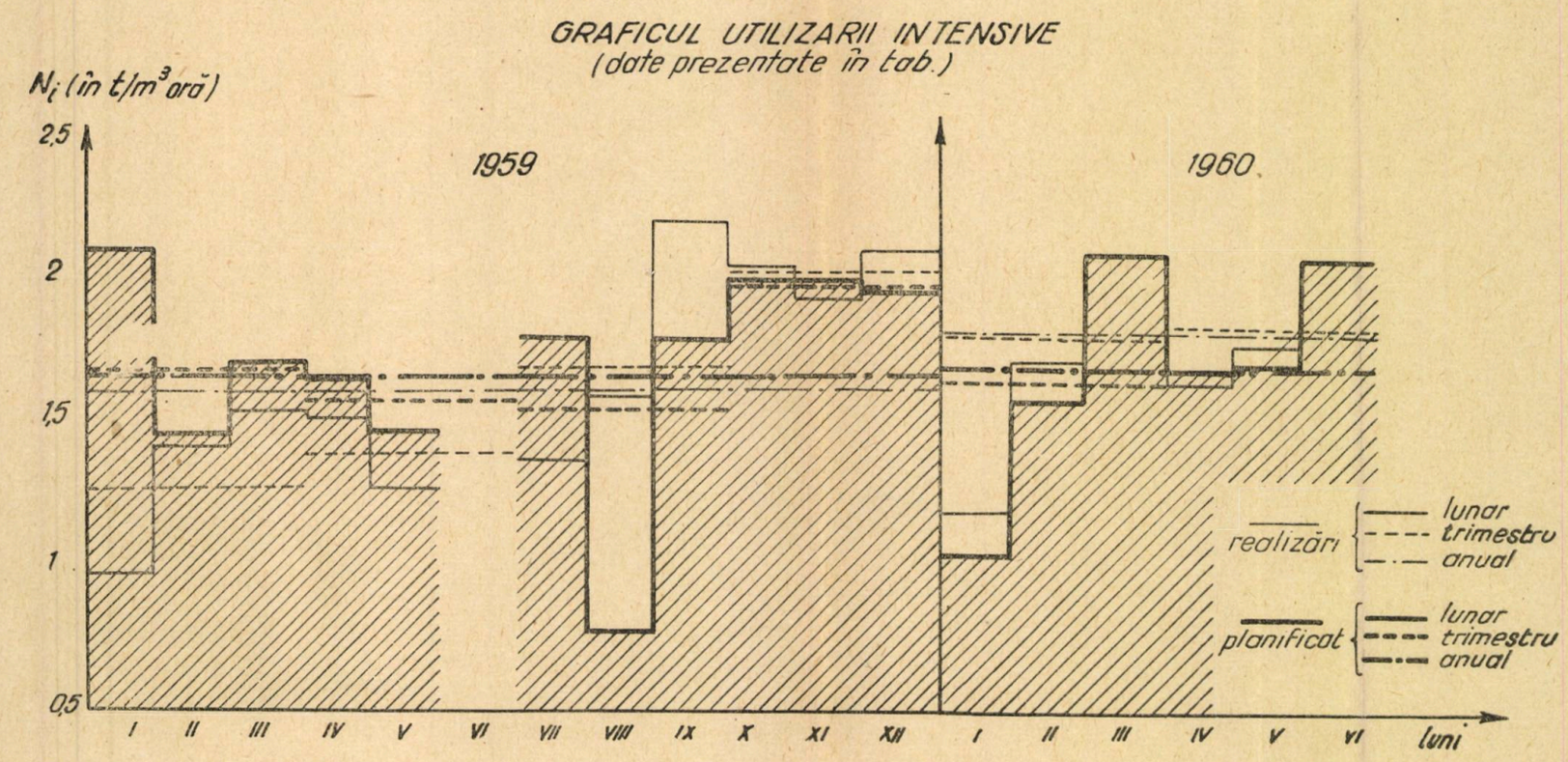

GRAFICUL UTILIZARII INTENSIVE
(date prezentate în tab.)
N_i (în t/m³ oră)
2,5
2
1,5
1
0,5
1959
1960
I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII I II III IV V VI luni
realizări
lunar
trimestru
anual
planificat
lunar
trimestru
anual

Fig. 5

Față de aceste productivități maxime, indicatorii medii sînt :

— în 1959 în medie : $N_{i\ 1959} = 1{,}626\ ^{t}/_{m^3-zi}$; $\eta_{1959} = \frac{1.626}{2.371} 100 = 68\%$

— în 1960 în medie : $N_{i\ 1960} = 1{,}787\ ^{t}/_{m^3-zi}$; $\eta_{1960} = \frac{1{,}787}{3} 100 = 66\%$

Rezerve în utilizarea intensivă rezultă :

— în 1959 : $r_{i\ 1959} = 100 - \eta_{1959} = 32\%$; în 1960 : $r_{i\ 1960} = 100 - \eta_{1960} = 34\%$

Dacă pentru faza de desagregare luăm în considerare factorii tehnologici, utilizarea intensivă a instalației poate fi exprimată în funcție de :

— cantitatea de materii prime introduse zilnic în aparatură (v) ;

— calitatea acestor materii prime (c), gradul de obținere a produsului din materiile prime (randamentul de desagregare r) ;

— dimensiunea de lucru a utilajului respectiv (k) ;

Astfel utilizarea intensivă a instalației rezultă :

$$Ni = \frac{c.\ V}{k} r .$$

În producția de superfosfat, calitatea materiei prime are un rol hotărîtor în obținerea producției. La fabrica „Petru Poni" se folosește o gamă variată de materii prime, de la apatită concentrată prin flotație, pînă la fosforite inferioare (a căror compoziție conduce la condiții de producție mai puțin economice). Apatita de Kola este materia primă cea mai corespunzătoare (conține 39.40% P_2O_5) ; dintre materiile inferioare întrebuințate, fosforitele de Israel au cca 28% P_2O_5.

În cadrul perioadei analizate, randamentul de desagregare a variat între 70% și peste 90%, în medie realizîndu-se în anul 1959 :

— la superfosfatul din Kolafosfat 93,5%.

— la superfosfatul din materii prime de Israel 81,5%.

— la superfosfatul din făină de oase 86,6%.

În decursul anului 1959, în sept. s-a atins o medie lunară în randamentul de desagregare de 91% ; în anul 1960, în luna martie s-a atins o medie lunară de 94% în randamentul de desagregare.

Cantitatea zilnică de materii prime introduse, se poate determina pe m^3 — din volumul util al reactorului :

$$a = \frac{V}{K} (\text{în t mat. prime}/m^3.\text{zi})$$

Pentru determinarea acestui indicator, ne servim de evidența secției, pentru sem. I — 1959 ; Rezultă astfel :

Luna	Cantitatea de materii prime folosite			Zile de funcționare	Volum util reactor m^3	„a" (t/m^3, zi)		
	Kolafosf. 39% P_2O_5	Fosfat Israel 28% P_2O_5	Făină oase 35% P_2O_5			Kola-fosfat	Fosfat Israel	Făină oase
ianuarie	—	4335	288	28	43,5	—	3,56	0 237
februarie	2348	2891	229	26	43,5	2,08	2,555	0,2025
martie	3544	2976	148	30	43,5	2,722	2,281	0,1135
aprilie	4389	1311	458	27	43,5	3,74	1,116	0,391
mai	5405	—	66	29	43,5	4,29	—	0,0523
iunie	789	—	—	12	—	—	—	—

Introducînd în relația stabilită anterior (pag. 77) mărimea „a" rezultă :

$$Ni = c.a.r$$

Ținînd seama de randamentele de desagregare atinse : în ian. — 91% ; în febr. — 89,8% ; în martie — 88,5% ; în aprilie — 80,4% ; în mai — 75% etc., utilizarea intensivă lunară reiese, spre ex. în luna ianuarie :

$$Ni = \frac{(28 \cdot 3,56 + 35 \cdot 0,237) \cdot 0,91}{100} = 0,986 \text{ t/m}^3.\text{zi}.$$

Luînd în considerare cantitatea și calitatea materiilor prime folosite în sem. I — 1959 (perioadă pentru care s-au putut prelucra datele necesare) precum și randamentele de desagregare, se prezintă mai jos utilizarea intensivă calculată pe baze tehnologice.

Nr. crt.	Perioada de funcționare	Cantit. de materii prime folosite			Total materii prime		% față de total			Analiza medie a super. obț. cant. P_2O_5	Ni t/m^3. zi
		Kola fosf. 39% P_2O_5 t	Fosfat Israel 28% P_2O_5 t	Faina oase 35% P_2O_5 t	Fizic	100% P_2O_5	Kola	Israel	Făină oase		
1	ianuarie	—	4335	288	4623	1322	—	93,8	6,2	14,61	0,986
2	februarie	2348	2891	229	5468	1806	43	52,8	4,18	16,28	1,430
3	martie	3544	2976	148	6668	2267	53,15	44,63	2,22	17,08	1,550
4	aprilie	4389	1311	458	6158	2240	71,27	21,3	7,43	16,60	1,535
5	mai	5405	—	66	5471	2131	98,795	—	1,205	15,79	1,27
6	iunie	789	=	—	789	308	100	—	—	18,33	—

Se observă că utilizarea intensivă superioară s-a atins la o compoziție a materiilor prime de 50—70% Kolafosfat, de 20—40% fosforite de Israel și cca 5% făină de oase, ceea ce corespunde condițiilor curente de aprovizionare ale întreprinderii.

În determinarea capacității de producție a reactorului, pe baze tehnologice, vom lua în considerare următoarele elemente :

— cantitatea maximă de materiale, ce poate fi introdusă în reactor (determinată pe baza volumului util — 43,5 m^3 și a greutății specifice medii de 1,3 t/m^3), precum și durata procesului tehnologic (în medie 2 ore), pentru stabilirea încărcăturii specifice („*a*“ — în t/m^3 zi)

$$a = \frac{\frac{43,5}{1,3} \cdot \frac{24}{2}}{43,5} = 9,24 \text{ t/m}^3 \text{ zi ;}$$

— compoziția materiilor prime între limitele mai sus arătate, pentru rețeta convenabilă, cu conținutul respectiv de substanță activă : 65% Kolafosfat conținînd 39% P_2O_5, 30% fosforite de Israiel conținînd 28% P_2O_5 și 5% făină de oase conținînd 35% P_2O_5, pentru stabilirea calității medii („*c*“ — în %)

$$c = \frac{65 \cdot 39 + 30 \cdot 28 + 5.35}{100} = 36\%;$$

— randamentul de desagregare considerat la nivelul optim realizat în secție :

$$r = 0,94$$

Rezultă astfel utilizarea tehnică intensivă :

$$Ni = c.a.r. = \frac{36}{100} \cdot 9,24 \cdot 0,94 = 3,15 \text{ t } P_2O_5/m^3 \text{ zi.}$$

c) Procesul de formare a superfosfatului se continuă prin operațiunea de maturare, în depozitul de superfosfat (avînd 10.000 m^3 volum util). Utilizarea intensivă (norma tehnico-economică intensivă exprimată în P_2O_5/m^3 24 ore) rezultă astfel :

a se vedea pag. următoare

În depozitul de superfosfat suprafețele actuale pot face față îmbunătățirii utilizării capacității de producție a secției.

3. *Obținerea superfosfatului granulat* în anul 1959 și sem. I 1960 a avut caracter experimental, condiționată fiind de funcționarea instalației noi. Deasemenea această producție a fost condiționată și de cantitățile insuficiente de superfosfat simplu, maturat, de calitate corespunzătoare. Utilizarea intensivă obținută, prezintă următoarea dinamică :

Luna	Ianuarie 1959	Februarie 1959	Martie 1959	. . .	An 1959	Februarie 1960	Martie 1960	Aprilie 1960	Mai 1960	Iunie 1960	Sem. I 1960
Producția în tone P_2O_5	289,4	420,9	446,5		1156,8	180,4	300,4	95,8	—	406,4	983
Caracteristica K în m³	12,57	12,57	12,57		12,57	12,57	12,57	12,57	—	12,57	12,57
U	2	2	2		2	2	2	2	—	2	2
Zile de funcționare	18	20	23		61	14	17	6	—	16	53
N_{Tt} t P_2O_5/m³, zi	0,641	0,837	0,772		0,754	0,513	0,703	0,636	—	1,01	0,738

În cadrul acestui stadiu, utilizarea intensivă în fazele de pregătire și finisare, poate asigura funcționarea instalației de granulare la întreaga capacitate de producție.

Utilizarea intensivă pentru operațiunea de maturare în anul 1959

Nr. crt.	Perioada de funcționare	Producția (t P_2O_5)		Zile funcționare		K m³	Ni—(kg/m³, zi)	
		Planificat	Realizat	Planificat	Realizat		Planificat	Realizat
1	ianuarie	1200	1200	13	28		9,21	4,28
2	februarie	1600	1604	25	26		6,4	6,18
3	martie	1950	2020	26	30		7,5	6,73
4	Trim. I	4750	4824	64	84		7,41	5,74
5	aprillie	1800	1801	25	27		7,2	6,67
6	mai	1750	1601	27	29		6,48	5,53
7	iunie	—	268 *	8 (*)	12 (*)		—	—
8	Trim, II	3550	3402+268*	52+8(*)	56+12(*)	10.000	6,83	6,7
9	iulie	2040	1502	26	25		7,86	6,01
10	august	900	900	27	13		3,34	6,93
11	septembrie	2040	1818	26	19		7,86	9,57
12	Trim. III	4980	4220	79	57		6,32	7,4
13	octombrie	2265	2.502,5	26	28		8,41	8,94
14	noembrie	2260	2.266,5	26	27		8,68	8,4
15	decembrie	2265	2655	27	29		8,41	9,16
16	Trim. IV	6790	7424	79	84		8,6	8,84
17	an 1959	20.070	19.870+268*	274+8(*)	281+12(*)		7,37	6,78

(*) A funcționat instalația veche

în anul 1960

1	ianuarie	800	811	18	16		4,45	5,07
2	februarie	1750	1629,6	25	22		7,0	7,41
3	martie	2450	2750,8	27	29		9,09	9,48
4	Trim. I	5000	5191,4	70	67	10.000	7,14	7,75
5	aprilie	1800	1805,3	25	25		7,2	7,22
6	mai	2000	2003,6	27	26		7,4	7,71
7	iunie	1250	1252,3	14	14		8,93	8,94
8	Trim. II	5050	5061,2	66	65		7,65	7,8
9	Sem. I 1960	10.054	10252,6	136	132		7,38	7,77

Concluzii.

Pentru instalația de superfosfat simplu, rezervele interne se pot prezenta în totalitatea lor, urmărind capacitatea de producție și gradul de utilizare a acesteia, prin următoarele aspecte :

a) S-a putut observa că fondul de timp necesar întreținerii și reparației utilajului de bază (instalația S. M.) a fost larg dimensionat ; aceasta a făcut ca utilizarea fondului disponibil de timp să se planifice :

— în 1959 — în medie 75,1% ;
— în 1960 — în medie 74,7% (în sem. I).

Utilizarea extensivă am constatat însă că poate atinge, în decursul unui an, în medie 86,5%.

b) S-a putut observa din datele statistice, că în funcționarea instalației, în cîteva perioade, s-au atins valori ridicate în utilizarea intensivă :

— în decursul anului 1959 — 2,371 t/m³ zi ;
— în sem. I al an. 1960 — 3 t/m³ zi

În urma studiului bazat pe parametrii tehnologici, rezultă posibilități mai mari de producție, pentru instalație, și anume :

$$3{,}15 \text{ t } P_2O_5/m^3 \text{ zi}$$

Posibilitățile maxime de producție anuală, apreciate sumar după realizările secției, au fost folosite nesatisfăcător :

— în 1959 : $Q_0 = 2{,}371 \cdot 43{,}5 \cdot 365.0{,}751 = 28300$ t/an ;

$$\gamma_0 = \frac{20138}{28300} 100 = 71\%,$$

— în sem. I 1960 : $Q_1 = 3 \cdot 43{,}5 \cdot 365.0{,}747 = 35800$ t/an ;

$$\gamma_1 = \frac{10252{,}6}{35800 \frac{182}{366}} \cdot 100 = 58\%$$

Rezervele interne se evidențiază la adevărata lor valoare, prin considerarea în calculul capacității de producție, a realizărilor care ar putea fi obținute în condiții optime de producție :

$$Q = 3{,}15 \cdot 43{,}5 \cdot 365 \cdot 0{,}865 = 43\,000 \text{ t/an } (100\%\ P_2O_5)$$

$$\gamma = \frac{10252{,}6}{43000 \frac{182}{366}} \cdot 100 = 48\%$$

$$R = 100 - \gamma = 52\%.$$

Pentru utilizarea acestor rezerve sînt necesare o serie de măsuri tehnico-organizatorice legate în special de eliminarea locurilor înguste la fazele de măcinare a minereurilor și de depozitare a H_2SO_4 din primul stadiu, precum și la faza de vînturare din al 2-lea stadiu.

Prin lucrarea de față s-a urmărit folosirea unei metode simple și ușor de aplicat pentru întreprindere, posibilă de extins și la celelalte întreprinderi din sectorul chimic.

Într-o etapă următoare se propune MIPC fazarea proceselor tehnologice, cu stabilirea unui sistem de indicatori pe toate etapele procesului de producție din întreprinderi.

CATEDRA DE ORGANIZARE ȘI PLANIFICARE
din Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

Gh. Gheorghiu-Dej : Expunere făcută la ședința plenară a C.C. al P.M.R. din 26—28 noiembrie 1958, Ed. Politică, 1958.

Gh. Gheorghiu-Dej : Raport la cel de al III-lea congres al Partidului Muncitoresc Romîn, Ed. Politică, 1960.

M. Florescu : Dezvoltarea industriei chimice în planul de 6 ani. Rev. de chimie nr. 8/1960.

M. E. Pozin : Tehnologia îngrășămintelor și sărurilor minerale, Ed. Tehnică, 1959.

P. Jica : Considerați pe marginea elaborării unui sistem de indicatori statistici, Rev. de statistică nr. 11/59.

* * Materiale statistice și alte documente din întrepr. „Petru Poni", Valea Călugărească.

НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В ОПРЕДЕЛЕНИИ И ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВНУТРЕННИХ РЕЗЕРВОВ, ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ ФОСФОРНЫХ УДОБРЕНИЙ НА ФАБРИКЕ „ПЕТРУ ПОНИ" — ВАЛЯ КЭЛУГЭРЯСКА.

(Резюме)

Использование технико-экономических показателей при анализе производственного процесса является ценным средсвом в определении внутрених резервов предприятия.

Исходя из задачи 3-его Сьезда Р. Р. П., авторы статьи предлогают испольэование схемы технико-экономических показателей, характеризующую фазы производственного процесса на химических предприятиях, с целью улучшить использование средств производства и рабочей силы.

Предлогемая схема, применяется при анализе фаз производственного процесса суперфосфата на предприятии „Петру пони", для использования резервов производственной мощности.

Путём перераоотки статистических данных реализлванной продукции на 1959 г. и первое голугодие 1960 г., обоснованных на технологических параметрах, были опредлелены действительная величина производственной мощности и существующие резервы.

Авторы исследовали исгользование простого и легко применяемого метода на химическом предприятии. Этот медод основан на использо ании схемы показателей примененой на фазах производственного процесча,

SOME ASPECTS OF UTILIZATION OF TECHNICAL-ECONOMIC INDEXES IN ESTABLISHING THE USE OF INTERNAL RESERVES IN THE MANUFACTURING OF PHOSPORUS FERTILIZERS AT THE „PETRU PONI" FACTORY

(Summary)

The use of technical-economic indexes in the analysis of the manufacturng process plays a great part in the determination of the internal reserves of the enterprises.

Starting from the tasks set by the Third P.M.R. Congress, the authors propose the utilization of a technical-economic index scheme to characterize the stages of the development of the manufacturing process. in the chemical industry, in order to improve the means of production and manpower.

The scheme is used for the analysis of the simple stages of the manufacturing process of the superphosphorus at the „Petru Poni" anterprese, in view of using the production reserves.

The capacity of production and the existeng reserves are dimensioned at thir actual value, working out the statistical data regarting the produc-

tion carried out in 1959 and the first term of 1960, based on technological perimeters.

The anthors intended to give a simple method, that may be easily applied to the chemical industry. This method uses the index scheme in the stages of the manufacturing process.

QUELQUES ASPECTS DE L'UTILISATION DES INDICATEURS TECHNICO-ÉCONOMIQUES DANS LA DÉTERMINATION ET L'EMPLOI DES RÉSERVES INTERNES POUR LA PRODUCTION D'ENGRAIS PHOSPHATÉS À LA FABRIQUE „PETRU PONI" VALEA CĂLUGĂREASCĂ

(Résumé)

L'utilisation des indicateurs technico-économiques dans l'analyse du production, constitue un important moyen à determiner les réserves internes des entreprises.

Ayant comme point de depart les tâches traccés par les documents du III-ème Congres du Parti ouvier roumain, les anteurs du présent article proposent l'emploi d'un schéma enformant les indicateurs technico-économiques qui caractérisent les étapes du développent de la production dans les entreprises chimiques, dans le but d'améliorer l'utilisation des moyen de production ainsi que la force de travail.

La schéma proposé est employé à l'analyse des étapes simples du processus de fabrication du superphosphate à l'entreprise „Petru Poni", en vue d'utiliser les réserves de la capacité de production.

Ayant envisagé les donneés statistiques relatives à la production de 1959 et du premier semestre de 1960 s'étant fazé sur les parametres tehnologiques on estime à sa valeur reelle la capacité de production ainsi que les rézerves existantes.

Les auteurs de cet ouvrage ont eu pour but l'emploi d'une méthode tout aussi simple que facile à appliquer dans les entreprisis chimiques. Cette méthode-ci est fondée sut l'utilisation du schéma d'ndicateurs, appliqué aux phases du processus de production.

EINIGE PROBLEME DER ANWENDUNG DER TECHNISCH-ÖKONOMISCHE INDIKATOREN ZUR FESTSTELLUNG UND VERWERTUNG DER INNEREN RESERVEN ZUR PRODUKTION VON PHOSPHOR-DÜNGEMITTELN IN DER FABRIK „PETRU PONI", VALEA CĂLUGĂREASCĂ

(Zusammenfassung)

Die Anwendung der technisch-ökonomischen Indikatoren in der Analyse des Produktionsprozesses ist ein wichtiges Mittel zur Feststellung der inneren Reserven der Unternehmen.

Ausgehend von den durch die Dokumente des III. Kongresses der Rumänischen Arbeiterpartei gestellten Aufgaben, schlagen die Autoren die Anwendung eines Schemas von technisch-ökonomischen Indikatoren vor, welches die Durchführungsetappen des Produktions-prozesses in den chemischen Unternehmen charakterisieren soll um die Verwendung der Produktionsmittel und der Arbeitskraft zu verbesseren.

Das vorgeschlagene Schema ist zur Analyse der einfachen Etappen des Fabrikationsprozesses des Superphosphats im Unternehmen „Petru Poni", zwecks Verwendung der Produktionskapazitätreserven angewendet.

Durch die Bearbeitung der sich auf die im Jahre 1959 und I. (erstem) Semester 1960 erfolgte Produktion beziehenden statistischen und durch die technologischen Parameter begründeten Daten, werden die Produktionssapazität und die befindlichen Reserven auf den richtigen Wert dimensioniert.

Die Autoren haben die Verwendung einer einfachen und in den chemischen Unternehmen leicht anwendbaren Methode verfolgt, einer Methode welche sich auf die Verwendung des an die Phasen des Produktionsprozesses angewendeten Indikatorenschemas, verfolgt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola II

CHIMIE

ÜBER DAS VERHALTEN EINIGER BLEIOXYDGEMISCHE BEIM ERHITZEN UND ÜBER DIE MÖGLICHKEIT IHRER PRAKTISCHEN VERWERTUNG.

von *A. IANU*

Zur Reduktion des Chlordioxydes in alkalischer Lösung zu Natriumchlorit kann man erfolgreich Bleioxyd, besonders die gelbe Form (1), verwenden.

Folgende Reaktionen finden statt:

$$PbO + NaOH = NaOPbOH \qquad (1$$

$$2\ ClO_2 + NaOPbOH + NaOH = 2\ NaClO_2 + PbO_2 + H_2O \qquad (2)$$

Wie nan sieht, löst sich das Bleioxyd in Alkalien als Natriumplumbit, welches weiterhin mit dem Chlordioxyd, Natriumchlorit gibt.

Gleichzeitig wird Bleidioxyd gefällt, das sich in alkalischen Lösungen viel schwerer löst. Das so erhaltene Bleidioxyd ist ein höchst feinkörniges Pulver. Durch eine aufmerksame Lenkunk der obigen Reaktionen kenn man ein ziemlich reines Bleidioxyd gewinnen.

In einer frührren Arbeit (2) deren Zweck die Ausarbeitung eines technologischen Prozesses für die Gewinnung von Natriumchlorit aus den Chlorierlaugen war, gebrauchten wir als Reduktionsmittel in der Absorbtionsphase dasselbe gelbe Bleioxyd.

Aber nach unserer Arbeitsweise bildet sich ein Gemisch von Chlor und Chlordioxyd, dass in der Absorbtionsphase, neben dem Chlordioxyd, auch das Chlor auf das Natriumplumbit wirkt.

Die Wirkung des Chlors ist wesentlich schneller und infolgedessen vermindert sich der Gehalt an Natriumplumbit in der Lösung. Es findet folgende Reaktion statt:

$$Cl_2 + NaOPbOH + NaOH = PbO_2 + 2\ NaCl + H_2O \qquad (3)$$

Da wir die Reduktion des Chlordioxyds (Reaktion 2) nicht beseitigen wollen, müssen wir, ausser einer energischen Rührung, mit einem Bleioxydüberschuss arbeiten, die Regenerierung des verbrauchten Bleioxyds zu sichern. Auf diese Weise erhält man schliesslich in der Absorbtionslösung ein Gemisch von Bleioxyd und Bleidioxyd.

Dieses Gemisch wird filtriert, gewaschen, getrocknet und kalziniert, um das Bleioxyd wiederzugewinnen. Das wiedergewonnene Bleioxyd tritt neuerdich in den Kreislauf ein. Die kleinen Plumbitmengen, die noch in der Lösung

vorhanden sind, werden gefällt, und zwar mit einer genau berchneten Natriumkarbonatmenge. Das so gefällte basiche Bleikarbonat folgt dem Bleikreislauf.

In der von uns vorgeschlagenen Arbeitweise gibt es praktisch keinen Bleioxydverlust, ausser den unvermeidlichen Manipulationsverlusten.

Da man für jedes kg Natriumchlorit etwa 4—5 Bleioxyd benötigt, und da die Bleioxydmischung einen grossen Bleidioxydgehalt hat (etwa 60—65% PbO_2),stellten wir uns die Frage, ob man dieses Gemisch nicht auch für andere Zwecke verwenden könnte, da man bei der Regenerierung des Bleioxyds, durch Ausglühen der Oxyde, ein interessantes Verhalten des Gemisches feststellen konnte.

1. Eine erste mögliche Verwendung des Oxydgemisches ist die Gewinnung von reinem Bleidioxyd. Zu diesem Zwecke versetzt man die Oxydmischung mit verdünter Salpetersäure oder Essigsäure, wobei sich nur das Bleioxyd löst. Das ungelöste Bleidioxyd wird nun filtriert, gewaschen und getrocknet. Die Bleinitrat oder Bleiacetatlösung kann weiter zur Gewinnung von Bleisaltzen oder Bleipigmenten verwendet werden.

Aus den von uns erhaltenen Oxydgemischen, konnten wir auf diese Weise ein 96.3% reines Bleidioxyd gewinnen. Selbstverständilich wäre es möglich, ein noch reineres Bleidioxyd zu erhalten. Es ist aber bekannt, dass man chemisch reines Bleidioxyd nicht erhalten kann, da es beim Trocknen über 100° an der Luft oder in Vakuum Sauerstoff verliert, ebenso beim Trocknen im Exikatoren über wasserentnehmende Substantzen hält es noch Wasser (3 und 4).

2. Eine zweite Möglichkeit, diese Bleioxydgemische zu verwenden, ist ihre Umwandlung in Bleimennige (Pb_3O_4).

Beim Erhitzann des Oxydgemisches an der Luft, zwecks Regernerierung von PbO, müsste eine Temperatur von über 200°C genügen, damit das PbO_2 sich zersetzt, da sein Dissoziationdruck grösser ist als der Teildruck des Sauerstoffs aus dar Luft (3). Aber durch diese Zersetzung bildet sich Bleimennige welche bis über 570°C beständig ist. Ausserdem beginnt das vorhandene Bleioxyd schon bei 240°C Sauerstoff zu absorbieren und gelangt bei 500°C zu einer Maxima, unter Bildung von Mennige (5). Um Bleioxyd zu gewinnen ist es also nötig das Oxydgemisch auf eine höhere Temperatur als die Bleimennigezersetzungstemperatur zu erhitzen, und zwar auf 625°C (4). Bei dieser Temperatur erhält man das gelbe Bleioxydmennige. Wir erhitzen also das Oxydgemisch auf 625°C um das gelbe Bleioxyd zu regenerieren.

Bei dieser Gelegenheit bemerkten wir aber, dass sich Bleimennige bei niedrigeren Temperaturen bildete, als sie in der Literatur angegeben sind. Die gebildete Mennigemenge war frösser als die, welche sich nur aus der Zersetzung des Bleidioxydes bilden konnte.

Gestützt auf die sauren Eigenschaften des Bleidioxydes und die alkalischen Eigenschaften des Bleioxydes, konnten wir folgende Bleimennige bildende Reaktion voraussehen:

$$2\ PbO + PbO_2 = Pb_3O_4 \qquad (4)$$

und zwar im Falle einer Erhitzung unter Luftabschluss von zwei Mol PbO und einem Mol PbO_2 bzw. eines Gemisches mit einem $PbO_{1,33}$ Gehalt. Die Mennigebildung wurde durch Versuchen bewiesen.

Das Verhalten einiger Bleioxydgemische in einer Zusamensetzung von $PbO_{1,99}$ bis PbO, bei Erhitzen wurde von mehreren Wissenschaftlern untersucht.

Einige Forscher (3) studierten die thermische Dissoziation von Gemischen, deren Zusamensetzung zwischen $PbO_{1,89}$ und $PbO_{1,253}$ schwankt. Sie zeigten, dass der Sauerstoffverslust von der Zusammmensetzung des Gemisches stark beeinflusst wird. Der Verlust steigt fort und infolgedessen ist die Bildung von Substanzen wie: Pb_2O_3, Pb_2O_5, Pb_3O_5, Pb_4O_5, Pb_5O_8, usw. unmöglich.

Sie kamen zur Schlussfolgerung, dass die Bleioxyde mit dem Sauerstoff eine Reihe fester Lösungen bilden deren Zusammensetzung swischen PbO_2 und $PbO_{1,36}$ schwankt. Bei dieser Zusammensetzung des $PbO_{1,36}$ ist die thermische Dissoziation sehr vemindert, was auf die Anwesenheit von Bleioxyd zurückzufüren ist mit welcher es ein Gleichgewicht bildet. Sie behaupten ferner dass sich keine Mennige bildet, sondern dass diese Oxyde der Mennige gegenüber eine metastabile Form haben.

Andere Forscher (4) die die Oxidation des Bleioxydes an der Luft oder mit Sauerstoff zwischen 250° und 390°C studiert haben, stellten fest, dass das auf feuchten Weg erhaltene Bleioxyd eine Reihe fester Lösungen mit einer Zusammensetzung von $PbO_{1,0}$ bis $PbO_{1,1}$ bildet. Das Kristallgitter des Bleioxydes bleibt während der Oxydation das gleiche, nämlich tetragonal oder rombisch.

Durch weitere Oxydation, erhält man Oxyde von einer Zusammensetzung zwischen $PbO_{1,13}$ und $PbO_{1,67}$. Die Farbe dieser Oxyde wechselt von gelb (PbO) bis gelb-rot ($PbO_{1,13}$), dunkelbraun ($PbO_{1,28}$) braunschwartz ($PbO_{1,30}$) bis schwartz-braun (von $PbO_{1,33}$ bis $PbO_{1,66}$).

Auch die rote Form des oxydierten PbO/ gibt Produkte von einer Zusammensetzung zwischen $PbO_{1,33}$ (oder Pb_3O_4) deren Farbe rot oder rot-braun ist, und andere Oxyde von violett-schwartzen Farbe, die an Sauerstoff reicher sind.

Umgekehrt ist der Oxydationsprozess für Oxyde von der Zusamenensetzung $PbO_{1,33}$ bis $PbO_{1,66}$. Durch Zersetzung der Produkte von der Zusammensetzung $PbO_{1,33}$ und weniger, bildet sich auch PbO.

Alle Gemische, die bei einem Bleiatom mehr als 1,33 atom Sauerstoff enthalten gehen, beim Erhitzen über 390°C in Mennige, unter Ausscheiden von Sauerstoff, über.

Wenn man also Mennige herstellen will, muss man das PbO mit reinem Sauerstoff oder Luftsauerstoff, nach folgender Reaktion:

$$3\ PbO + {}^1/_2\ O_2 = Pb_3O_4 \qquad (5)$$

oxydieren. Dies ist die einzige in der Industrie anwendbare Methode.

Es gibt sehr viele Patente zur Herstellung von Mennige; dessen Eigenschaften hängen von seiner Reinheit und seinem Dispersionsgrad ab.

Ein Nachteil der Mennige als Pigment ist, dass sie die Farbe verdickt, was durch die Anwesenheit von Bleioxyd in der Mennige zu arklären ist. Das Bleioxyd gibt nämlich mit Öl, Bleiester. Um die Verdickung zu Verhindern, muss die Mennige, ausser einer grossen Dispersion, einen Gehalt von wenigstens 95—97% Pb_3O_4 haben.

Einige aus dem Handel beschaffte und von uns analysierte Probe, ergaben einen Durchsnittsgehalt von 25,5% PbO_2, was einem Gehalt von nur 73% Pb_3O_4 entspricht, während der Rest von umgefähr 27% PbO ist.

Die Anweserheit von Bleioxyd in der Mennige erklärt sich auch aus der Tatsache, dass die Oxydation des Bleioxydes zu Mennige eine topochemische Reaktion ist, das heisst, sie findet an der Trennungsfläche zuerst von PbO-Gas, und dann von Pb_3O_4 —PbO statt. Die Reaktionsgeschwindigkeit ist sehr gering und hängt von mehreren Faktoren ab wie: vom Dispersionsgrad des zu oxydierenden Bleioxydes (6), von der kristallinischen Form des Bleioxydes, vom Vorhandesein aktiverer Punkte (Kanten, Risse, zerstörte Teile des Kristalls) (7), von der Arbeitstemperatur, der Sauerstoffeskonzentration, u. s. w.

Somit besteht das Mennigepartikel aus einem Bleioxydkern und einer Mennigehülle. Un in kürzester Zeit eine Mennige mit maximale mPb_3O_4 Gehalt zu gewinnen, muss man also, von der reaktivisten Form des Bleioxydes ausgehen, also von der gelben Form (Tetragonal), möglisch fein verteilt. Man muss bei einer Temperatur, wo die thermische Dissoziation der Mennige vernachlässigt werden kann und zugleich mit einen Sauerstoffüberschuss arbeiten.

Von diesem Standpunkte aus, entsprechen die Oxid-und Bleidioxydmischungen unseren Bedürfwissen, weil:

a) Es nötig ist im Kreislauf des Bleioxydes die Oxyde auf 625°C zu erhitzen, wo die gelbe Form (tetragonale) die auch bei der Oxydation aktiver ist, stabil ist.

b) In der Absorbtionsphase des Cl_2— und ClO_2 —Gemisches in der alkalischen Lösung, das Bleioxyd sowohl von den Alkalien als auch von den Gasen angegriffen wird.

c) Die Wiederholung des Prozesses (der Kreislauf des Bleioxydes) eine Zerrüttung des Kristallgitters bringt.

d) Das durch Fällung aus der Lösung erhaltene Bleidioxyd eine höchst feine Verteilungsform hat.

In unseren Laboratoriumversuchen verwendeten wir Bleioxydgemische, deren Zusammensetzung unter Zusatz von gelben PbO auf $PbO_{1,33}$ gebracht worden war. Weitere Gemische mit derselben Zusammensetzung wurden synthetisch hergestellt und zwar mittels PbO_2 das wir aus Gemischen oder aus Mennige erhielten und dem gelben PbO, das wir durch Erhitzen der Oxydgemische oder durch Kalzinieren der Mennige bei 625°C erhielten.

Diese Gemische wurden dann unter Luftabschluss erhitzt, um die Oxydierende Wirkung des Luftsauerstoffs zu beseitigen.

In diesem Zwecke wurden die Proben so gleichmässig wie möglich gemischt und in Mengen von 10—15 g in Porzellanschmelztiegel gepresst.

Auf das Oxydgemische wurde ein glimmerblättchen gelegt und darauf Megnesiumoxyd gepresst.

Auf diese Weise wurde die Wirkung des Luft Sauerstoffes wohl nicht gänzlichbeseitigt, wie es z. B. in einem geschlossenen Rohre der Fall gewesen wäre. Da uns aber nicht die theoretische Seite des Sauerstoffwechsels zwischen den Oxyde interssiert, sondern nur die praktische Seite des Problems, haben wir absichtlich die Oxydgemische im Schmelztiegel erhitzt, eine Arbeits-

weise die auf industriellen Weg leicht wiederholt und ausgeführt werden kann.

Zuerst wurden Versuche gemacht, um die optimale Erhitzungstemperatur festzustellen.

Für eine Mennigeumsetzung ist eine neuenstündige Erhitzung auf 300°C ungenügend ; um das Gemisch in 9—10 Stunden in Mennige umzusetzen, muss man auf 350°C erhitzen. Bessere arhält man bei 370°C.

Un das Verhalten der Handelsmennige festzustellen, wurden gleichzeitig auch solche Proben mit Bleidioxyd und gelbem Bleioxyd erhitzt.

Nach dem Erhitzen wurden die Proben analysiert. Der PbO_2 —Gehalt wurde mittels Oxalsäure in Gegenwart von Salpetersäure bestimmt und der Oxalsäureüberschuss mit einer Kaliumpermanganatlösung titriert.

Die erhaltenen Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengefasst :

Tabelle 1

Temp = 370°C : Dauer = 10 Stunden

Substanz oder Gemisch	Mennige (aus dem Handel)	PbO_2 (aus dem Oxyde Gemisch hergestellt)	PbO (aus dem auf 625°C erhitzen Gemisch erhalten)	PbO_2 und PbO Gemisch (durch Oxydation von PbO mit $Cl_2 + ClO_2$ in alkalischer Lösung gebildet)	Synthetisches Gemisch $PbO_2 + PbO$ (gelbe Form)
Anfangsprozente PbO_2	25,50	96,3	0,28	35,68	33,35
Farbe vor dem Erhitzen	rot-orange	schwartz-braun	blass-gelb	dunkel-braun	dunkel-braun
PbO_2 — Prozentgehalt nach 10 Stunden Erhitzung auf 370°C.	24,93%	39,16	2,95	34,12	31,13
Farbe nach dem Erhitzen	rot-orange	dunkel-braun	blass-gelb	rot-orange	rot-braun

Aus dieser Tabelle kann man folgende Schlüsseziehen :

— Die gewönliche Mennige (Handelsmennige verliert den Sauerstoff ohne ersichtliche Änderung der Farbe.

— Das Bleioxyd verliert eine grosse-Menge Sauerstoff und ändert seine Farbe ohne sich aber, unter den Versuchsbedingungen, in Mennige unzusetzen.

— Das Bleioxyd nimmt wenig Sauerstoff auf, ohne merkliche Farbänderung.

— Das Oxydgemisch, das durch Oxydation von PbO mit $Cl_2 + ClO_2$ in alkalischer Lösung gebildet wird, verliert wenig Sauerstoff, aber die Farbänderung zeigt eine deutliche Umsetzung in Mennige.

— Das synthetische PbO_2 und PbO Gemisch zeigt ebenso einem geringen Sauerstoffverlust, aber seine Umsetzung in Mennige ist nicht voll kommen. Diese Tatsache erklärt sich dadurch, dass das Gemisch nicht genügend gleichmässig war, im Vergleiche mit dem Oxydgemisch, dass vorher in der alkalischen Lösung erhalten wurde.

Das für das synthetische Gemisch notwendige Bleidioxyd wurde auf nassem Wege aus dem Gemisch oder aus Mennige erhalten und zwar durch Lösung in Salpetersäure. Der aus PbO_2 bestehende verbliebene Rückstand wurde mit heissen Wasser gewaschen und im Trockenschrank bei 110°C getrocknet. Zugleich findet aber auch eine Zusammenballung statt.

Um die Zusammenballung zu vermeiden, stellten wir PbO_2 aus anderen Gemischen her.

Nach der Auflösung des PbO in verdünnter Salpetersäure, wurde der PbO_2 — Rückstand mit kaltem Wasser, Alkohol und Äther gewaschen, und an der Luft getrocknet. Dann wurde es mit gelben PbO gut versicht. Ein Teil der Versuche wurde mit diesem PbO_2 bei verschiedenen Erhitzungsdauer wiederholt. Die erzielten Ergebnisse sind in der Tabelle 2 angegeben.

Aus dieser Tabelle ersieht man folgendes :

— Allen erhitztes PbO_2 verliert viel Sauerstoff, gibt aber keine reine Mennige, sondern ein braunes Produkt.

— Das Gemisch, das durch die Verdünnung mit gelben PbO eines in PbO_2 reicherem Gemische (bis zur Mennigezusammensetzung) erhalten wurde und das eine dunkelbraune Farbe hat, verliert durch Erhitzen wenig Sauerstoff und gibt eine schöne gleichmässig gefärbte Mennige.

— Ebenso das synthetische Gemisch aus nicht zusammengeballtem PbO_2 und gelbem PbO gut vermengt, gibt bei Erhitzen ein schön gefärbtes Mennige, bei sehr geringem Sauerstoffverlust.

Tabelle 2

Substanzen oder Gemische	PbO_2 mit Alkohol und Ather gewaschen und in der Luft getrocknet	Auf nassen Wege gebildetes Gemisch mit anfangs 41,22% PbO_2 und gelben PbO	Synthetisches Gemisch ans 92,10% PbO_2 und gelben PbO
Der PbO_2 Prozentgehalt des Gemisches vor dem Erhitzen	92,10%	34,85%	35,94%
Die Farbe vor dem Erhitzen	schwartz-braun	dunkel-braun	dunkel-braun
Der PbO_2 Prozentgehalt nach 15 stündiger Erhitzen auf 370°C	44,62%	34,16%	34,39%
Die Farbe nach dem Erhitzen	braun	rot-orange	rot-orange

Die analytischen Resultate der beiden Tabellen sind Mittelwerte mehrerer Versuche.

Es wurde versucht die in beiden Tabellen (1 und 2) angegebenen Gemische aus verdünnten oder synthetischen Proben auch auf andere Temperaturen zu erhitzen. Man bemerkte dass bei 415°C eine Dauer von 3 Stunden nötig ist um die Farbe der Mennige vollkommen und gleichmässig aus dunkel-braun in rot-orange zu verwandeln. In weniger als 3 Stunden ist die Verwandlung an den Wänden des Schmeltztiegels gut; in seinem Innern erhitzungen ist sie aber nicht vollständig auf diese Temperatur während drei bis sechs Stunden zeigen, ausser einer vollständigen und gleichmässigen Farbänderung, keine wesentlichen Änderungen in der Zusammensetzung, da die Mennige bei dieser Temperatur ein unbedeutendes Zersetzungsbestreben hat.

Es wurden auch Versuche mit Katalissatoren gemacht. So wurde eine Reihe von Proben die Katalissatoren enthielten ($Co(NO_3)_2$, $Ni(NO_3)_2$, $Cu(NO_3)_2$, so wie Proben ohne Katalissatoren auf 370°C erhitzt. Die Erhitzungsdauer war 5; 7,5 und 10 Stunden.

Alle Proben zeigten nach 7,5 Stunden eine gänzliche und gleichmässige Änderung der Farben von dunkel-braun in rot-orange. Es wurde keinerlei günstiger Einfluss der Nitrate bemerkt. In Gegenteil, die Proben mit Nitraten hatten eine etwas dunklere Farbe.

Um zu prüfen, ob diese Mennige, gegenüber der im Handel erhältlichen bessere Eigenschaften hat, begnügten wir uns ihre Deckraft festzustellen. Die Versuche wurden nach STAS L 23/2043-51 ausgeführt. Die gewöhnliche Mennige zeigte eine Deckkraft von 109 g/m^2.

Die von uns erzeugte Mennige hatte eine Deckkraft von 43,3 g/m^2, also eine etwa 2,51 mal grössere, als die der im Handel erhältliche Mennige.

SCHLUSSFOLGERUNGEN

1) Das Erhitzen im Schmeltztiegel eines Gemisches von PbO_2 und PbO dessen Verhältniss fast der Mennigezusammensetzung entspricht 34,89% PbO_2 und das anfangs eine hell-braunen Farbe hat, ergibt eine Mennige mit einer sehr kleinen Zusammensetzungsveränderung.

2) Die Umsetzungsgeschwindigkeit der Mennige hängt von der Temperatur ab. Diese Temperatur ist neidriger als diejenige bei der sich die Mennige aus PbO durch Erhitzen an der Luft, oder durch Zersetzung von PbO_2, bildet. Für diese Umsetzung genügt eine Temperatur von umgefähr 370°C. Erhitzung auf 415°C beschleunigt die Reaktion.

3) Der Gleichmässigkeitsgrad beeinflusst in hohem Mase sowie die Temperatur, als auch die Umsetzgeschwindigkeit. Besonders wirksame Gemische erhält man aus gefällten PbO_2 und auf 625°C erhitztem gelben Bleioxyd, oder durch Verdünnen mit gelben PbO von konzentrierteren PbO_2 Gemische, die aus PbO mit Oxydationsmitteln in alkalischen Medium erhalten wurden.

4) Die erhaltene Mennige ist sehr feinkörnig und hat einen fast theoretischen PbO_2-Gehalt (Pb_3O_4). Von diesem Standpunkte aus ist sie besser als jedwelche — im Handel vorkommende Mennige, sie eignet sich

für eine Reihe von besonderen Verwendungen (Akkumulatoren, Farben, usw). Ihre Deckkraft ist unvergleichlich grösser als die der Handelsmennige.

5) Die an PbO_2 reicheren Gemische, die man aus dem gelben PbO durch Oxydation in alkalischer Lösung erhält, können als Rohstoff für PbO_2-Gewinnung an Stelle von Mennige dienen. Der PbO-Überschuss wird in Salpeter oder vordünnter Essigsäure gelöst.

6) Durch eine einfache, in der Industrie leicht anwendbare Methode gewinnt man wertvolle Produkte aus einem Material das ein Nebenprodukt in einem für die Herstellung von Natriumchlorit vorgeschlagenen technologischen Prozess ist.

Anorganisch und Analytisch-chemisches Laboratorium
der Technischen Hochschule Bukarest.

EINZELSCHRIFTEN

1. *G. Holst* : Natriumchloritherstellung. Ind. a. Eng. Chem. V. 42, nr. 11, 1950.
2. *A. Ianu und A. Steclaci* : Technologischer Prozess für die Natriumchloritgewinnung aus den Chlorierlaugen in Tîrnăveni. Bulet. I. P. B. Tom XXI F3, 1959.
3. *Reinders und Hamburger* : Z. anorg. Ch. 89, 1914 S. 71.
4. *F. F. Belnkii u. I. V. Riskin* : Chemie und Technologie der Pigmente. Moskau 1949 (Übersetzung aus der russischen in die rumänischer Sprache, I.D.T.).
5. *Gmelin* : Handbuch der anorg. chem. 1924. Bd. IV. P.2 S. 303.
6. *L. Saharova u.B. Levitina* : Ausarbeitung des Herstellungsprozesses für Akkumulatoren Bleiglätte und Mennige ; Arbeiten des Instituts für Locke und Anstrichfarben, Heft II, S. 7, Gorcki, 1939.
7. *P. Kranze u. Ch. Kranze :* Über die Oxydation der Bleiglätte zu Mennige. Jurnal Pricladnoi Himîi. Bd. 11 S. 403, 1938.

О ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫМ СМЕСЕЙ ОКИЕИ СВИНИА ПРИ НАГРЕВАНИИ И О ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ПРАКТИЧЕКОГО ПРИМЕНЕНИЯ.

Краткое содержание

В работе указываетея что смесь окиси и перекиси свинца, полученная как побочный продукт при производстве хлорита натрия, нагревается в закрытом сосуде при разных температурах.

В ходе еакции наблюдаются, что в зависимости от их состава некоторые смеси при нагревании до 370—420° в течении 8—10 часов дают высококачественный сурик (Pb_3O_4) в результате высокой степени дисперсии полученно продукта.

CONCERNING THE BEHAVIOUR OF LEAD OXIDE MIXTURES ON HEATING, AND THEIR POSSIBLE PRATICAL USE

(Summary)

A mixture of lead oxide and dioxide, obtained as a by-product in sodium chlorite manufacture, is heated in a closed vessel at various temperatures.

Depending on the composition, it is observed that at 370°—420°, within a heating period of 8—10 hours, several mixtures yield highgrade minium, Pb_3O_4 owing to the fine dispersion of the product.

SUR LE COMPORTEMENT DE CERTAINS MÉLANGES D'OXYDES DE PLOMB PENDANT LE CHAUFFAGE ET SUR LA POSSIBILITÉ DE LEUR APPLICATION PRATIQUE

(Résumé)

Un mélange d'oxyde et de dioxyde de plomb, obtenu comme produit secondaire dans la fabrication du chlorite de sodium, este chauffé à différentes températures, dans un vase clos.

En fonction de sa composition, on remarque que, de 370° à 420° et à une durée de chauffage de 8 à 10 heures, certains mélanges donnent un minium Pb_3O_4 de qualité supérieure, à cause du degré de dispersion plus élevé du produit obtenu.

ÜBER DAS VERHALTEN EINIGER BLEIOXYDGEMISCHE BEIM ERHITZEN UND ÜBER DIE MÖGLICHKEIT IHRER PRAKTISCHEN VERWERTUNG

(Zusammenfassung)

Einige Bleioxydgemische von Bleioxyd und Bleidyoxyd, die als Nebenprodukte bei der Fabrikation von Natriumchlorit ausfällen, wurden unter Luftabschluss in einem geschlossenen Rohre bei verschiedenen Temperaturen erwärmt.

Es wurde festgestellt dass einige Mischungen, je nach ihrer Zusammensetzung, zwischen 370°C und 420°C und 8 bis 10 Stunden erwärmt, hochwertige Bleimennige liefern. Die gute Qualität des Erzeugnisses ist auf ihre feine Verteilung zurückzuführen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola II

CONSTRUCȚIA DE MAȘINI

CONTRIBUȚII LA CALCULUL LAGĂRELOR AXIALE CU ALUNECARE

GHEORGHE MANEA și MUSTAFA R. MUSTAFA

1. *Aspecte caracteristice lagărelor axiale*

Calculul corect — pe baza teoriei hidrodinamice a ungerii — și construcția rațională a lagărelor axiale cu alunecare au fost hotărîtoare pentru construcția turbinelor de mare putere, atît a celor cu vapori cît, în special, a celor hidraulice.

Filmul portant de lubrifiant dintre două suprafețe în alunecare relativă poate fi realizat fie prin ungerea „hidrostatică", adică prin introducerea uleiului cu presiunea necesară dată de o pompă de înaltă presiune, fie prin ungerea „hidrodinamică", la care se realizează presiunea în mod automat, în stratul însuși de lubrifiant.

Reynolds a arătat dependența dintre presiunea în film, viteza relativă de deplasare a suprafețelor care delimitează acest strat, vîscozitatea lubrifiantului și forma interstițiului dintre suprafețe; el a constatat că, în ipoteza intrării și ieșirii uleiului din zona portantă fără suprapresiune, obținerea unei presiuni în pelicula continuă, capabilă a suporta o sarcină exterioară, este posibilă numai dacă înălțimea interstițiului scade continuu.

Teoretic și practic s-a stabilit ulterior totuși că și cu alte forme ale spațiului dintre cele două suprafețe pot rezulta presiuni hidrodinamice ridicate, de exemplu cu cel delimitat de suprafețe paralele, îngustate la unul din capete printr-o treaptă a uneia din ele.

Forma de „pană" a stratului de ulei se crează cu ușurință la lagărele radiale, prin jocul radial al fusului în cuzinet.

Problema se complică la fusul axial deoarece rezemarea pe suprafața continuă circulară sau inelară nu oferă această posibilitate.

Aplicarea teoriei hidrodinamice și străduința de folosire a avantajelor ungerii fluide la fusurile axiale au indicat necesitatea *segmentării* uneia din suprafețele de reazem. O primă soluție constructivă în acest sens a fost dată de Michell, cu segmenți independenți oscilanți; o altă variantă

*) Comunicare prezentată la a VI-a sesiune științifică a cadrelor didactice din IPB, 17—18 decembrie 1960.

este aceea a inelului dintr-o bucată, cu șanțuri radiale și cu suprafețele sectoarelor rezultate prelucrate pe direcția unghiulară (tangențiulă) după linii curbe sau linii drepte înclinate, astfel încît să se poată forma cu suprafața plană a celuilalt inel, fix, „penele" de lubrifiant.

Cu aceste soluții constructive s-a putut ajunge de la presiuni medii de 10—20 kgf/cm², la cîteva sute de atmosfere — în condiții de laborator 500—700 kgf/cm² — ceea ce a permis înlocuirea lagărelor multiinelare, prin lagăre cu un singur inel, obținîndu-se implicit o micșorare a gabaritului, economii importante de metal și, în multe cazuri, scăderea puterii consumate prin frecare, fără înrăutățirea condițiilor de funcționare.

Problema este de un deosebit interes practic și pentru țaru noastră.

Funcționarea sigură implică, simultan cu capacitatea portantă suficientă a filmului de lubrifiant, menținerea temperaturii în limitele admise.

Lagărele axiale ridică probleme deosebite, legate de asigurarea circulației cantității necesare de ulei printre suprafețe și de evitarea *deformațiilor dăunătoare* ale suprafețelor în contact — datorite presiunilor și, mai ales, încălzirii neuniforme — probleme care ies în evidență și cer atenție în special la dimensiunile impuse de unitățile mari.

Bazele teoretice ale lagărelor axiale au fost larg studiate de Michell, Falz, Schiebel, Frössel, Freudenreich, Vogelpohl, Ciarnes, Drescher, Tipei ș.a. Știința sovietică a adus un valoros aport prin lucrările lui M. I. Ianovski, dar mai ales prin vastele cercetări teoretice și experimentale efectuate de A. K. Diacikov, D. P. Parghin, N. Z. Letcov ș.a.

Lagărele axiale reprezintă unul din cazurile rare în care un studiu matematic detailat al problemei a apărut considerabil în avans față de soluțiile tehnice. De fapt, pînă în prezent se constată încă, pentru aceste lagăre, o lipsă de valori practice mai mare decît pentru lagărele radiale.

Prin prezenta lucrare se urmărește :

— stabilirea unor expresii adimensionale — diferite de cele date de alți autori — care oferă posibilitatea considerării lagărelor axiale după criterii *similare celor valabile pentru lagărele radiale* ;

— scoaterea în evidență a diferențelor între rezultatele unora dintre principalele metode cunoscute ;

— indicarea unei metode de calcul de dimensionare, ușor accesibile proiectanților, prin folosirea expresiilor caracteristice adimensionale propuse și a curbelor aferente.

2. *Considerații asupra unor soluții existente*

Notații

b — lățimea plăcii, respectiv segmentului pe direcție radială
c_o — căldura specifică a labrifiantului
c_p — coeficientul de portanță al segmentului
c_q — coeficientul de debit al segmentului

l — lungimea plăcii, respectiv segmentului, pe cercul cu diametru mediu

d_1, d_2, d_m — respectiv diametrul interior, exterior, mediu al suprafeței inelare de reazem

r_1, r_2, r_m — respectiv raza interioară, exterioară, medie a suprafeței inelare de reazem

i — numărul segmenților care compun suprafața de reazem

h — înălțimea (grosimea) peliculei de lubrifiant, într-un punct oarecare

h_0 — înălțimea (grosimea) minimă a peliculei de lubrifiant

h_1 — înălțimea (grosimea) peliculei de lubrifiant la intrare

n — turația arborelui

p — presiunea într-un punct oarecare a peliculei de ulei

p_m — presiunea medie a lagărului

q_1 — debitul de lubrifiant pentru un segment fără scurgere laterală

q_1^* — debitul de lubrifiant raportat la 1 cm² suprafață

t_0 — temperatura mediului ambiant

t_i, t_e — temperatura uleiului la intrarea, respectiv ieșirea din lagăr

v — viteza relativă a plăcilor

v_m — viteza periferică la cercul cu diametrul mediu al lagărului

A — coeficientul de transformare caloric $A = \frac{1}{427 \cdot 10^2}$ Kcal/cmkg

P — portanța, respectiv sarcina care poate fi suportată de lagăr

P_1 — portanța unui singur segment $P_1 = \frac{P}{i}$

Q_1 — cantitatea de căldură cedată mediului ambiant de suprafața lagărului

Q_2 — cantitatea de căldură transportată de ulei

S — suprafața exterioară a lagărului

α — unghiul de înclinare a suprafețelor portante = unghiul „penei" de ulei

γ — unghiul de poziție a unui punct considerat; la bilanțul termic, greutatea specifică a uleiului

γ^* — extinderea unghiulară a unui segment

δ_0 — înălțimea minimă relativă a peliculei de ulei

$$\delta_0 = \frac{h_0}{t}, \quad t = \text{înălțimea pantei la intrare}$$

φ — raportul dintre lungimea totală a segmenților și lungimea cercului cu diametrul mediu, $\varphi = \frac{il}{\pi d_m}$

ψ — panta relativă : $\psi = \frac{t}{r_m}$

ω — viteza unghiulară a arborelui

η — viscozitatea lubrifiantului

μ — coeficientul de frecare

Majoritatea studiilor efectuate presupun:

— identitatea dintre segmentul component al inelului și o placă dreptunghiulară, avînd lungimea 1 egală cu aceea a segmentului, măsurată pe cercul cu raza medie r_m a inelului, și lățimea b egală cu dimensiunea radială a lui;

— viteza de deplasare relativă a plăcilor constantă, egală cu viteza periferică la cercul cu raza medie r_m, pe cînd în lagărul real viteza variază cu distanța de la centrul lagărului;

— vîscozitatea lubrifiantului η constantă în film, ceea ce nu corespunde cazului real, cîmpul de temperatură prezentînd variații;

— grosimea filmului de lubrifiant constantă pe direcție radială.

În tabela 1 sînt cuprinse rezultatele finale ale unora dintre lucrările de bază.

Michell (1, 2) a dat soluții matematic riguroase, obținînd expresii simple pentru *cazurile particulare* ale plăcilor dreptunghiulare avînd $l = b = \pi$ și $l = 3b = 3\pi$ (tabela 1, poz. 1).

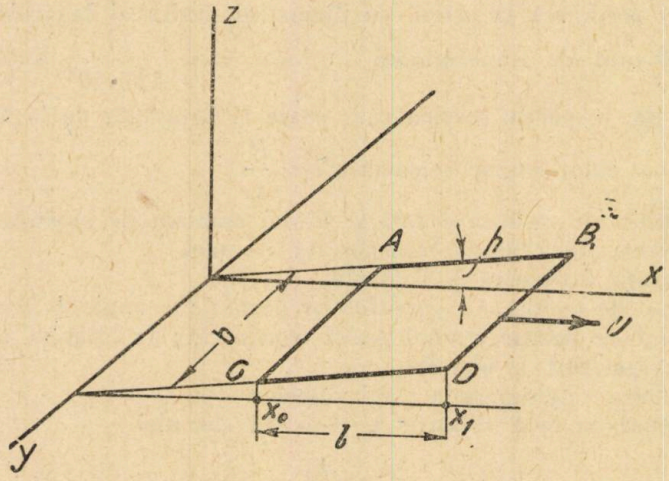


Fig. 1

Falz (3), menținînd bazele date de teoria hidrodinamică, a urmărit ușurarea calculului necesar proiectării, determinînd, atît pentru portanță, cît și pentru coeficientul de frecare, relații aplicabile în cazurile curente. El a ajuns pînă la stabilirea unei expresii a coeficientului de portanță C_p, valabile pentru placa cu lățime finită cu raportul $\frac{l}{b} = \frac{1}{3}$, a cărui curbă de

variație în funcție de parametrul adimensional $\left(\frac{x_0}{l}\right)$ a aproximat-o prin $C_p \approx$ $\approx \left(\frac{0{,}35}{\left(\frac{x_0}{l}\right)}\right)^{1{,}2}$. (Tabela 1, poz. 2).

Schiebel (4) a folosit, ca și Falz, parametrul adimensional variabil $\frac{x_0}{l}$ (fig. 2), marcînd un progres în privința modului de a considera lățimea finită a plăcii. Din aceeași tendință de simplificare însă, pentru funcțiile de bază, luate de la placa cu lățime infinită, dependente de $\delta_0 = \frac{x_0}{l} = \frac{h_0}{t}$, deci de înclinarea plăcii, el a introdus în rezultatele finale valori numerice optime

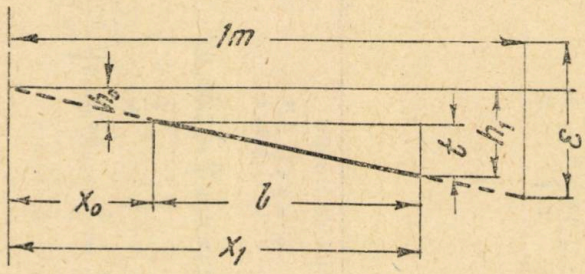


fig. 2

și anume $\Phi_{1\,max} = 0{,}0265$ pentru calculul portanței, $\Phi_{2\,min} = 4{,}63$ pentru calculul coeficientului de frecare și a ≈ 1 (tabela 1, poz. 3).

Menținînd aceleași soluții, Drescher (5) a îmbunătățit și a extins rezultatele lui Schiebel, prin folosirea expresiei caracteristice adimensionale pentru portanță $c_p = \frac{p_m h_o}{\eta u b}$ și reprezentarea grafică a acesteia în funcție de δ_0, pentru diferite rapoarte l, luînd însă în considerație variația funcțiilor Φ_1 (δ_0) și a (δ_0) care figurau în acele soluții. (Tabela 1, poz. 4).

Pentru coeficientul de frecare, Drescher introduce expresia caracteristică $\mu \sqrt{\frac{p_m b}{\eta u}} = f(\delta_0)$, în care nu mai apare h_o și care variază puțin cu δ_0 în cîmpul de valori uzuale ale acestui parametru.

Drescher a dat o reprezentare grafică a familiilor de curbe caracteristice corespunzătoare coeficientului de portanță și coeficientului de frecare, în forma dedusă de el; calculul de dimensionare a lagărului obligă însă la fixarea anticipată a valorilor pentru h_0 și d_1.

Diacikov (6) tratează în mod remarcabil întreaga problemă în coordonate polare. El realizează un progres important nu numai prin studiul corect al scurgerii printre cele două plăci care formează interstițiul cu o înălțime

RELAȚII PENTRU PORTANȚĂ ȘI COEFICIENT, RESPECTIV FORȚA DE FRECARE *Tabela 1*

Nr. crt	Autorul	Portanța	Frecarea	Observații
	1	2	3	4
1	Michell	Ecuația generală a presiunii $p = \Pi + \sum_{1}^{\infty} \xi_m \frac{\sin m\pi y}{\frac{m\pi x}{b}}$ Portanța $P = \int_{x_0}^{x_1} \int_{0}^{b} p\, dx\, dy$ Pentru $x_1 - x_0 = l = b$ $P_1 = \frac{0{,}0253\, \eta\, u\, S^{\frac{1}{2}}}{c^2}$	Forța de frecare $F = \frac{\eta u}{c} \sqrt{S}\, ln\, \frac{x_1}{x_0}$	Notații conform fig. 1 $c = \operatorname{tg} \alpha =$ înclinarea plăcii Π — presiunea exterioară ξ_m — o funcție numai de x l — lungimea plăcii b — lățimea plăcii m — număr impar S — proiecția plăcii $S = l\, b$
2	Falz	Expresia coeficientului de portanță $c_p = k\, c_{p\infty} = k \frac{p_m\, l\, \varepsilon^2}{\eta\, u}$ în care $k = 1 + \frac{l}{b}$ Pentru $\frac{l}{b} = \frac{1}{3}$ $c_p = \frac{1{,}33\, p_m\, l\, \varepsilon^2}{\eta\, u} \approx \left[\frac{0{,}35}{\left(\frac{x_0}{l}\right)} \right]^{1{,}2}$	Coeficientul de frecare $\mu = \chi\, \tau \sqrt{\frac{\eta\, u}{p_m\, l}}$ în care $\tau \approx \tau_m = 2$ pentru $\frac{x_0}{l} = 0{,}05..,0{,}8$; $\chi = \sqrt{1 + 4\, \frac{l}{b}}$ Pentru $\frac{l}{b} = \frac{1}{3}$ rezultă $\mu = 3 \sqrt{\frac{\eta\, u}{p_m\, l}}$	Notații conform fig. 2 ε — înălțimea pantei la distanța de 1 m față de origine
3	Schiebel	Expresia generală a portanței plăcii plane $P_1 = 5 \frac{\eta\, u}{h_0^2} \cdot \frac{l^2\, b}{1 + a\left(\frac{l}{b}\right)^2} \cdot \Phi_1(\delta_0)$ Cu valoarea medie $a \approx 1$ și cu $\Phi_{1\,max} = 0{,}0265$ la $\delta_0 \cong 0{,}7$ $P_1 = 0{,}1325 \frac{\eta\, u}{h_0^2} \frac{l^2\, b}{1 + \left(\frac{l}{b}\right)^2}$	Coeficientul de frecare $\mu = \frac{6}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\eta\, u\, b}{P_1} \left[1 + a\left(\frac{l}{b}\right)^2 \right]} \Phi_1(\delta_0) \cdot \Phi_2(\delta_0)$ Cu valorile medii $a \approx 1$ și $\Phi_1 \cdot \Phi_2^2 \approx 0{,}88$ $\mu = 2{,}5 \sqrt{\frac{\eta\, u\, b}{P_1} \left[1 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 \right]}$	Notații conform fig. 2 $\delta_0 = \frac{x_0}{l} = \frac{h_0}{t}$ parametru adimensional caracteristic pentru înclinarea plăcii. Expresiile analitice $\Phi_1(\delta_0)$ conform ecuației (2) $a(\delta_0)$ „ „ (3) $\Phi_2(\delta_0)$ „ „ (7) Reprezentarea grafică a acestor funcții în fig. 3

	1	2	3	4
4	Drescher	Coeficientul de portanţă $C_p = \frac{p_m h_0^2}{\eta u b} = 5 \frac{\left(\frac{l}{b}\right)}{1 + a\left(\frac{l}{b}\right)^2} \cdot \Phi_1(\delta_9)$	Coeficientul de frecare $\mu \sqrt{\frac{p_m b}{\eta u}} =$ $= \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\left[1 + a\left(\frac{l}{b}\right)^2\right]\left[(1+2\delta_0)\ln\frac{1+\delta_0}{\delta_0} - 1{,}5\right]^2}{(1+2\delta_0)\left(\frac{l}{b}\right)\left[(1+2\delta_0)\ln\frac{1+\delta_0}{\delta_0} - 2\right]}}$	δ_0, $\Phi_1(\delta_0)$ şi a (δ_0) ca la poz. precedentă
5	Diacikov	Expresia generală a presiuuii $p \equiv r^2 f(\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{2}k\gamma} \sin\frac{\pi n \gamma}{\gamma^*} \times \left(A_n r^{q_n} + B_n r^{t_n}\right)$ in care $q_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{\gamma^*}\right)^2 + \left(\frac{3k}{2}\right)^2}$; $t_n = -q_n$ $A_n \equiv \frac{3\eta\omega k}{h_0^2 (k^2-2)}\left[\frac{1 - z^{q_n+2}}{z_2^{q_n-2}\left(1 - z^{2q_n}\right)}\right] \times \Omega(k, \gamma^*)$ $B_n = \frac{3\eta\omega k}{h_0^2 (k^2-2)} \times$ $\times \left[\frac{\gamma^{q_n+2} z^{q_n+2}\left(1 - z^{q_n-2}\right)}{1 - z^{2q_n}}\right] \Omega(k, \gamma^*)$ $\Omega(k, \gamma)^*$ funcţie de extinderea unghiulară a segmentului şi de înclinarea lui. Înălţimea minimă a filmului de ulei $h_0 = \frac{r_2}{c_p}\sqrt{\frac{\eta\omega}{p_m}} \cdot 10^2$ micron i $\cdot c_p$ funcţie de parametri geometrici ai segmentului şi forma interstiţiului.	Momentul de frecare $M_f = \int_0^{\gamma^*}\int_{r_1}^{r_2^*}\left(\frac{h_0 r}{2} e^{k\gamma}\frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{\eta\omega}{h_0} r^3 e^{-k\gamma}\right) dr \cdot d\gamma$ Căldura degajată de un singur segment raportată la 1 kg sarcină $Q_{1f} = A\sqrt{\frac{\eta\omega}{p_m}}\, \omega\, r_2\, c_q$ c_q = coeficient specific degajării de căldură, dependent de parametrii geometrici ai segmentuluî şi de forma secţiunii transversale a filmului de lubrifiant.	Coordonate polare Segmenţi cu colţurile rotunjite r — raza γ — unghiul de poziţie } al punctului considerat γ^* — unghiul limită al segmentului r_1, r_2 — raza interioară respeetiv, exterioară a suprafeţei portante $z = \frac{r_{1\,min}}{r_{2\,max}}$ k = coeficient care determină forma secţiunii peliculei, caracierizînd înclinarea plăcii.

variabilă, după o lege de forma $h = h_0 e^{k\gamma}$, dar, părăsind placa *dreptunghiulară*, propune segmentul-delimitat de raze — cu colțurile rotunjite (fig. 3).

Prin această nouă construcție, este îmbunătățită sensibil circulația fluxului de ulei, în sensul că se asigură în mai mare măsură scurgerea laminară, activîndu-se astfel evacuarea uleiului folosit. El a constatat, pentru forma optimă determinată experimental în laborator, o reducere importantă

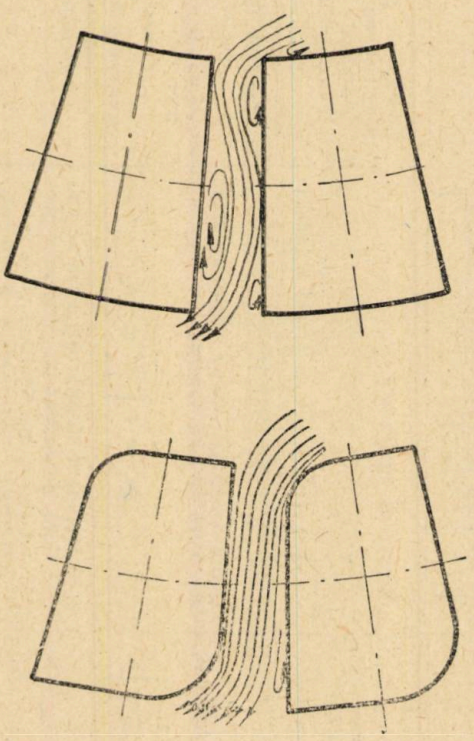


fig. 3

a regimului de temperatură și o micșorare a coeficientului de frecare. Efectul devine cu atît mai evident, cu cît presiunile specifice, viteza relativă de alunecare, regimul de temperatură sînt mai mari și vîscozitatea lubrifiantului este mai redusă.

Diacikov presupune constante : η, h pe direcție radială, ω.

Ca un progres față de Ianovski, Iong ș.a. care iau în considerație variația vitezei cu raza și unghiul de poziție, însă numai pentru segmenții cu forma uzuală, Diacikov ține seama de variația vitezei și pentru conturul curb al lor.

N. Tipei a făcut o valoroasă incursiune matematică în studiul scurgerii între plăci, eliminînd încă una din restricții și anume aceea a vîscozității constante.

3. *Expresii adimensionale pentru calculul de dimensionare și aprecierea comportării lagărelor axiale în exploatare*

În formulele sau prezentările grafice pentru portanță intervin expresiile caracteristice adimensionale :

$\frac{p_m l \varepsilon^2}{\eta u}$ la Falz, $\frac{p_m h_0^2}{\eta u l}$ la Schiebel, $\frac{p_m h_0^2}{\eta u b}$ la Drescher., $\frac{p_m h_0^2}{\eta \omega r_2^2}$ la Diacikov.

Se relevă la aceasta din urmă prezența razei exterioare r_2, ca parametru *legat de lagărul axial*, la toți ceilalți autori fiind considerată numai placa dreptunghiulară ca atare.

Ca parametri variabili se întîlnesc $\delta_0 = \frac{h_0}{t}$ și $\frac{l}{b}$ (Falz, Schiebel, Drescher), respectiv k, $\frac{r_1}{r_2}$, γ^* la Diacikov.

În lucrarea de față am urmărit pe de o parte introducerea unor expresii caracteristice în care să apară elemente ale lagărului *real*, nu numai ale *plăcii izolate ;* iar pe de altă parte, ca aceste expresii să nu mai conțină lungimi absolute — h_0, l, b —, ci valori raportate, ca în cazul lagărelor radiale. Astfel, am realizat ca și pentru dimensionarea, respectiv verificarea comportării lagărului axial să poată fi folosiți coeficienții :

— de portanță al segmentului în lagăr, în forma $C_p = \frac{p_m \psi^2}{\eta \omega}$

— de debit, în forma $c_q = \frac{q_1^*}{r_m \omega \psi}$

— de încălzire, în forma $\theta = \frac{\mu v_m}{q_1^*}$

Prin $\psi = \frac{t}{r_m} = \frac{h_0}{\delta_0 r_m}$ se înțelege de data aceasta „panta relativă" obținută ca raport al înălțimii t a pantei, la raza medie a lagărului ; iar ca parametri variabili :

$\delta_0 = \frac{h_0}{t}$ sau „grosimea minimă relativă", caracteristică pentru poziția segmentului față de discul plan,

$K = \frac{l}{b}$, raportul dimensiunilor segmenților, raport care a intrat în obișnuința proiectantului,

$\frac{\varphi}{i}$, raport de utilizare a suprafeței *inelare*.

Întocmai ca la lagărele radiale, expresiile caracteristice alese — coeficienții de portanță, de debit, de încălzire — reprezintă, prin dependențele care vor fi arătate, legi de similitudine.

La lagărele axiale, înălțimea minimă h_0 a peliculei de ulei este deosebit de importantă nu numai prin condiționarea sarcinii ce poate fi suportată, ci și prin aceea că, de mărimea ei atîrnă în largă măsură siguranța în exploatare.

Pe de altă parte, înălțimea pantei t reprezintă pentru segmenții rigizi (prelucrați în disc) o dimensiune constructivă fixă de interes deosebit. În aceste condiții, în exploatare, se menține proporționalitatea între δ_0 și h_0. Parametrul δ_0 nu este afectat de avantaje deosebite în cazul segmenților oscilanți, deoarece atît δ_0, cît și celelalte expresii adimensionale rămîn constante, dacă poziția axei de oscilație rămîne neschimbată (5).

Prin δ_0 și ψ se face legătura dintre h_0 și r, cea ce este foarte important. Din acest punct de vedere, paralelismul cu lagărul radial este perfect, după cum se constată mai jos:

Lagăr radial	*Lagăr axial* (fig. 2)
$\delta_0 = \frac{h_0}{R-r} = \frac{h_0}{\Delta r}$	$\delta_0 = \frac{h_0}{t}$
$\psi = \frac{R-r}{r} = \frac{\Delta r}{r}$	$\psi = \frac{t}{r_m}$

La lagărul radial, forma de „pană" a peliculei de ulei este realizată tocmai prin existența jocului radial Δr. Desfășurînd jumătatea din periferia fusului radial, delimitată de linia centrelor, în ipoteza că $h_0 \to O$, s-ar obține o pană de ulei cu înălțimea pantei $2\Delta r = t$.

Prin cercetările amintite, precizia matematică a studiului fenomenelor a fost împinsă foarte departe.

În această fază, am considerat utilă, odată cu folosirea expresiilor de mai sus, prezentarea dependențelor de parametri variabili într-o formă care să ducă la claritatea și facilitatea calculului practic.

Prin transformări corespunzătoare este posibilă racordarea expresiilor date în prezenta lucrare, la rezultatele unuia sau altuia dintre cercetători.

Am folosit relațiile matematice generale date de Schiebel, mai comode pentru reprezentarea grafică și, cu corecturile aduse aci, suficient de exacte pentru cerințele practicii.

Coeficientul de portanță

Înlocuind în relația de bază a portanței (tabela 1, poz. 3) $u = r_m \omega$; $l = \frac{2\pi r_m \varphi}{i}$; $P_1 = \frac{P}{i} = p_m b l$, se obține după unele transformări:

$$\frac{p_m \psi^2}{\eta \omega} = 10\pi \left(\frac{\varphi}{i}\right) \frac{ln \frac{\delta_0+1}{\delta_0} - \frac{2}{2\delta_0+1}}{1 + 10\left\{\left[\delta_0 \frac{\delta_0+1}{2\delta_0+1}\right]^2 + \frac{\delta_0^2[1-2\delta_0(\delta_0+1)]}{12\left[(2\delta_0+1) ln \frac{\delta_0+1}{\delta_0} - 2\right]}\right\}\left(\frac{l}{b}\right)^2}$$

$$= 10\pi \left(\frac{\varphi}{i}\right) \frac{1}{1+a\left(\frac{l}{b}\right)^2} \cdot \frac{1}{\delta_0^2} \Phi_1 \qquad (1)$$

sau

$$c_p = \frac{p_m \psi^2}{\eta \omega} = \frac{\Phi^*}{\delta_0^2} \qquad (1 \text{ bis})$$

în care :

$$\Phi_1 = \delta_0^2 \left[ln \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0} - \frac{2}{2\delta_0 + 1} \right] \qquad (2)$$

$$a = 10 \left\{ \left[\delta_0 \frac{\delta_0 + 1}{2\delta_0 + 1} \right]^2 + \frac{\delta_0^2 [1 - 2\delta_0 (\delta_0 + 1)]}{12 \left[(2\delta_0 + 1) ln \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0} - 2 \right]} \right\} \qquad (3)$$

$$\Phi^* = 10\pi \frac{\left(\frac{\varphi}{i}\right)}{1 + a\left(\frac{l}{b}\right)^2} \Phi_1 (\delta_0) \qquad (4)$$

Funcțiile $a\ (\delta_0)$ și $\Phi_1\ (\delta_0)$ sînt dependente numai de parametrul δ_0 care caracterizează poziția segmentului față de inelul plan. Variația acestor funcții este reprezentată în fig. 4 *).

Funcția, Φ^* determinantă pentru încărcarea lagărului, atîrnă atît de poziția feței active a segmentului, cît și de parametrii geometrici ai lui, în ansamblul inelului lagărului real.

Familia de curbe din fig. 5 arată variația funcției Φ^* cu δ_0, conform ecuației (4), în care, pentru fiecare valoare a acestui parametru, au fost introduse valorile corespunzătoare, a (δ_0) și $\Phi_1\ (\delta)$ date de expresiile (2) și (3).

Se constată că, pentru toate rapoartele $\frac{l}{b}$, funcția Φ^* oferă un maximum evident, în jurul valorii $\delta_0 \approx 0{,}8$, ceea ce este în concordanță cu rezultatele lui Drescher și ale altor cercetători.

În fig. 6 s-a reprezentat variația funcției Φ^* cu raportul $\left(\frac{l}{b}\right)$; se observă că pentru valori $\frac{l}{b} < \sim 1{,}5$, Φ^* crește rapid.

Pentru raportul de utilizare a suprafeței $\left(\frac{\varphi}{i}\right)$; practica a indicat ca valoare medie $\varphi \approx 0{,}85$ (4). Cu această valoare ar rezulta :

pentru $i =$	6	8	10	12	16	20
$10\left(\frac{\varphi}{i}\right) =$	1,41	1,06	0,85	0,75	0,53	0,425

*) Reprezentarea grafică originală dată de Schiebel este în funcție de parametrul $\frac{1}{m} = \frac{1}{\delta_0}$.

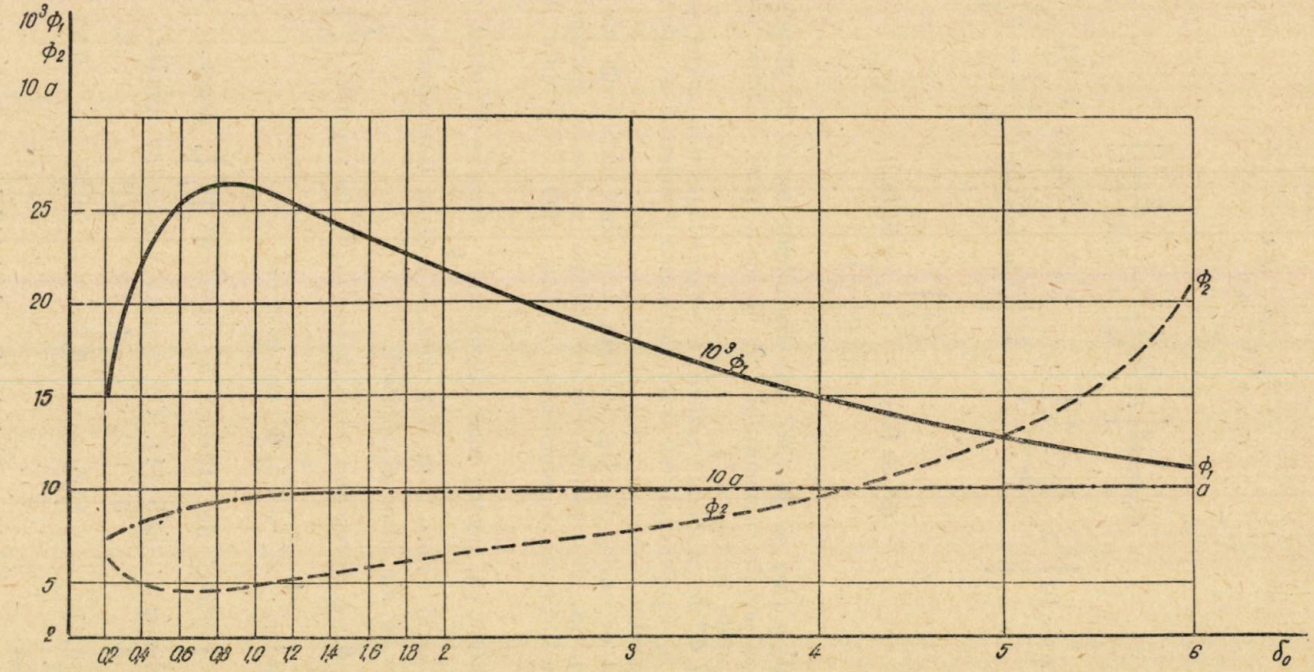

$10^3\Phi_1$
Φ_2
10 a
25
20
15
10
5
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2
3
4
5
6
δ_0
$10^3\Phi_1$
10 a
Φ_2
Φ_2
Φ_1
a

fig. 4

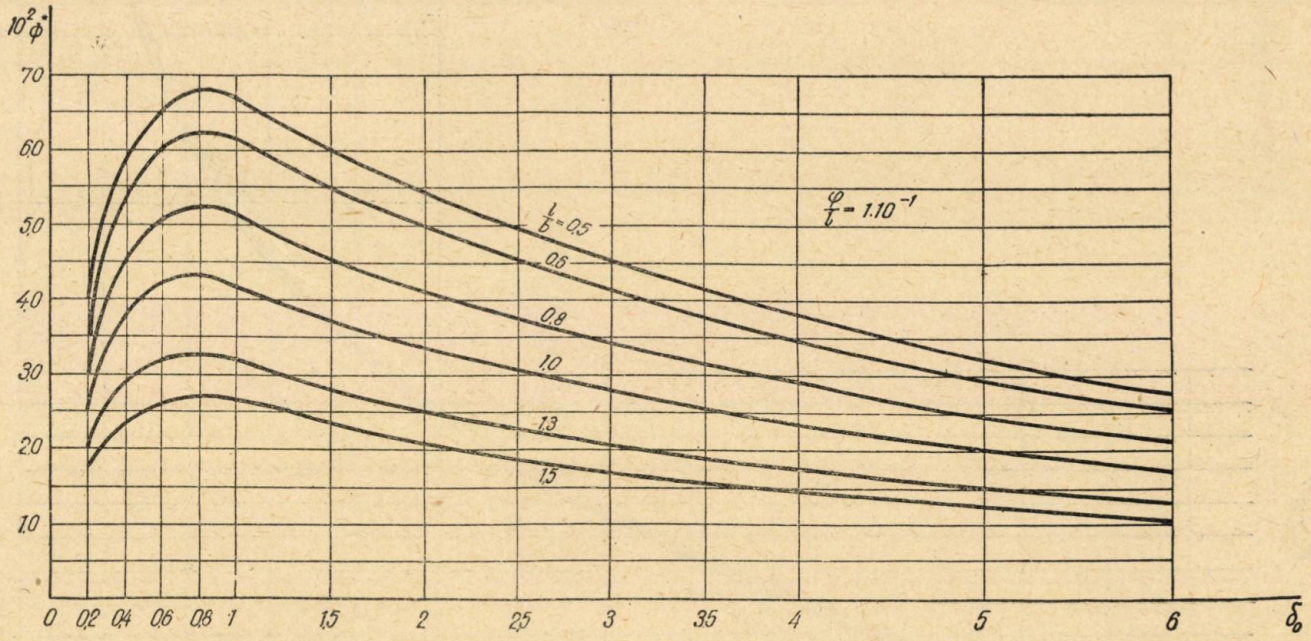

$10^2\Phi$
70
60
50
40
30
20
10
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
5
6
δ_0
$\frac{l}{b}$=0,5
0,6
0,8
1,0
1,3
1,5
$\frac{\varphi}{t}=1.10^{-1}$

fig. 5

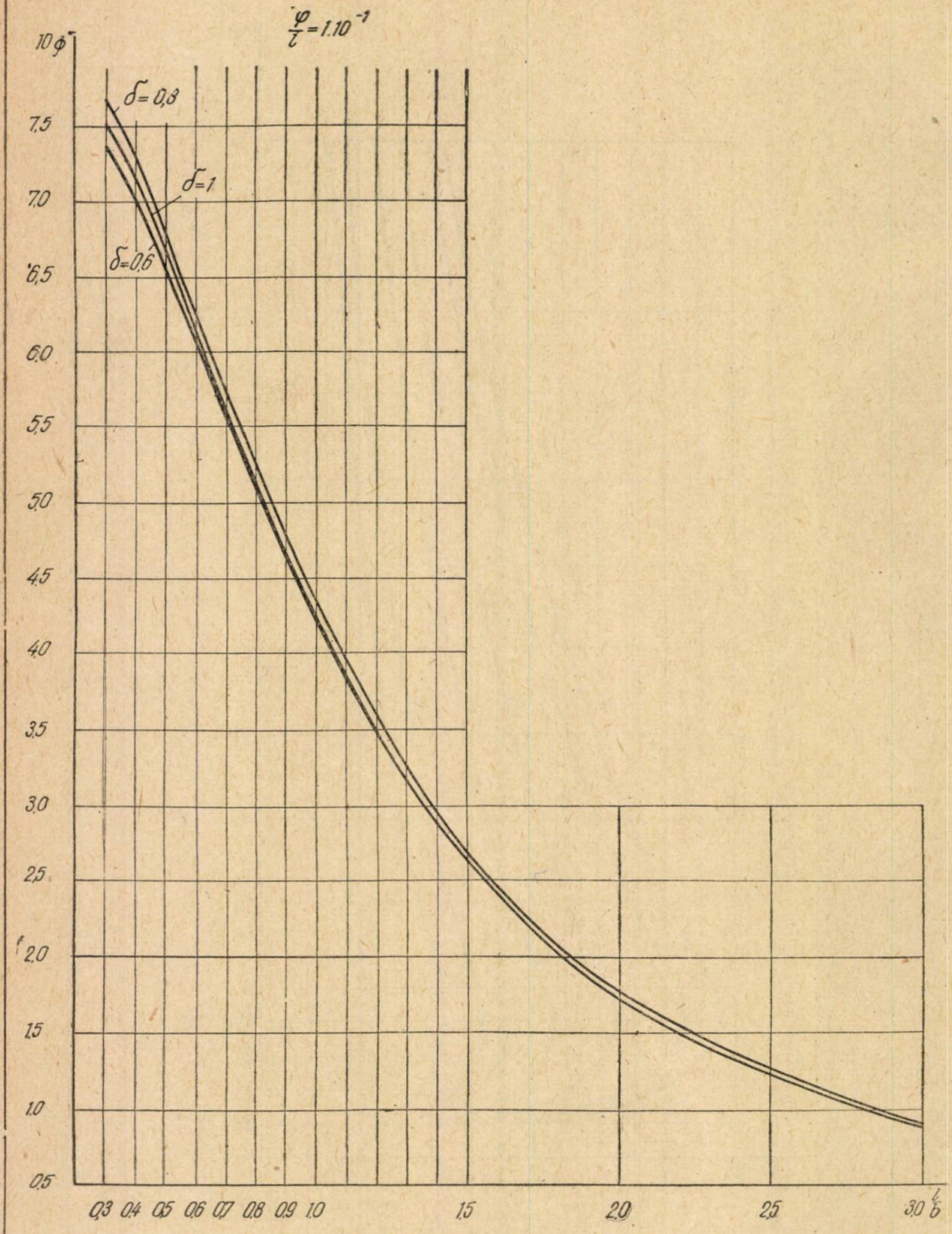

$\frac{\varphi}{t} = 1.10^{-1}$
10 ϕ
7.5
7.0
6.5
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
δ = 0,8
δ = 1
δ = 0,6
0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
$\frac{l}{b}$

Fig 6

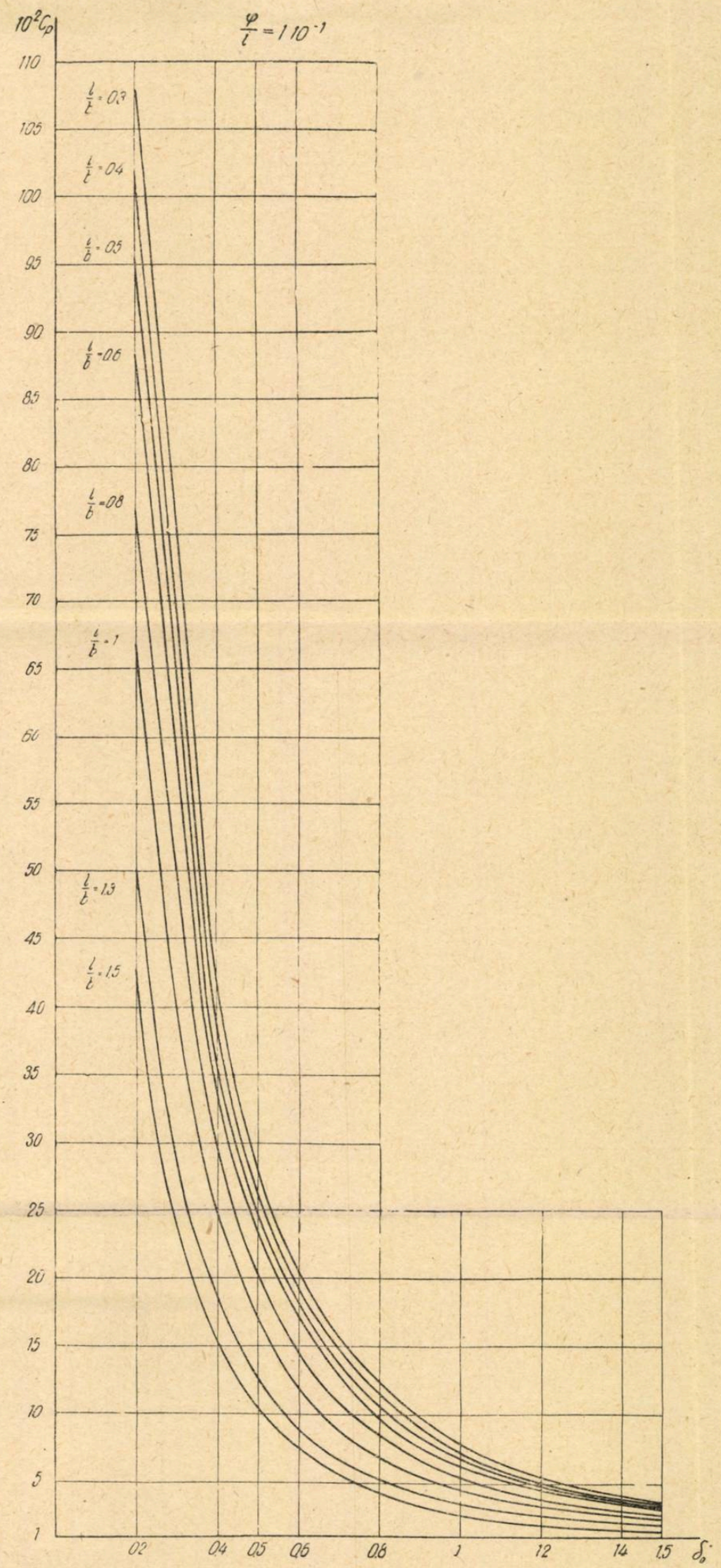

$10^2 C_p$
$\frac{\varphi}{t} = 1\,10^{-1}$
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
1
$\frac{l}{t} = 0.3$
$\frac{l}{t} = 0.4$
$\frac{l}{b} = 0.5$
$\frac{l}{b} = 0.6$
$\frac{l}{b} = 0.8$
$\frac{l}{b} = 1$
$\frac{l}{b} = 1.3$
$\frac{l}{t} = 1.5$
0.2
0.4
0.5
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.5
δ_0

Fig. 7

Reprezentarea grafică a coeficientului de portanță c_p, în dependență de δ_0 (fig. 7) scoate în evidență unitatea calitativă a rezultatelor cu acele valabile pentru lagărele radiale.

Cu cît $\frac{l}{b}$ scade, deci cu cît lățimea suprafeței pe direcție radială crește, cu atît crește coeficientul de portanță *).

Influența înclinării segmenților, exprimată prin δ_0, asupra coeficientului de portanță, devine importantă pentru valori $\delta_0 < 0{,}6$. Dimpotrivă, cînd δ_0 crește peste valoarea aproximativ egală cu unitatea, această influență este redusă.

Diagramele sînt construite pentru raportul $\frac{\varphi}{i} = 1 \cdot 10^{-1}$, oferind posibilitatea de a fi folosite pentru oricare alt raport, prin simpla multiplicare a valorilor date de curbe, cu acel raport.

În fig. 8 și 9 sînt trasate curbele de portanță după diverși autori. Se constată că pentru valorile uzuale $\delta_0 > 0{,}6$ există o apropiere apreciabilă.

Diferențe mai importante apar pentru valori δ_0 mici, care intervin însă mai rar.

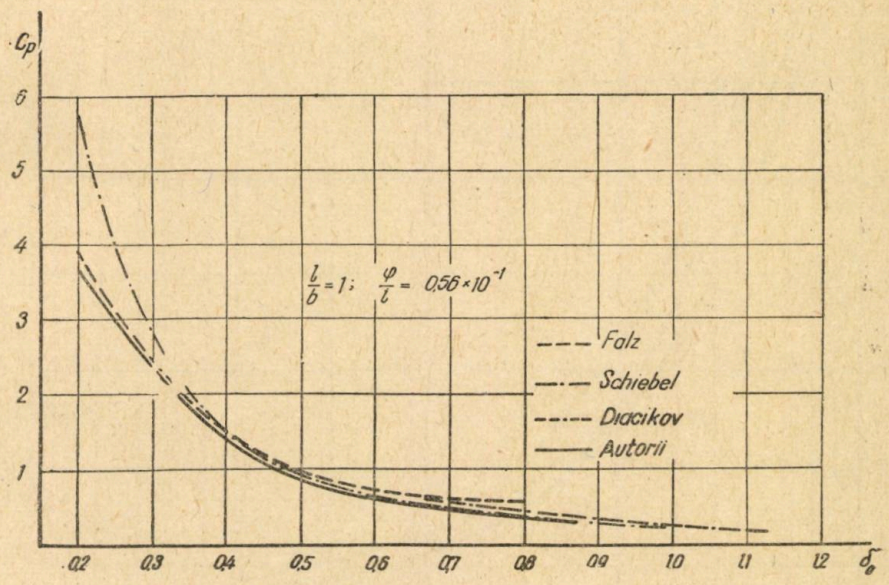


fig. 8

*) La lagărul radial se notează prin l lungimea lagărului pe direcție axială, corespunzînd dimensiunii b la lagărul axial.

Coeficientul de frecare

Prin aceleași înlocuiri ca la portanță, pentru coeficientul de frecare se obține :

$$\mu = 6\sqrt{\frac{\eta\,\omega}{p_m}}\sqrt{\frac{1}{10\,\pi}\left(\frac{i}{\varphi}\right)\left[1+a\left(\frac{l}{b}\right)^2\right]}\,\Phi_1\cdot\Phi_2 \qquad (5)$$

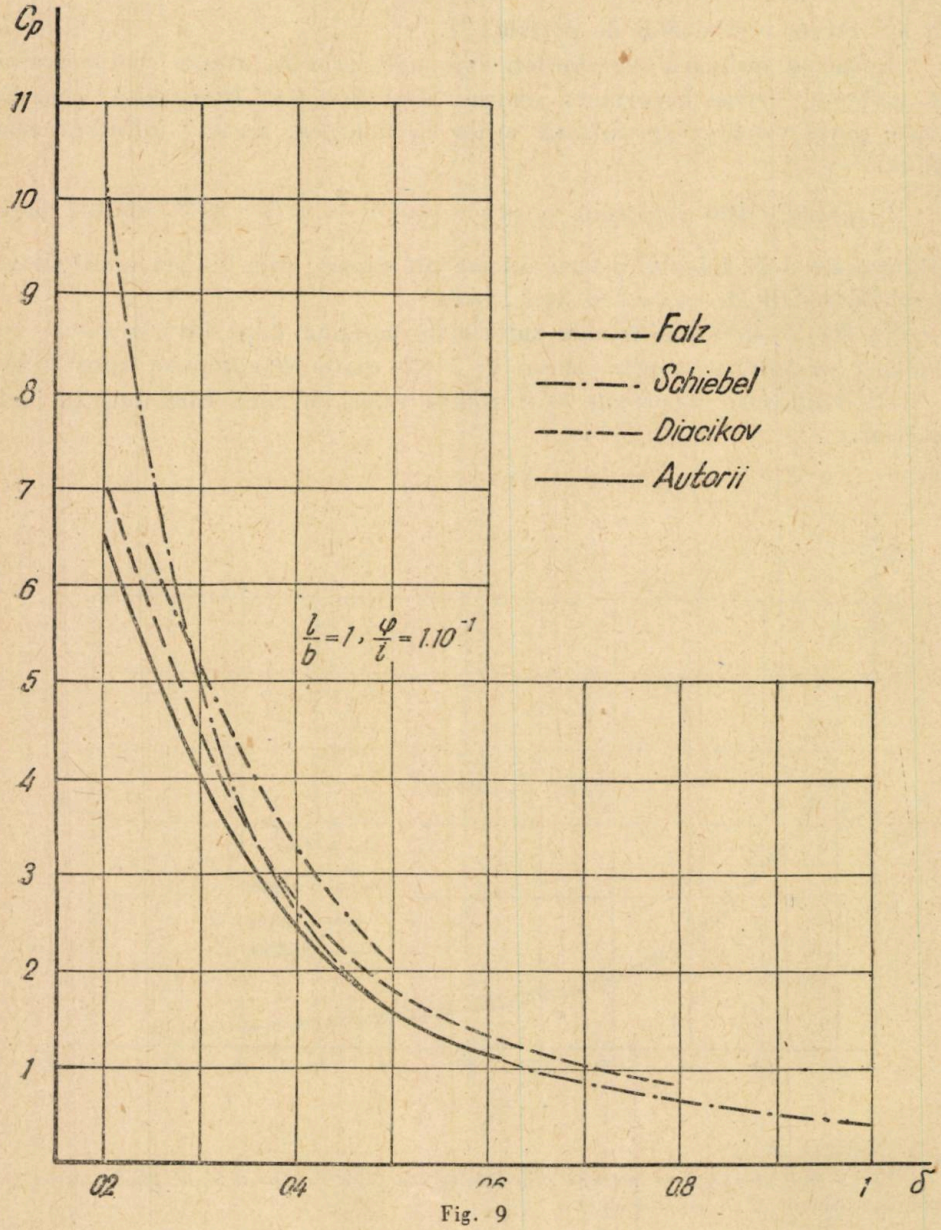


Fig. 9

sau, considerînd ecuația (1)

$$\frac{\mu}{\psi} = \frac{6}{\sqrt{c_p}} \sqrt{\frac{1}{10\pi}\left(\frac{i}{\varphi}\right)\left[1 + a\left(\frac{l}{b}\right)^2\right]\Phi_1 \cdot \Phi_2}$$

$$\frac{\mu}{\psi} = 6\,\frac{\Phi_1\,\Phi_2}{c_p\,\delta_0} \tag{6}$$

În aceste relații Φ_2 este de asemenea funcție de δ_0 avînd expresia :

$$\Phi_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\delta_0} + \frac{\delta_0}{2\,\delta_0 + 1} \cdot \frac{1}{\Phi_1}\right) \tag{7}$$

și variația arătată în fig. 4.

Folosind valorile corespunzătoare, calculate anterior pentru Φ_1, Φ_2, a și c_p, pot fi reprezentate grafic curba ajutătoare $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ și expresia $\frac{\mu}{\psi} = f\left(\frac{l}{b}, \frac{\varphi}{i}, \delta_0\right)$ — (fig, (10) și (11))

Curbele $\frac{\mu}{\psi}$ au o alură asemănătoare celor găsite pentru lagărele radiale. În fig. 11 este dată dependența acestui raport de δ_0, pentru valori uzuale $\frac{l}{b} = 0{,}5 \ldots . 1{,}5$ și $\frac{\varphi}{i} = 1.10^{-1}$, din care pot fi deduse de ase-

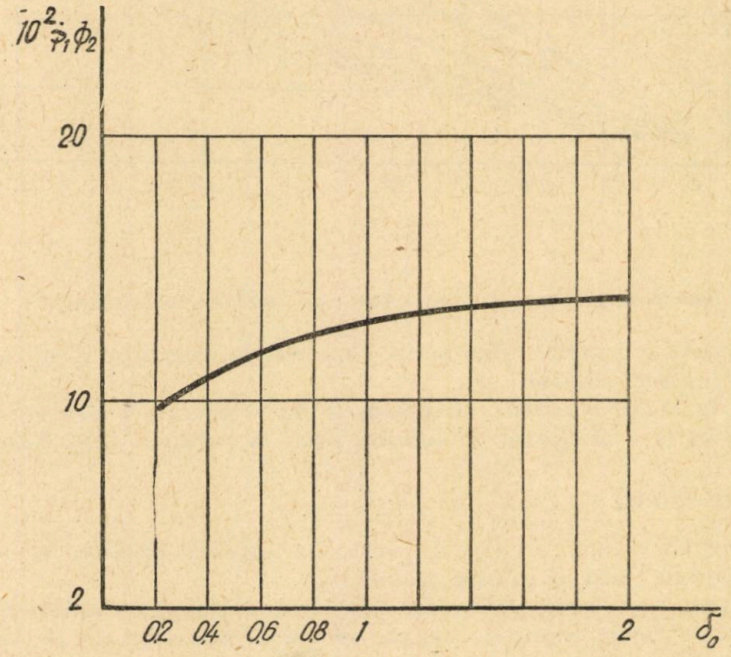


fig. 10

menea valorile valabile pentru oricare alt raport $\frac{\varphi}{i}$. Se menționează că, dată fiind prezența coeficientului de portanță la numitor, conform ecuației (6), pentru un alt raport $\left(\frac{\varphi}{i}\right)$, valorile date de curbe trebuie să fie *împărțite* prin noua valoare a raportului.

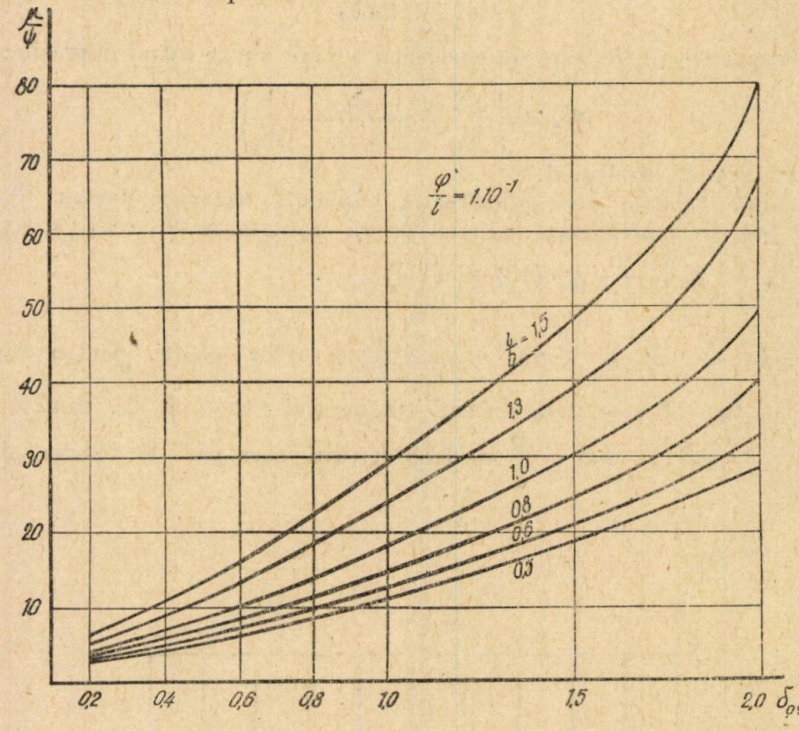


fig. 11

Coeficientul de frecare crește odată cu mărirea raportului $\frac{l}{b}$, deci cu scăderea lățimii b a segmentului pe direcția radială, concluzie identică cu aceea dedusă la lagărele radiale.

Ca și la lagărele radiale, divergențele între rezultatele diferiților autori sînt mai mari la coeficientul de frecare, decît la portanță (fig. 12).

Debitul de ulei

La lagărele axiale principala parte din căldura produsă prin frecare este transportată prin circulația uleiului.

Important este deci să fie evacuată cît mai complet cantitatea de ulei care „*a lucrat*" între suprafețe active, spre a fi înlocuită cu ulei proaspăt, răcit în circuit.

Pentru siguranța exploatării, este recomandabil în orice caz un exces de ulei.

Spre deosebire de lagărul radial, la care uleiul produce în principal răcirea tocmai în zona neîncărcată, la lagărul axial uleiul care nu trece prin

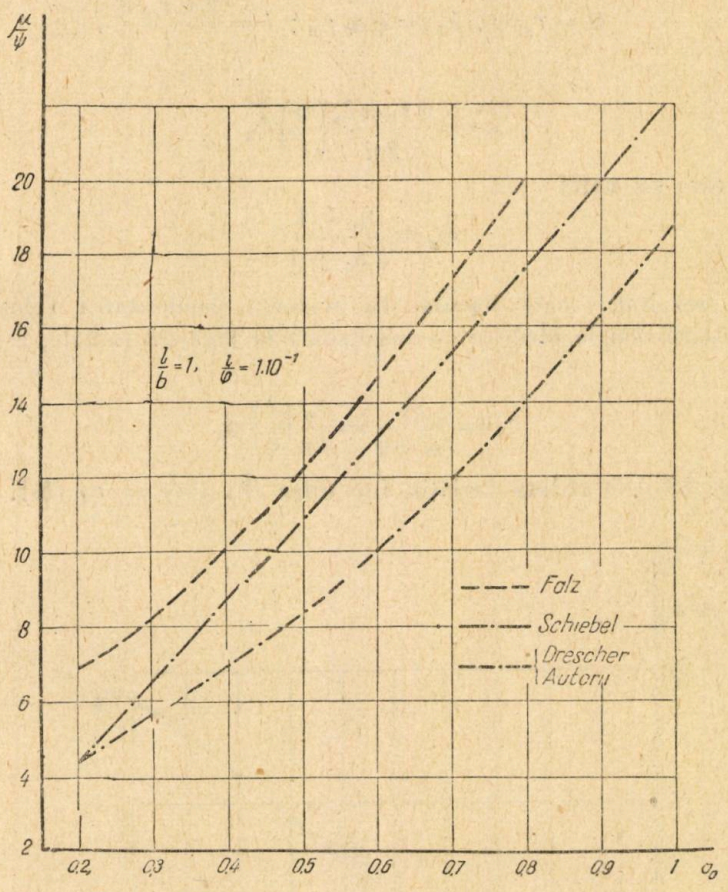


fig. 12

interstițiu nu poate prelua căldură decît în măsură neînsemnată. Această constatare permite să fie luată în considerație pentru calculul transportului de căldură prin ulei, numai cantitatea care circulă prin interstițiu.

Pentru un singur segment, în ipoteza desconsiderării scurgerii laterale, debitul corespunzător de ulei este dat de relația

$$q_1 = b\, u\, h_0 \frac{\delta_0 + 1}{2\,\delta_0 + 1}$$

sau, debitul raportat la 1 cm² de suprafață

$$q_1^* = \frac{q_1}{l\,b} = \frac{u\,h_0}{l} \cdot \frac{\delta_0 + 1}{2\,\delta_0 + 1} \tag{8}$$

Înlocuind :

$$u = r_m\,\omega\,;\; h_0 = \psi\,\delta_0\,r_m\,;\; l = \frac{2\,\pi\,r_m\,\varphi}{i}\,,$$

rezultă

$$q_1^* = \frac{\psi\,r_m\,\omega\,\delta_0}{2\,\pi}\left(\frac{\varphi}{i}\right)\Phi_3 \tag{8 bis}$$

relație în care s-a notat

$$\Phi_3 = \frac{\delta_0 + 1}{2\,\delta_0 + 1} \tag{9}$$

Acest rezultat scoate imediat în evidență posibilitatea folosirii unei expresii adimensionale identice cu cea uzuală la lagărele radiale, coeficientul de debit

$$c_q = \frac{q_1^*}{r_m\,\omega\,\psi} = \frac{\delta_0}{2\,\pi}\left(\frac{i}{\varphi}\right)\Phi_3 \tag{10}$$

In fig. 13 este redată variația funcțiilor $\Phi_3\ (\delta_0)$ și $c_q\ (\delta_0)$.

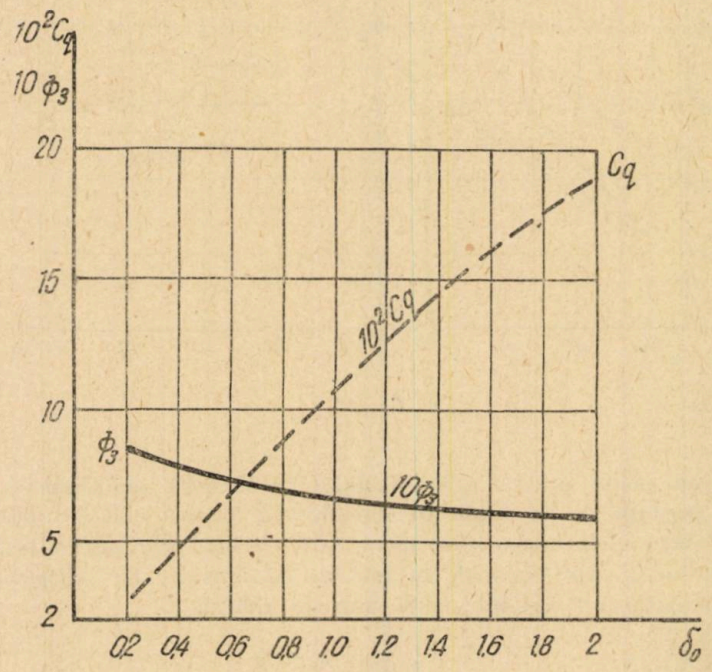


fig. 13

Încălzirea lagărului

În starea de echilibru termic, trebuie să existe egalitate între căldura produsă prin frecare și cea evacuată, ultima fiind suma dintre cantitatea de căldură Q_1, cedată mediului ambiant de suprafața exterioară a lagărului, și cantitatea de căldură Q_2, transportată de uleiul care circulă printre suprafețele active. Pentru lagărul axial, expresia echilibrului termic are forma:

$$A\,\mu\,P\,v_m = Q_1 + Q_2 = \alpha\,S\,(t - t_0) + q_1^*\,l\,b\,i\,c_0\,\gamma\,(t_e - t_i)$$

Cuantumul redus de căldură transportat de uleiul care se scurge în direcție radială este neglijat.

După unele transformări, se găsește expresia adimensională caracteristică încălzirii, similară celei valabile pentru lagărul radial:

$$\theta = \frac{\mu\,v_m}{q_1^*} = \frac{1}{A\,p_m}\left[\frac{\alpha\,S\,(t - t_0)}{q_1^*\,b\,l\,i} + c_0\,\gamma\,(t_e - t_i)\right]$$

$$\theta = \frac{1}{A\,p_m}\left[\frac{\alpha\,K^*}{q_1^*}(t - t_0) + c_0\,\gamma\,(t_e - t_i)\right] \tag{11}$$

în care $K^* = \dfrac{S}{b\,l\,i}$ reprezintă o caracteristică a lagărului, care indică suprafața exterioară a lui raportată la 1 cm² din suprafața portantă a segmenților care îl alcătuiesc.

Se observă că

$$\theta = \theta\left(\frac{b}{l}, \frac{i}{\varphi}, \delta_0\right).$$

Din ecuațiile (10) și (11) se deduce

$$\theta = 2\pi\frac{\mu}{\psi}\left(\frac{\varphi}{i}\right)\frac{2\,\delta_0 + 1}{\delta_0\,(\delta_0 + 1)} = \frac{\mu}{\psi}\cdot\frac{1}{C_q} \tag{12}$$

deci expresiile obținute sînt suficiente pentru reprezentarea grafică a curbelor θ, care servesc drept bază pentru determinarea temperaturii lagărului (fig. 14).

Aci iese în evidență atît influența poziției plăcii, dată prin δ_0, cît și a raportului $\dfrac{l}{b}$.

Toate curbele au un minimum în jurul valorii $\delta_0 \approx 0{,}4$.

Totuși, variația funcției θ de o parte și de cealaltă a zonei δ_0 optim, nu este prea importantă, astfel încît δ_0 poate avea o valoare care să determine simultan o portanță convenabilă, fără a influența prea defaforabil asupra încălzirii.

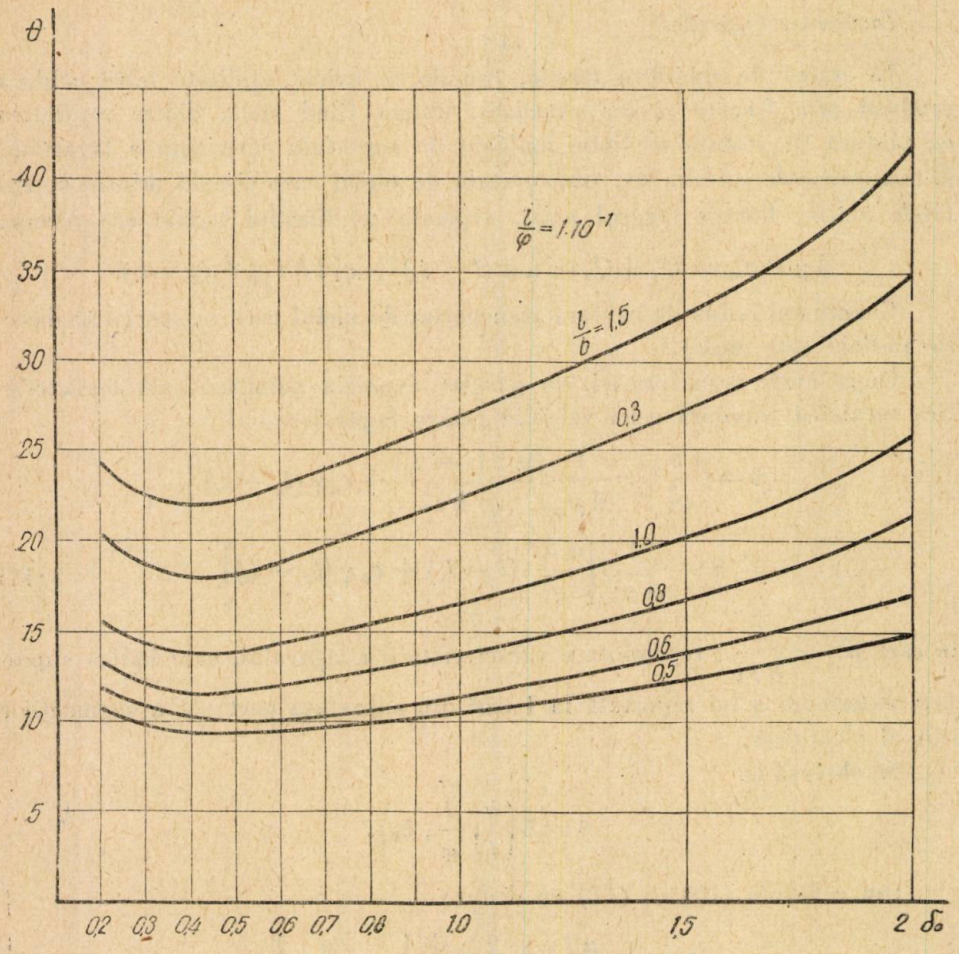


fig. 14

Centrul de presiune

Pentru lagărele axiale cu segmenți oscilanți interesează poziția centrului de presiune : segmentul se așează de la sine astfel încît rezultanta presiunilor hidrodinamice trece prin acest centru.

În ipoteza desconsiderării scurgerii laterale (pe direcție radială) distanța centrului de presiune x' (fig. 15) este dată de relația :

$$x' = \frac{-\frac{x_0 x_1}{x_0 + x_1} ln \frac{x_1}{x_0} + \frac{1}{2}(x_1 - x_0)}{ln \frac{x_1}{x_0} - 2\frac{x_1 - x_0}{x_0 + x_1}} = -\frac{-\frac{x_0}{l}(x_0 + l) ln \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0} + \frac{1}{2}(2x_0 + l)}{(2\delta_0 + 1) ln \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0} - 2} \quad (13)$$

de unde, distanța „relativă"

$$\frac{x'}{l} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \delta_0\right) - \delta_0 (\delta_0 + 1)\, ln \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0}}{(2\delta_0 + 1)\, ln \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0} - 2} \tag{14}$$

Practic, interesează însă distanța centrului de presiune x^*, față de muchia de eșire : $\frac{x^*}{l} = \frac{x'}{l} - \frac{x_0}{l}$, respectiv distanța „relativă"

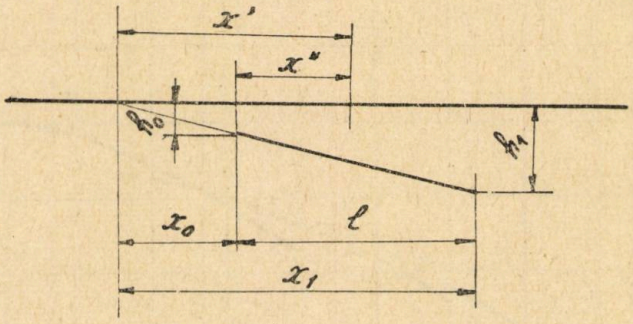


fig. 15

$$\frac{x^*}{l} = \frac{x'}{l} - \delta_0 = \frac{\left(\frac{1}{2} + 3\delta_0\right) - \delta_0 (3\delta_0 + 2)\, ln \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0}}{(2\delta_0 + 1)\, ln \frac{\delta_0 + 1}{\delta_0} - 2} \tag{15}$$

În fig. 16 este reprezentată variația distanței relative $\frac{x^*}{l}$ în funcție de δ_0.

S-a văzut că, pentru lagărul axial, portanța maximă se obține în jurul valorii $\delta_0 \approx 0{,}8$. În acest punct devine

$$\frac{x^*}{l} = 0{,}42$$

Studiile au arătat că variația vîscozității deplasează centrul de presiune spre muchia de intrare. Pe de altă parte, mărirea volumului uleiului din cauza creșterii temperaturii, are ca efect o laminare suplimentară a scurgerii fluidului printre plăci, care contribuie la un mic spor al capacității portante și o ușoară deplasare a centrului de presiune spre muchia de ieșire.

Aceste acțiuni contrarii duc la concluzia că, în realitate, centrul real de presiune rămîne practic apropiat de valoarea indicată mai sus.

În orice caz ecuația (15) dă valori care ajung la suprapunere cu valorile calculate corect după Diacikov, așa cum se constată din diagramele din fig. 18.

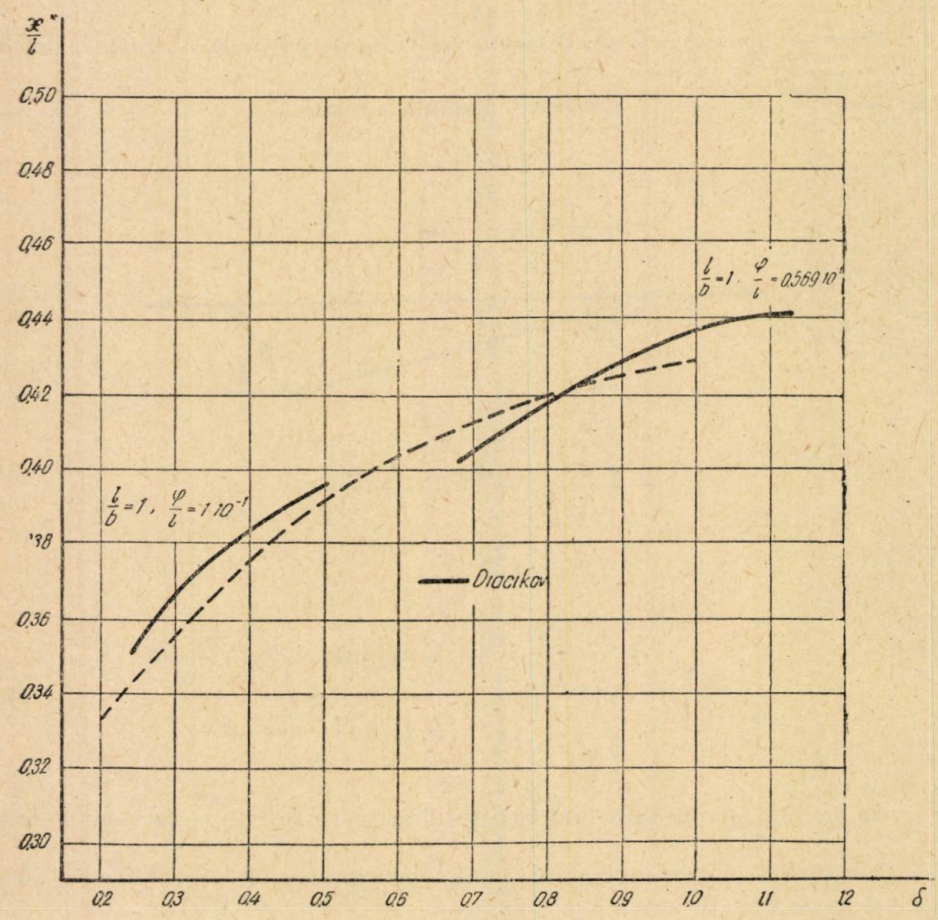


fig. 16

4. *Metoda practică de calcul*

De regulă sînt cunoscute : sarcina P în kg, turația n în rot/min ; eventual condiții de sarcină maximă care poate interveni în exploatare.

Diametrul interior al lagărului poate fi impus de condițiile constructive sau poate fi liber.

Calculul se desfășoară așa cum rezultă din schema de mai jos·
Se alege

$$\frac{l}{b} = K,\ i \text{ și } \left(\frac{\varphi}{i}\right)$$

↓

δ_0 din curbele $\theta\ (\delta_0)$ în zona de încălzire minimă (fig. 14)

↓

$C_p = \dfrac{p_m\ \psi^2}{\eta\ \omega}$ din curbele $C_p\ (\delta_0)$ pentru K, $\left(\dfrac{\varphi}{i}\right)$, δ_0 cunoscute (fig. 7).

Apreciere dacă ne găsim în zonă convenabilă (fig. 5)

↓

d_i *liber*	d_i *impus*
↓	↓
Se alege p_m	$d_i = l\left[\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{i}{\varphi}\right) - \dfrac{1}{K}\right]$
$p_m = \dfrac{P}{\pi\ d_m\ \varphi\ b} = \dfrac{P}{K\ i\ b^2}$	↓
↓	$l\ ;\ b\ ;\ d_m$
$b\ ;\ l\ ;\ d_m = \dfrac{l}{\pi}\left(\dfrac{i}{\varphi}\right)$	↓
	$p_m = \dfrac{P}{l\ b\ i}$

↓

$\omega = \dfrac{\pi\ n}{30}$; η pentru temperatura ipotetică

↓

ψ din C_p cunoscut

↓

$t = \psi \cdot r_m$; $h_0 = \delta_0\ t$; verificare $h_0 < h_{0\ adm}$.

↓

C_q pentru δ_0 cunoscut, din curbele fig. 13

↓

q_1^* din ecuația (10),

↓

θ din curbele fig. 14 pentru δ_0 definitiv

↓

t din ecuația (11)

Ca valori de orientare se indică (5) :

$\dfrac{l}{b} = 0{,}7 \ldots 1{,}5$. Valorile mai mari sînt recomandabile pentru turații joase ; valorile mici își au locul cînd este necesar un flux activ de ulei printre suprafețele active, în vederea menținerii temperaturii în limitele acceptabile ;

$\delta_0 = 0{,}5 \ldots 1{,}2$ în funcție de posibilitățile de realizare a pantei. Valoarea 0,8, cea mai favorabilă din punctul de vedere al portanței, poate fi obținută la lagărele cu segmenți mobili, prin justa poziție a punctului de oscilație.

$$h_{0\,adm} > 0.5 \cdot 10^{-4} d_m \text{ după Niemann}$$

$$h_{0\,adm} = \left(1 + \frac{d_m}{400 \text{ mm}}\right) \cdot (5\,\mu \ldots\ldots 15\,\mu) \text{ după Drescher}$$

$i = 4 \ldots 16$

$\varphi = 0{,}6 \ldots 0{,}9$

$p_m = 25 \ldots 50$ kgf/cm² uzual (pînă la 500 . . . 700 kgf/cm² la încercări în laborator).

Sînt necesare valori pentru $K^* = \frac{S}{l\,b\,i}$ care urmează a fi determinate experimental.

Suprafața exterioară a lagărelor axiale moderne poate fi considerată apropiată de cea a lagărelor radiale.

Catedra de Organe de Mașini și Mecanisme

BILBIOGRAFIE

1. *A. G. M. Michell*: The Lubdification of plane Surfaces Zeitschrifft für Mathematik und Plysik 52, 1905, p. 123.
2. *A. G. M. Michell*: Viscuosité et lubrification, Ed. Gauthier — Villars et Cie 1927.
3. *A. Falz:* Grundzüge de Schmiertechnik, Springer — Berlin 1931.
4. *A. Schiebel und K. Körner:* Die Gleitlager — Springer Berlin 1933.
5. *H. Drescher:* Zur Berechnung von Axial — Gleitlager mit hydrodinamischer Schmierung. Konstruktion 8 (1956) H. 3 p. 94.
6. *А. К. Дьячков* Расчет несущей способности масляного слоя, трения и координат центра давления упорных подушек подпятинкя, имеющих криволинейный контур.
Развитие гидродинмической теории смазки применительно к урорным подшипникам скольжения академия наук ссср 1959 p. 5.
7. *Д. П. Паргин.* Метод расчета деформаций подушки подпятника развитие гидродинамической теории смазки примеительно к чпорным подшипникам скольжения — академия наук ссср 1959.
8. *N. Tipei:* Hidro-aerodinamica lubrificației, Ed. Academiei R.P.R. 1957.
9. *G. Manea și Colab.:* Organe de mașini, Vol. I, Ed. Tehnică 1956.
10. *G. Manea, R. Mustafa, M. Aldea:* Asupra calculului lagărelor radiale cu alunecare, unse cu lichide, pe baza teoriei hidrodinamice, Met. și Constr. de Mașini nr. 8/1956 p. 5.

ВКЛАД В РАСЧЕТЕ УПОРНЫЕ ПОДШИПНИКИ

(Резюме)

Теоретические и экспериментальные иссле ования, проведенные до сих пор, поэволили широко осветить специфические явления упорных подшипников. При этом, они позволили разработать практические методы расчёта при помощи некоторых безразмерных формул, включающих минимальную толщину масляной плёнки или приводящих к необходимости предварительно установить эту величину.

В ноетоящей рассматриваются несколько из вежнейших методов, и применемием соответсрвующих параметров выводятся безразмерные выражения аналогичные с выражениями, действительными для радитльных подшипников·

Графическое изображение коэффициентов подяёмной силы расхода масла и нагрева связано с сонтветствующим методом расчёта

CONTRIBUTION TO THE CALCULATION OF THE AXIAL BEARINGS

(Summary)

The theoretical und experimental studies made until nom have brought out an ample clarification of the axial bearings specific phenomena. In the same time they have of calculation bf means of some dimensionless expressions, which include the minimum thickness h_0, of the oil film, or make necessarf its choice at first.

In this article are analyzed some of the main methods, and using convenient parameters, are established dimensionless expressions similar to those valid for the redial bearings.

ohe graphic representation of the coefficients of the portance, of the oil debit, and of the heat development, is related to a corresponding practical method of calculation.

CONTRIBUTION AU CALCUL DES PALIERS AXIAUX

(Résumé)

Les recherches théoriques et experimentelles entreprises par plusieurs auteurs leur ont permis d'approfondir la connaissance des phénomènes spécifiques aux paliers axiaux. en même temps elles les ont menés a la déduction de méthodes partiques de calcul, en introduisant des expressions sans dimensions, qui contiennent l'épaisseur minima h_0 de la pélicule portante de lubrifiant, mais qui obligent le plus souvent à une aproximation initiale de cette valeur.

Dans le présent travail, les auteurs se sont proposéd d'efecteur une analyse comparative de quelques méthodes principales et, en faisant emploi de parametres adéquats, de déduire des expressions charactéristiques à peu prls identiques à celles valables pour les paliers transversaux.

La représentation graphique de la variation des coefficients de portance, de débit et de développement de la chaleur a fourni la base théorique pour l'éelaboration d'une méthode pratique de calcul des dimensions des paliers axiaux.

BEITRAG ZU BERECHNUNG DER AXIALGLEITLAGER

(Zusammenfassung)

Die bisheringen theoretischen und experimtellen Untersuchungen haben zur thefschürfenden Erflärung der für die Axiallager characteristischen Prozesse geführt. Gleichzeitig haben sie die Entwicklung praktischer Berechnungsmethoden ermölicht, unter zur Hilfenahme von dimensionslosen Ausdrücken, die die kleinste Schmierschichttärke h_0 enthalten oder deren Wahl in voraus bedingen.

In der vorliegenden Arbeit werden einige der wichtigsten Methoden untersucht und, unter Benutzung zweckentspechenden Parameter, dimensionslose Ausdrücke eingeführt, ähnich denen die für die Querlager gelten.

Die graphische Darstellung der Kennzahlen für Tragfähigkeit, Oelmenge und Wärmeentwicklung, in dieser neuen Form, mird mit einer passenden praktischen Berechnungsmethode in Zusammenhang gebracht.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola II

STUDIUL EXPERIMENTAL ȘI PROIECTAREA UNUI VARIATOR HIDRAULIC *)

OPREAN AUREL

Studiul de față face obiectul unui contract de colaborare tehnico-științifică între Catedra de Mașini-Unelte a Facultății de Mecanică din I.P.B. și Institutul de Cercetări Chimice (ICECHIM).

Este cunoscut din documentele de partid și de stat amploarea deosebită pe care o ia dezvoltarea industriei chimice din țara noastră, atît de necesară tuturor ramurilor industriale, agriculturii și producției bunurilor de consum.

În cadrul gamei variate de produse ale industriei chimice, un loc de frunte îl ocupă masele plastice și rășinile sintetice folosite cu mult succes în ultima vreme în industria constructoare de mașini, în construcții, și la fabricarea bunurilor de larg consum. Producția acestor materiale va ajunge în 1965 la peste 95.000 tone. Din aceste produse macromoleculare menționăm policlorura de vinil, polistirenul, polietilena, acetatul de vinil etc.

Tema de mai sus se referă tocmai la elaborarea unui procedeu de obținere a acestor polimeri cu ajutorul unor reactori cu sateliți (fig. 1). Procesul de polimerizare impune ca turația agitatorului din reactor să fie variabilă, de aceea se pune problema asigurării unei variații continui de turații în domeniul 20—80 rot/min.

Avînd în vedere că mecanismul de antrenare a agitatorului trebuie să fie cît se poate mai simplu, compact, ieftin și ușor de executat în condiții modeste de laborator, că trebuie să permită o comandă ușoară și să prezinte garanția de securitate împotriva eventualelor explozii, s-a stabilit că un variator hidraulic corespunde cel mai bine acestor scopuri.

Variatorul mecanic continuu cu fricțiune este mai complicat, are alunecări și uzură mare și are o comandă greoaie.

Variatorul electric, care are o comandă ușoară și se pretează ușor automatizării, necesită de asemenea instalație de redresare a curentului alternativ (generator-motor sau alt sistem) deci scumpește costul, mărește gabaritul și ceea ce este mai important nu prezintă garanția împotriva exploziei din cauza posibilității apariției unui scurtcircuit sau scîntei electrice.

*) Comunicare prezentată la a VI-a sesiune științifică a cadrelor didactice din IPB, 17—18 decembrie 1960.

Variatorul hidraulic este simplu din punct de vedere constructiv și este format din două elemente principale : pompa hidraulică și motor hidraulic. Problema dificilă constă însă în faptul că la noi în țară nu se fabrică deo-

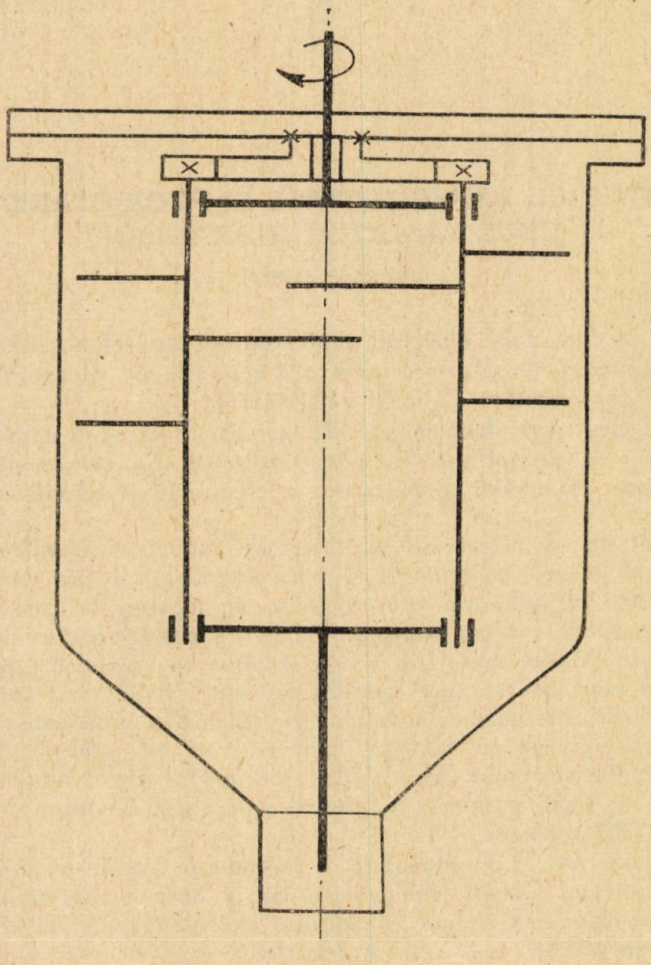


Fig. 1

camdată în serie pompe cu debit variabil (cu palete sau pistoane) care intră în componența variatorului hidraulic, deci nu pot fi procurate din comerț, iar construirea lor expresă pentru acest variator este dificilă.

În această situație s-a căutat o altă soluție de rezolvare a problemei prin folosirea pompelor de fabricație romînească cu roți dințate FS—PR1 (fig. 2). La acest variator cu pompe cu roți dințate, în care ca motor hidraulic se folosește tot o pompă cu roți dințate, variația turației se face cu ajutorul variației debitului trimis în motor, prin intermediul unui drosel.

Această instalație hidraulică, simplă, folosită pentru prima oară ca variator hidraulic, după cîte sîntem noi informați, corespunde cerințelor de mai sus, cum se va vedea în cele ce urmează.

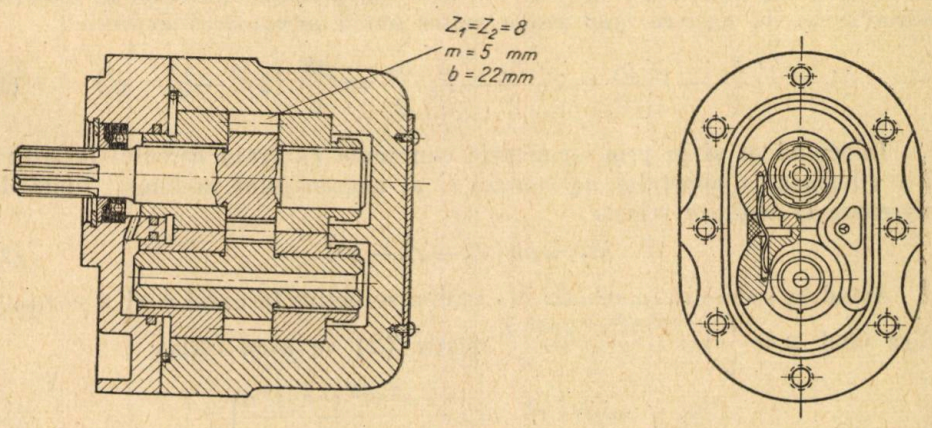


Fig. 2

Se constată că introducînd ulei sub presiune în camera de aspirație a pompei cu roți dințate (fig. 3), acesta acționînd asupra conturului complex al danturii dă naștere unui cuplu motor M în sensul săgeților ω_1 și ω_2.

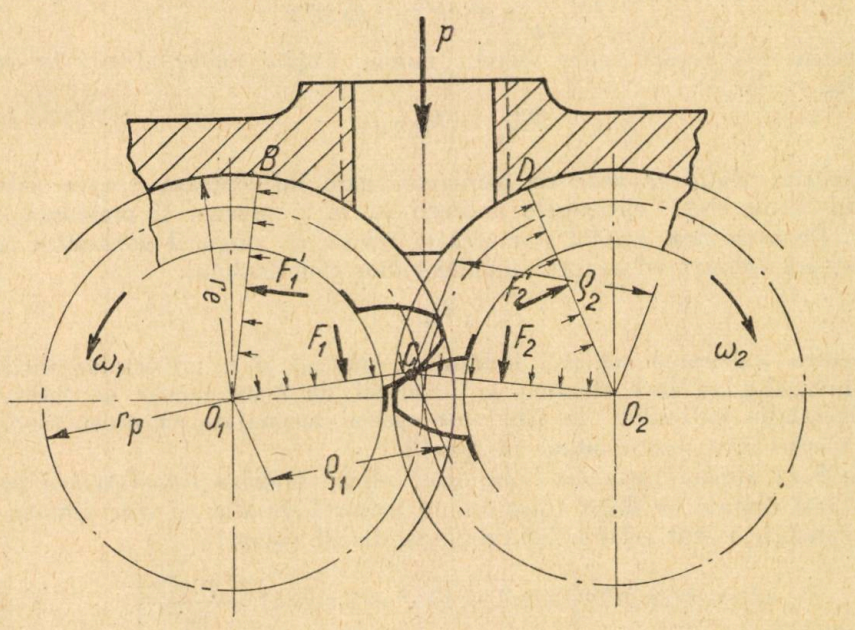


Fig. 3

Aplicînd teorema cunoscută din mecanică, că rezultanta proiecțiilor forțelor de presiune pe o suprafață oarecare, este egală cu presiunea de înmulțită cu proecția acestei suprafețe pe un plan perpendicular pe această rezultantă, se poate demonstra că jetul de ulei sub presiune introdus în motorul hidraulic va da naștere unui cuplu motor avînd următoarea expresie :

$$M_t = F_1' \frac{r_e}{2} - F_1 \frac{\varrho_1}{2} + F_2' \frac{r_e}{2} - F_2 \frac{\varrho_2}{2} = \frac{pb}{2} \left(2 r_e^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2\right) \qquad (1)$$

Înlocuind ϱ_1 și ϱ_2 prin elementele cunoscute r_p (raza cercului primitiv) și x (deplasarea punctului de contact C al angrenajului în lungul liniei de angrenare l) obținem relația :

$$M_t = pb \left(r_e^2 - r_p^2 - x^2\right) \qquad (2)$$

Avînd în vedere că momentul M_t minim se obține în cazul cînd $x = x_{max}$, adică cînd $x = \frac{l}{2} = \frac{\pi^2 m^2 \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}{2}$ relația (2) va avea forma

$$M_{t_{min}} = pb \left(r_e^2 - r_p^2 - \frac{\pi^2 m^2 \varepsilon^2 \cos^2 \alpha}{4} \right) \qquad (3)$$

sau înlocuind $r_e = \frac{m(z+2)}{2}$; $r_p = \frac{mz}{2}$ și introducînd o oarecare aproximație provenită din rotunjirea rezultatului și neglijarea corijării danturii obținem :

$$M_{t_{min}} \cong pbm^2 z \cong p\lambda m^3 z \qquad (4)$$

Acesta este cuplul motor teoretic minim. Cuplul motor efectiv la axul de ieșire va fi :

$$M_{t_e} = M_t \eta_M \qquad (5)$$

Din această relație se vede că parametrii care influențează asupra valorii cuplului motor sînt : elementele danturii m, b, z, precum și presiunea din sistem. De asemenea, rezultă din această relație că singurul parametru care influențează substanțial asupra cuplului motor este modulul.

* * *

Pentru elaborarea schemei hidraulice, precum și a proiectului variatorului hidraulic au fost efectuat în prealabil un mare număr de încercări la o instalație hidraulică de laborator special amenajată în acest scop, a cărei schemă este reprezentată în fig. 4.

La baza acestei instalații hidraulice, adică la baza transformării pompei cu roți dințate cu debit constant, în motor hidraulic cu roți dințate cu debit variabil, a stat relația debitului teoretic al pompei :

$$Qt = 2\pi\lambda m^3 n \left[z + 1 - (3\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 4) \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha}{12} \right] \qquad (6)$$

în care ε este gradul de acoperire.

Întrucît motorul hidraulic este identic ca elemente constructive cu pompa putem scrie că $Q_p = Q_M$, în cazul că întreg debitul pompei trece prin motor, iar notînd debitul specific al motorului (debitul care trece prin motor la o

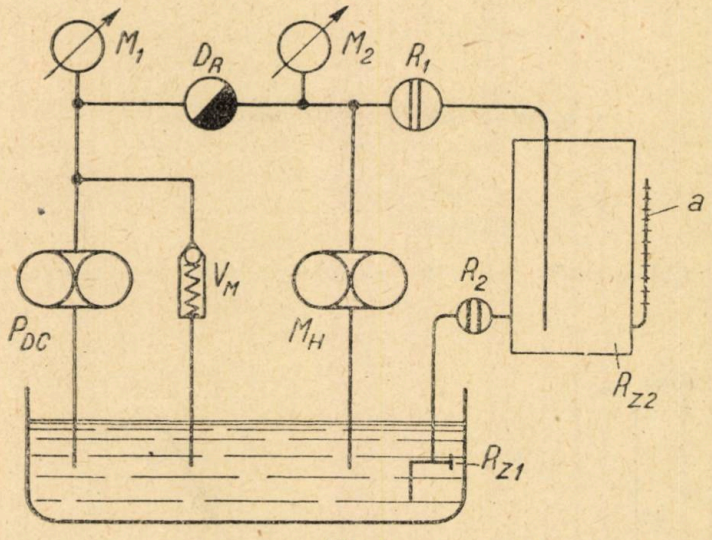


Fig. 4

rotație cu q putem determina numărul de rotați a motorului hidraulic astfel:

$$n_{M_H} = \frac{Q_p}{q_M} \tag{7}$$

unde

$$q_M = 2\pi\lambda m^3 \left[z + 1 - (3\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 4) \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha}{12} \right]$$

Din relația (7) se vede că pentru a obține turații variabile la motorul hidraulic, este necesar să variem fie debitul specific al motorului, fie debitul refulat de pompă. Este evident că debitul specific al motorului fiind constant, rămîne singura posibilitate de a varia debitul de lichid trimis de pompă în motor. Acest lucru se face cu ajutorul droselului D_R.

Variatorul hidraulic experimental a cărui schemă este reprezentată în fig. 4 este compusă dintr-o pompă cu roți dințate P_{DC} care refulează ulei în motorul hidraulic M_H prin droselul D_R. Rezervorul Rz_2 și robinetele R_1 și R_2 folosesc pentru determinarea debitului real al pompei la diverse presiuni, adică în speță, pentru determinarea randamentului volumetric η_v. Droselul D_R mai folosește și pentru încărcarea pompei cu diferite presiuni în scopul determinării randamentului volumetric.

Prima serie de experiență s-a referit la determinarea debitului real trimis în motorul hidraulic și prin urmare a randamentului volumetric. Acest

lucru s-a realizat prin măsurarea timpului în care se umple cu un volum oarecare V_0 rezervorului R_z la o anumită presiune. Apoi s-a determinat debitul real, randamentul volumetric și puterea motorului hidraulic cu relațiile

$$Q_r = \frac{V_0}{t_i} \tag{8}$$

$$\eta_v = \frac{Q_r}{Q_t} = \frac{Q_t - \Delta Q}{Q_t} = 1 - \frac{\Delta Q}{Q_t} \tag{9}$$

$$P_{MH} = \frac{M_t . n}{975\,000} (Kw) \tag{10}$$

Rezultatul acestei serii de experiențe este reprezentat în graficul din fig. 5.

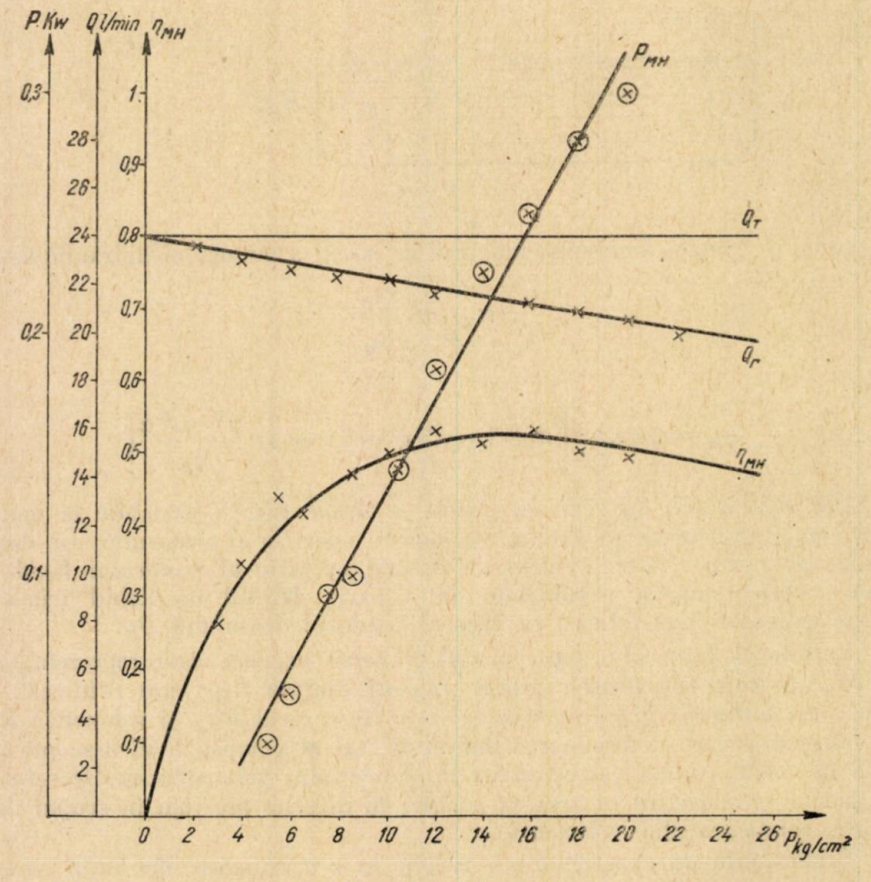


Fig. 5

A doua serie de experiențe a constat în determinarea randamentului total al motorului hidraulic. Întrucît puterea efectivă introdusă în motor a fost determinată pe cale experimentală, pentru a determina randamentul motorului hidraulic era necesară încă determinarea puterii la axul de ieșire al motorului. Această putere a fost determinată cu frîna Prony.

Cunoscînd puterea efectivă la axul motorului hidraulic precum și puterea la intrare în motor se poate ușor determina randamentul total al motorului hidraulic cu relația :

$$\eta_{M_H} = \frac{P_{e_{MH}}}{P_{i_{MH}}} = \frac{Gln_{MH}}{975\,000} \cdot \frac{612}{Q_r \cdot p} = \frac{612}{975\,000} \cdot 300 \frac{Gn_{MH}}{Q_r \cdot p} = 0{,}19 \frac{Gn_{M_H}}{Q_r p} \quad (11)$$

în care : G este greutatea de încercare în kg ;
l — lungimea de pîrghie ($l = 300$ mm) ;
Q_r — debitul real care intră în motorul hidraulic în l/min (determinat cu ajutorul rezervorului R_{z2})
n_{M_H} — numărul de rotații al motorului hidraulic (măsurat cu ajutorul tahometrului) ;
p — presiunea reală, în kg/cm² a jetului de ulei care intră în motorul hidraulic (citit pe manometrul M_2).

Rezultatul măsurării și determinării randamentului motorului hidraulic este de asemenea trecut în graficul din (fig. 5).

Din graficul (fig. 5) se vede că randamentul maxim al motorului hidraulic experimentat este în jurul presiunii de 15 kg/cm². La această presiune debitul real care intră în motorul hidraulic Q_r=21,4 ; deci randamentul volumetric al pompei corespunzător acestei presiuni :

$$\eta_v = \frac{Q_r}{Q_t} = \frac{21{,}4}{24} = 0{,}89$$

Se constată de asemenea creșterea proporțională a puterii motorului hidraulic cu presiunea.

O altă problemă importantă a variatoarelor hidraulice este „căderea relativă a turațiilor" sau cum se numește în electrotehnică „alunecarea relativă".

Această alunecare notată prin S se calculează cu relația

$$S = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = 1 - \frac{n_2}{n_1} \quad (12)$$

în care : n_1 este turația de mers în gol a motorului hidraulic ;
n_2 — turația motorului hidraulic sub sarcină.

Întrucît turațiile motorului hidraulic sînt determinate de debitul de ulei ce trece prin acest motor, putem calcula randamentul volumetric al motorului cu ajutorul acestei alunecări cu relația ;

$$\eta_{V_{M_H}} = 1 - S = 1 - 1 + \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (13)$$

Randamentul volumetric calculat cu expresia de mai sus corespunde realității în cazul cînd variatorul este antrenat de un motor electric cu caracteristică rigidă (motor electric de curent continuu). În cazul de față a fost folosit un motor electric asincron, care are caracteristica elastică la care numărul de rotații variază sensibil cu variația sarcinii, așa încît relația de mai sus trebuie corectată în mod corespunzător. În acest caz alunecarea se va calcula cu expresia :

$$S_0 = \frac{n_1 - n_2}{n_1} - \frac{n_1' - n_2'}{n_2'} = 2 - \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1'}{n_2'}\right) \tag{14}$$

în care : n_1' — turația de mers în gol a pompei ;
n_2' — turația sub sarcină a pompei.

Din graficul din fig. 6 se vede că motorul hidraulic cu roți dințate are o stabilitate la variația sarcinii suficient de bună apropiată de cea a motorului

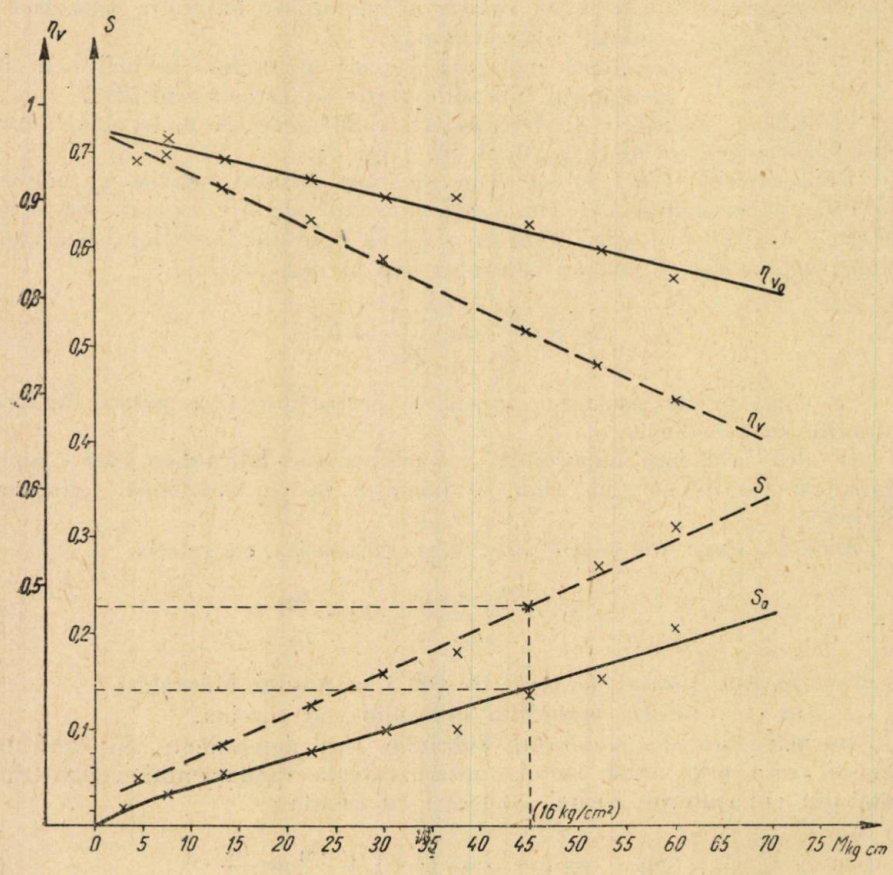


Fig. 6

electric. Menționăm totuși că această cădere mare de turații, la motorul electric este anormală datorită puterii mici, insuficiente a acestuia.

Comparînd randamentul volumetric al motorului, de exemplu la o presiune de 15 kg/cm², cu randamentul total al motorului, se constată o diferență foarte mare între acestea în sensul că randamentul total este mult sub nivelul randamentului volumetric. Acest lucru se explică prin pierderile mecanice mari în cazul motoarelor hidraulice cu roți dințate. (La o presiune de 15 kg/cm² $\eta_v = 0{,}9$, iar $\eta_{tot} = 0{,}5$).

Această frecare se datorește presării unilaterale a celor două roți pe carcasa exterioară de către jetul de ulei care intră cu presiune maximă de lucru în motorul hidraulic. Prin echilibrarea acestei presiuni cu ajutorul unor canale speciale, precum și prin unele mici modificări în construcția corpului pompei se poate obține o creștere sensibilă a randamentului mecanic.

Referindu-ne la domeniul de reglare al turațiilor, ținem să menționăm două aspecte :

În primul rînd că la instalația experimentală din laboratorul nostrul am obținut un domeniu de reglare între $n_{max} = 800$ rot/min și $n_{min} = 150$ rot/min, adică $R_n = \frac{800}{150} \cong 5{,}5$. limita inferioară poate fi dusă chiar și pînă la 100, astfel încît se obține un domeniu de reglare de $R_n = 8$, însă staiblitatea turației este slabă la $n_{min} = 100$ rot/min.

Pentru mărirea domeniului de reglare există posibilități largi, prin folosirea unei pompe cu debit mai mare decît al motorului hidraulic. Astfel folosindu-se o pompă cu un debit $Q = 53$ l/min se obține o turație $n_{max} = 1\,650$ rot/min iar $n_{min} = 150$. Deci domeniul de reglare $R_n = \frac{1\,650}{150} = 11$; sau mergînd pînă la $n_{min} = 100$, se obține $R = 16{,}5$.

În al doilea rînd cu cît debitul este mai mare, cum de altfel se poate vedea din relația 9, cu atît și randamentul volumetric este mai ridicat.

Astfel în cazul cînd s-a lucrat cu debit mai mare $Q = 53$ l/min deci cu un număr de rotații mare, randamentul η_v la mers în gol a motorului hidraulic era de 0,99 ; în timp ce la un debit de $Q = 24$ l/min, $\eta_v = 0{,}9$. În afară de aceasta staiblitatea vitezei este mai bună la turații mari. Pentru îmbunătățirea randamentului total al variatorului se prevede în viitor înlocuirea deoselui prin variația directă a debitului pompei sau motorului cu roți dințate prin deplasarea axială a unei roți, deci prin variația lățimii roții.

* * *

Pe baza rezultatelor și concluziilor obținute experimental s-a trecut la elaborarea proiectului tehnic al variatorului hidraulic. În fig. 7 este prezentată schema hidraulică a acestui variator. Schema instalației este compusă din două pompe cu roți dințate FS — PR1, în care una din pompe este folosită ca motor hidraulic, droserul D_R, valva maximală V_M, precum și două perechi de roți dințate z_1, z_2, z_3, z_4, necesare pentru reducerea turațiilor la axul reactorului de la valorile 1 000—250 la 80—20 (Raportul de transmitere al celor două perechi de roți este 12 : 5. Schemele mai conțin

de asemenea aparatajul hidraulic auxiliar: filtru, robinet, conducte, rezervor etc.

Avînd în vedere că cele două pompe se vor procura din comerț, rămîne ca să se determine puterea și turația motorului electric de antrenare a pompei și apoi să se proiecteze celelalte elemente ale instalației.

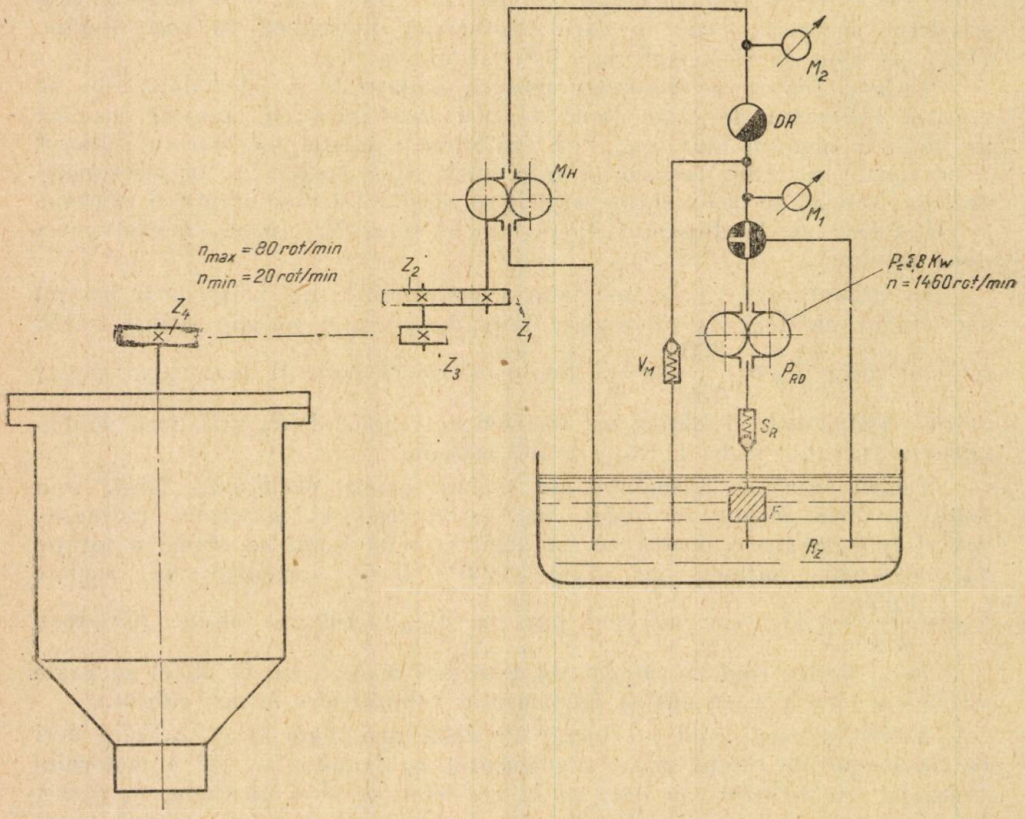


Fig. 7

a) *Determinarea puterii și turației motorului electric de antrenare a pompei*

Din considerentul obținerii unei stabilități dinamice mai bune a turațiilor, precum și a obținerii unui randament mai ridicat s-a ales, în cadrul domeniului de reglare necesar $R_n = 4$, o gamă de turații a motorului hidraulic cuprinsă între $n_{max} = 1\,000$ rot/min și $n_{min} = 250$ rot/min.

Debitul maxim al pompei în acest caz trebuie determinat pentru a obține turația $n_{max} = 1\,000$ rot/min la motorul hidraulic. Din cauza pierderilor de debit în sarcina turației pompei trebuie să fie mai mare, astfel

$$n_p = \frac{n_{M_H}}{\eta_v} = \frac{1\,000}{0{,}7} = 1\,430 \text{ rot/min.}$$

Alegem turația pompei, deci și a motorului electric

$$n_{ME} = 1\,460 \text{ rot/min}$$

$$Q_p \cong 10^{-6} \cdot 2\pi b m^3 z n = 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3{,}14 . 22 . 5{,}5^2 \cdot 8 \cdot 1.460 = 49 \text{ l/min}$$

$$Q_p \cong 49 \text{ l/min}$$

Puterea necesară antrenării agitatorului $P = 0{,}3$ Kw ; pentru mai multă siguranță luăm $P = 0{,}4$ Kw.

Stabilind ca randament total al instalației

$\eta_t = \eta_p \cdot \eta_{C+DR} \cdot \eta_{M_H} \cdot \eta_{rd} = 0{,}60 \cdot 0{,}850{,}50 \cdot 0{,}95 \cong 0{,}25$; obținem o putere pentru motorul electric

$$P_{ME} = \frac{P}{\eta_t} = \frac{0{,}4}{0{,}25} = 1{,}6 \text{ Kw}$$

b) *Determinarea presiuni de lucru din sistem*

Din experiențele efectuate rezultă că presiunea optimă de lucru din sistem este $p = 15$ kg/cm² la care avem un randament maxim al motorului hidraulic.

De asemenea, s-a constatat că pierderile de presiune în conducte, supape, coturi, etc. nu depășesc 5 kg/cm².

Verificăm dacă puterea motorului electric este suficientă pentru presiunea și debitul dat :

$$P_{ME} = \frac{p \cdot Q}{612} = \frac{20.49}{612} = 1{,}6 \text{ KW}$$

Avînd în vedere posibilitatea de a lucra cu presiuni mai mari de 15 kg/cm² precum și cu debite mai mari prin cuplarea a două pompe — alegem puterea motorului electric $P = 2{,}8$ Kw.

c) *Calclul droselului*

Droselul se folosește pentru variația debitului trimis în motorul hidraulic, în scopul obținerii domeniului de reglare continuă a turațiilor între limitele stabilite anterior.

În fig. 8 este prezentat desenul de ansamblu al acestui drosel, care este compus din următoarele piese : corpul 1, capacul din față 2, capacul din spate 3, axul central 4, cadranul 5, garnitura 6, scala 7, piulița 8.

Uleiul se introduce în drosel prin una din găurile 9 sau 10, și trecînd prin gaura centrală, fanta 11 și gaura 12 ajunge în motorul hidraulic.

În funcție de poziția unghiulară a fantei 11 a droselului față de orificiul 9—10, realizată prin maneta droselului 13, secțiunea de trecere a fantei se modifică, ceea ce face ca debitul droselului să crească sau să scadă.

La reglarea droselului piulița 8 este desfăcută, pentru rotirea liberă a axului central 4.

Reglarea și fixarea secțiunii droselului corespunzătoare debitului necesar al droselului se realizează cu piulița 8, care se presează pe cadranul 5. Pozițiile extreme de închis, sau deschis la maximum se fixează cu ajutorul știftului 14 și a canalului executat în cadranul 5.

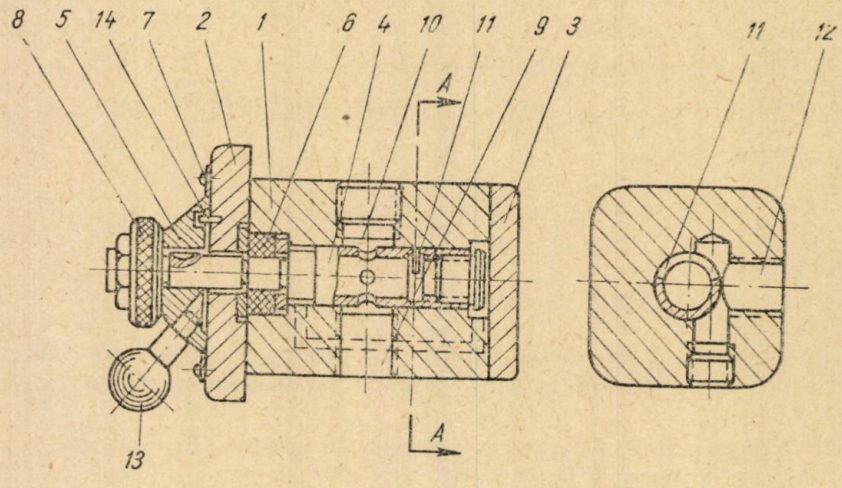


Fig. 8

Unele dimensiuni de gabarit mai importante ale droselului sînt date în fig. 9.

Determinarea secțiunilor fantei constă în determinarea secțiunii minime și maxime pentru obținerea debitelor necesare domeniului de reglare al turațiilor.

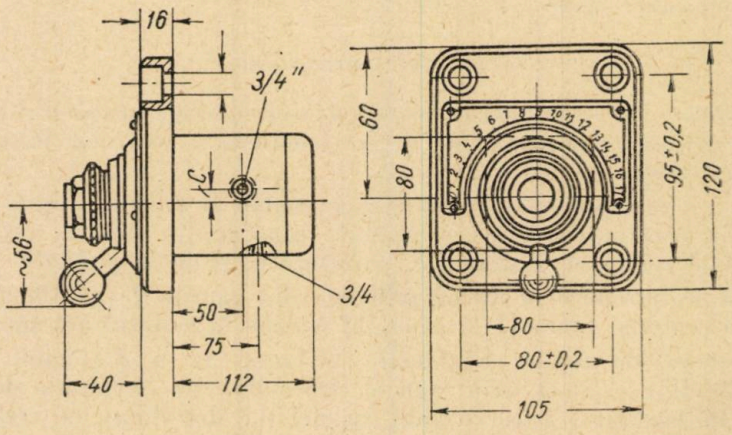


Fig. 9

$$Q_{dr\cdot max} = K\alpha S_{max}\sqrt{\Delta p}\ ; \quad \Delta p \cong 2\ \text{kg/cm}^2$$
$$K = 0{,}885$$

$$S_{max} = \frac{Q_{dr\cdot max}}{K\alpha\sqrt{2}} = \qquad \alpha = 0{,}65$$

$$= \frac{49}{0{,}885\cdot 0{,}65\sqrt{2}} \cong 60\ \text{mm}^2$$

Alegînd diametrul exterior al axului central al droselului 30 mm și unghiul $\alpha_1 = 150°$, rămîne să determinăm lungimea arcului de cerc l și lățimea fantei a conform fig. 10.

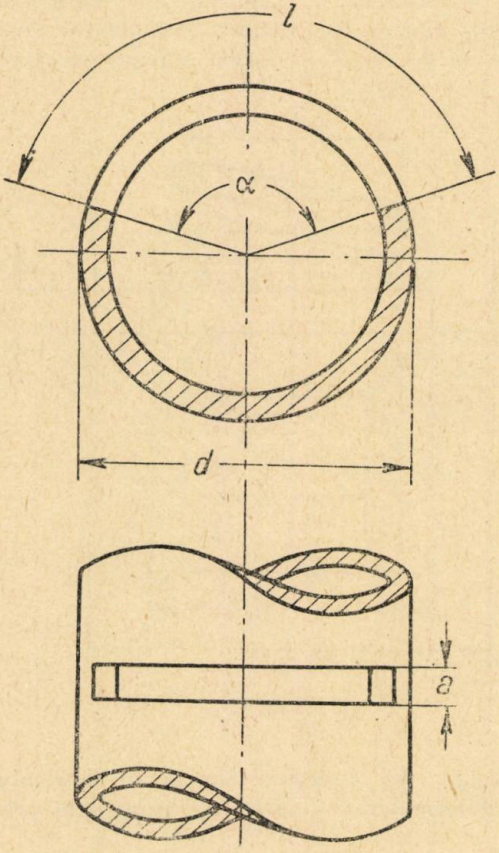


Fig. 10

$$l = \frac{\alpha_1}{360}\pi d = \frac{150^0}{360^0}\cdot 3{,}14\cdot 30 = 39\ \text{mm}.$$

$$a = \frac{S_{max}}{l} = \frac{60}{39} = 1{,}65 \text{ mm}$$

Alegem în final lățimea fantei : $\dfrac{a = 2 \text{ mm}}{l = 30 \text{ mm}}$

Secțiunea minimă S_{min} se va determina la etalonarea droselului prin închiderea acestuia pînă la obținerea turației minime.

d) *Calculul supapei de siguranță* (V_M)

Rolul supapei de siguranță din această instalație este de a asigura expulzarea surplusului de ulei provenit de la drosel prin reglarea acestuia la diferite secțiuni de trecere a lichidului de lucru, menținînd astfel o presiune constantă în sistem tot timpul. S-a ales o supapă de siguranță cu scaun conic. Schema de calcul și forma supapei sînt prezentate în fig. 11

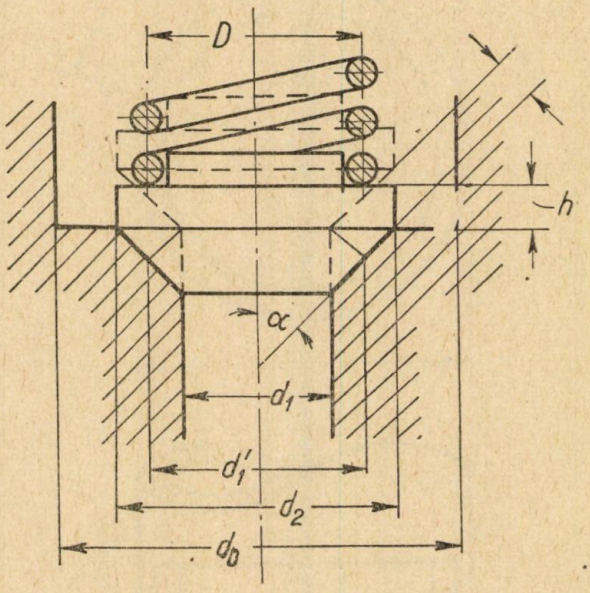


Fig. 11

și 12. Calculul supapei de siguranță constă în determinarea secțiunii de intrare a uleiului, determinarea diametrelor principale precum și a elementelor arcului.

Secțiunea de intrare a uleiului S_1 poate fi determinată din expresia :

$$S_1 = \frac{Q}{K\alpha\sqrt{\Delta p}} = \frac{49}{0{,}885 \cdot 0{,}4\sqrt{20}} = 32 \text{ mm}^2$$

$\Delta p = p_1 - p_0 = 20 - 0 = 20$ kg/cm²

p_1 — presiunea maximă la care se deschide supapa

p_0 — presiunea la care uleiul se destinde în supapaă ($p_0 \cong 0$)

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 S_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4{,}32}{3{,}14}} \cong 6{,}5 \text{ mm (luăm } d_1 = 7 \text{ mm)}$$

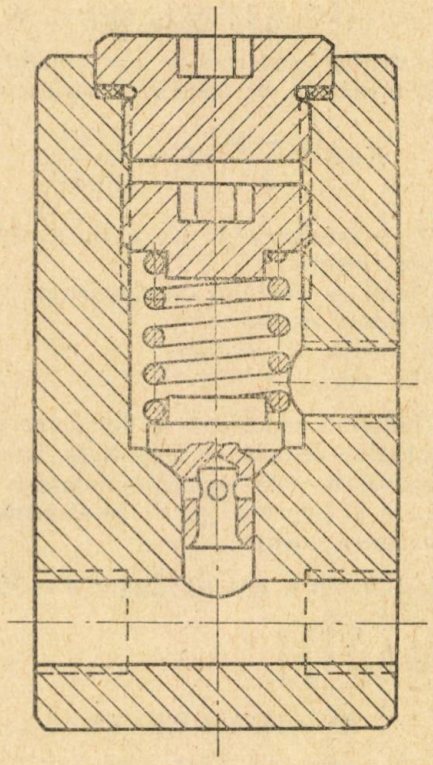


Fig. 12

Diametrul d_2 se determină din condiția de strivire a scaunului supapei sub presiunea arcului :

$$s_2 \sigma_a \geqslant F_{arc}$$

$$\frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)\,\sigma_a \geqslant s_1 p_1$$

unde : p_1 — presiunea de lucru din sistem

$\sigma_a = 800$ kg/cm² — rezistența admisibilă la strivire.

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot S_1 p_1}{\pi \sigma_a} + d_1^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 32 \cdot 20}{3{,}14800} + 49} = 7{,}2 \text{ mm}$$

Această diferență mică de diametre se explică din cauza presiunii mici din sistem ; de aceea vom lua constructiv $d_2 = 13$ mm.

Diametrul d_3 se alege astfel ca între supapă și corpul acesteia să fie un spațiu cel puțin egal cu secțiunea S_1

$$\pi (d_3^2 - d_2^2) = S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$$

$$d_3 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{7^2 + 13^2} = 15 \text{ alegem } d_3 = 16 \text{ mm.}$$

Determinarea elementelor constructive ale arcului constau, în ultima analiză în determinarea numărului de spire z. Pentru aceasta folosim relația :

$$K = \frac{(p_1' - p_0)}{h} S_1 = \frac{Gd^4}{8 z D^3}$$

unde : $p_1' = 15$ kg/cm^2 — presiunea de lucru din sistem
h — deschiderea supapei
$G = 8\,000$ kg/mm^2 — modulul de elasticitate la torsiune
d — diametrul sîrmei arcului
D — diametrul mediu al arcului
z — numărul de spire

Înălțimea de deschidere a supapei h se determină prin înlocuirea suprafeței laterale a triunghiului de con cu suprafața laterală a unui cilindru de diametru d_1. Echivalînd această suprafață laterală a cilindrului de diametru d'_1 cu suprafața S_1 și înlocuind pe d_1 cu elemente cunoscute obținem, conform fig. 11, următoarea relație :

$S_1 = \pi h \sin \alpha (d_1 + h \sin \alpha \cos \alpha)$; luăm $\alpha = 30^0$

$$S_1 = 3{,}14\, h \frac{1}{2}\left(7 + h \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$32 = 11\, h + 0{,}68\, h^2$$

$$0{,}68\, h^2 + 11\, h - 32 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 + 4 \cdot 0{,}68 \cdot 32}}{2 \cdot 0{,}68} = \frac{-11 \pm 14{,}5}{1{,}36}$$

$$h_1 = 2{,}5 \text{ mm}$$

$$K = \frac{15 - 0}{0{,}25}\, 0{,}32 = 19{,}2 \text{ ; alegem : } d = 2 \text{ mm}$$

$$D = 6d = 6 \cdot 2 = 12 \text{ mm}$$

$$z = \frac{800.000 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 19{,}2 \cdot 1{,}8} \cong 5 \text{ spire} —$$

e) *Calculul supapei de reținere* (S_R)

Această supapă se montează pe conducta de aspirație și are rolul de a permite uleiului să treacă într-o singură direcție, adică nu permite coloanei de lichid din instalație să se scurgă în rezervor în starea de repaus a instalației. Constructiv această supapă nu diferă prea mult de supapa de

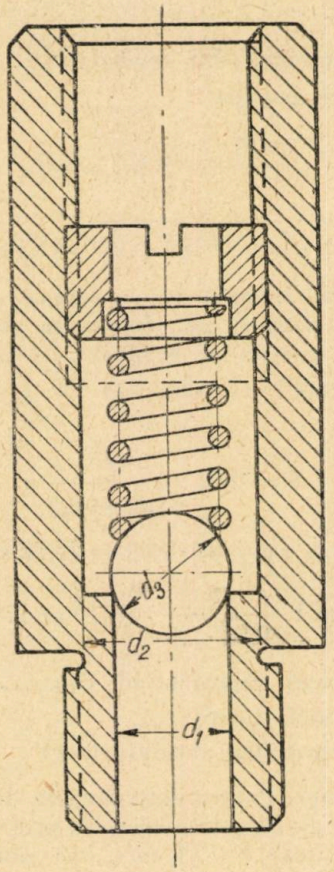


Fig. 13

siguranță, însă ca principiu de funcționare diferă esențial prin faptul că supapa de reținere funcționează normal deschisă. Construcția acestei supape este reprezentată în fig. 13. Arcul supapei are doar rolul de ghidare a bilei și asigurarea unei închideri sigure. Presiunea de închidere este dată ciar de coloana de lichid, greutatea bilei și a arcului.

Diametrul d_1 se determină din relația

$$d_1 \geqslant 4{,}6 \sqrt{\frac{Q}{v}}$$

$$d_1 \geqslant 4{,}6 \sqrt{\frac{49}{4}} = 4.6 \cdot 3{,}5 = 16 \text{ mm.}$$

unde : $v = 4$ m/s — viteza de curgere a uleiului prin conducta de aspirație

Diametrul bilei d_3 se alege $d_3 = (1{,}2 - 1{,}3)\, d_1$

$$d_3 = 1{,}2 . 16 = 19{,}2 \cong 20 \text{ mm}$$

Diametrul d_2 se determină din condiția egalității secțiunilor de intrare și trecere a uleiului prin supapă

$$\frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_3^2) ;$$

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 + d_3^2} = \sqrt{16^2 + 20^2} = 25{,}6 = 26 \text{ mm}$$

f) *Calculul filtrului.* Întrucît nu se impun condițiuni prea severe în ceea ce privește variația vitezei, vom folosi, în această instalație un singur filtru din sită metalică, montat pe conducta de aspirație.

Singurul element care se calculează la acest filtru este suprafața de filtrare

$$S = 0{,}01 \frac{Q}{\alpha (p_1 - p_2)} \eta$$

$$\eta = \nu \delta = 30 \cdot 0{,}89 = 26{,}70 \text{ cP.}$$

$$S = 0{,}01 \frac{49}{0{,}05 \cdot \ ,5} 26{,}70 = 174 \text{ cm}^3$$

$\alpha = 0{,}05$ — coeficient reprezentînd capacitatea specifică de filtrare a uleiului l/cm²

$\eta = 26{,}7$ CP — viscozitatea absolută în cP

g) *Calculul conductelor.* Pentru determinarea diametrului conductelor este necesar a se alege viteza de curgere a uleiului prin conducte. Pentru conducta de aspirație alegem o viteză $V = 4$ m/s, iar pentru conducta de refulare $V = 2$ m/s.

În acest fel putem determina diametrul conductelor astfel :

— pentru conducta de refulare $d = 4{,}6 \sqrt{\frac{Q}{V}} = 4{,}6 \sqrt{\frac{49}{2}} = 23$ mm

— pentru restul conductelor $d = 4{,}6 \sqrt{\frac{49}{4}} = 16$ mm

h) *Calculul volumului rezervorului de ulei.* Volumul de ulei se determină, plecînd de la ecuația echilibrului termic, în așa fel ca în sistemul hidraulic temperatura uleiului să nu depășească valoarea de 50—55°.

Relația de calcul este de forma :

$$V = \sqrt{\left(\frac{Q_c}{25}\right)^3} \; ; \; Q_c = 860\,(1-\eta)\; P = 860\,(1-0{,}25),\; 2{,}8 = 1\,800\,\text{kcal}$$

Avînd în vedere faptul că instalația funcționează intermitent și că cedarea căldurii are loc și prin aparatajul hidraulic direct în atmosferă putem reduce această cantitate de căldură cu circa 30%, deci luăm valoarea lui $Q_c = 1250$

$$V = \sqrt{\left(\frac{1250}{35}\right)^3} \cong 200\ \text{l.}$$

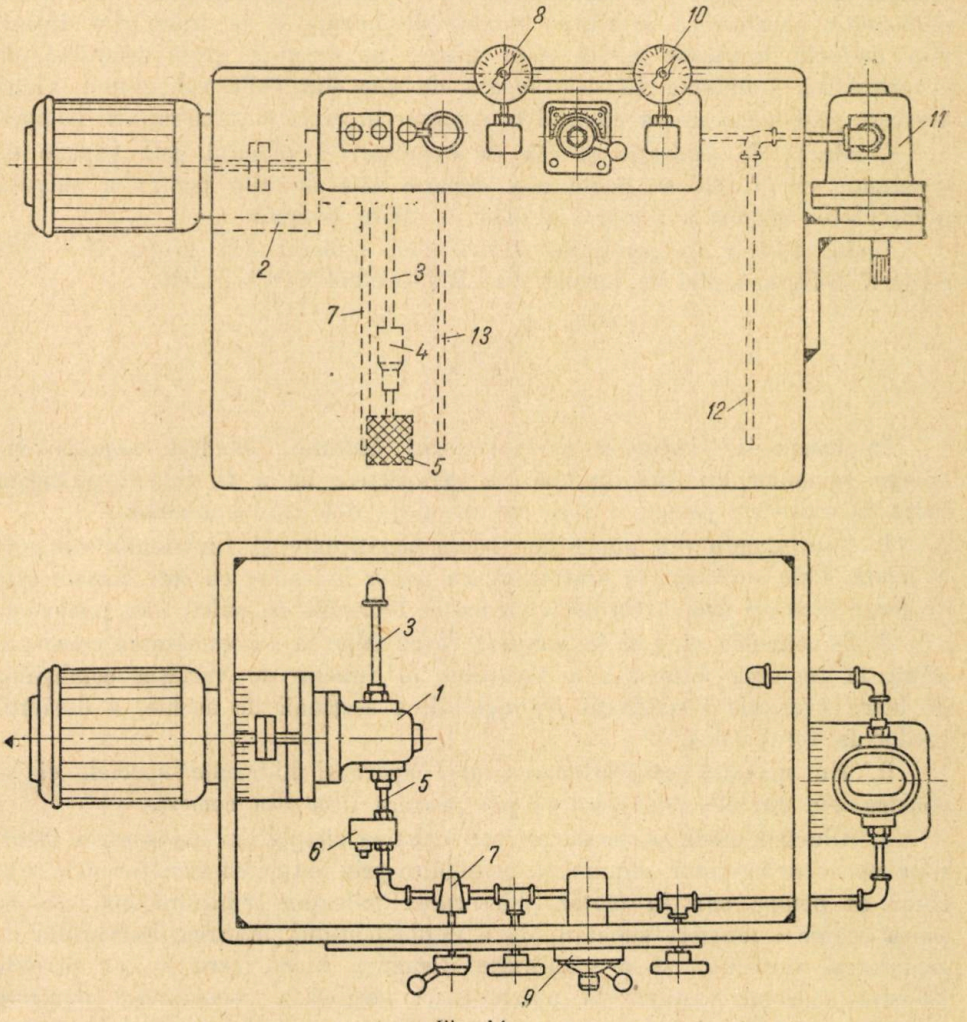


Fig. 14

Volumul necesar obținut este mare, lucru care se datorește randamentului scăzut ; avînd însă în vedere că nu se impun condiții rigide la variația turațiilor să poată micșora acest volum la cca 150 l.

Vederea generală a instalației hidraulice este prezentată în fig. 14. Carcasa instalației se execută din tablă sudată. Pompa 1 se montează pe un colțar de oțel 2. Aspirația uleiului se face prin conducta de aspirație 3 pe care este montată supapa de reținere 4 și filtrul 5. Pe conducta de refulare 5 se montează supapa de siguranță 6 cu conducta 7 prin care se expulzează surplusul de ulei de la drosel.

Uleiul sub presiune este refulat prin robinetul de pornire cu trei căi 14, manometrul 8, droselul 9, manometrul 10 în motorul hidraulic 11. Cele două manometre controlează presiunea înainte de intrare și la ieșire din drosel. Din motorul hidraulic uleiul este trimis în rezervor prin conducta de evacuare 12. Conducta 13 este legată de una din căile robinetului 14 și servește pentru întorcerea uleiului în rezervor în cazul scurtcircuitării pompei.

Conducta de aspirație și cea de expulzare a uleiului prin supape de siguranță vor fi cît se poate mai departe una de alta pentru a asigura o circulație intensă a uleiului și deci o răcire normală.

Uleiul folosit în instalație va fi ulei, mineral din grupa 403—404 STAS 751-49, sau ulei de turbină T$_3$—5003—5004 STAS 742-49.

* * *

În concluzie subliniem că *variatorul hidraulic* studiat compus din pompă și motor cu roți dințate are perspective de a fi folosit pe scară largă în industrie pentru o serie de avantaje din care enumerăm :

1. Este simplu din punct de vedere constructiv și funcțional, compact și ieftin. Este suficient să arătăm că un motor hidraulic cu roți dințate este de peste zece ori mai ieftin decît un motor hidraulic cu palete sau pistonașe.

2. Se comandă ușor și se pretează foarte bine la automatizarea comenzii, adică la reglarea automată a turațiilor în funcție de variația condițiilor de lucru (variația viscozității polimerului, a secțiunii de așchie, a durității rocilor la foraj etc.).

3. Nu necesită confecționarea unui aparataj hidraulic special, ci se construiește din elemente care se pot procura ușor din comerț.

4. Aducînd unele perfecționări constructive simple ca : micșorarea frecărilor mecanice în motor, eliminarea droselului prin obținerea variației debitului chiar în pompă sau în motor, micșorarea pulsației debitului etc., se va putea obține o creștere substanțială a randamentului, mărirea domeniului de reglare al turațiilor și o stabilitate dinamică bună, ceea ce ar permite folosirea acestui variator la puteri mari lărgindu-i considerabil domeniu de utilizare. Aceste probleme vor constitui obiectul studiilor noastre ulterioare.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬИОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ВАРИАТОРА

(Резюме)

Б данн работе приведены результаты зкспериментальных исследований ввиду использования шестерёнчетых насосов, как ротационные гидравлические двигатели. Изменяя дросселем поток жидкости вводимый в двигатель полуьено непрерывное изменениё скорости шестерёнчетого двигателя в пределах 100 — 800 об/мин, что позволило сконструировать и наладить гидравлический шестерёняетый вариатор и применять его в качестве привода рсакторов в химической промышленности.

EXPERIMENTAL RESEARCH AND DESIGN OF A HYDRAULIC VARIATOR

(Summary)

This study gives the results of the experimental researches concerning the utilization of geared-whell-pumps as hydraulic torque-motors. By changing the flow passing through the motor, with an adequate valve, it is possible to obtain a continuous change of the specd of the gearedwheel-motor, withi the limits from 100 rot/min to 800 rot/min.

This propriety gave the possibility to design a hydraulic speed-control, utilized for the actioning of reactors in the chemical industrie.

ETUDE EXPERIMENTALE ET PROJET D'UN VARIATEUR HYDRAULIQUE

(Résumé)

Cette étude expose les résultats des recherches expérimentales, concernant l'utilisation des pompes à roues d'engrenages, comme moteurs hydrauliques rotatifs.

En variant le débit, qui passe par les moteurs, à l'aide d'un dispositif de laminage, on peut réaliser une variation continue de la vitesse de rotation du moteur à reues dentées dans des limites de 100 t/min à 800 t/min.

Cette propriété a permis de projeter et d'améliorer un variateur hydraulique à roues dentées pour l'entrainement des réacteurs utilisés dans l'industrie chimique.

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG UND PROJEKTIERUNG EINES HYDRAULISCHEN DREHZAHLREGLERS

(Zusammenfassung)

Diese Arbeit gibt einen weiten Überblick über die experimentellen Forschungen auf dem Gebiete der Verwendung von Zahnradpumpen als hydraulische rotierende Motoren. Durch Änderung der in diese Motoren eingespeisten Durchflussmenge — was durch eine Drossel-vorrichtung erzielt wird — wird eine stetige Drehzahländerung des Zahnrad-motors, in einem Bereich von 100 U/min, bis 800 U/min erreicht; auf Grund dieser Eigenschaft konnten hydrauliche Zahnrad-Geschwindigkeitsregler entworfen und verbessert werden, die für den Antrieb von Reaktoren in der Chemischen Industrie verwendet werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola II

ENERGETICA

CALCULUL MATRICIAL AL REȚELELOR ELECTRICE

de *M. BERCOVICI*
Membru corespondent al Academiei R.P.R.

Folosirea calculului matricial în teoria rețelelor electrice a fost dezvoltată de G. Kron [1] și W. Cauer [2] în anii 1939—1940. Kron a stabilit relațiile matriciale pentru calculul rețelelor electrice prin metoda ochiurilor și a perechilor de noduri, introducînd în acest scop conceptul de „rețea primitivă" și folosid principiul invarianței puterei active transformate în căldură în rețea prin efectul Joule.

Metoda lui Kron, în special conceptul rețelelor primitive, prezintă unele dificultăți de înțelegere și din această cauză a ridicat în repetate rînduri obiecțiuni principiale. O încercare de înlăturare a acestor dificultăți a fost făcută de Le Corbeiler [3] care, păstrînd în demonstrațiile sale conceptul de rețea primitivă a lui Kron, a mai introdus în plus o rețea auxiliară, denumită de el „rețea intermediară".

La noi în țară s-au preocupat de această problemă Antoniu [4], Mocanu [5], Fransua [6], Preda [7] și alții, care au urmărit în genere stabilirea formulelor pe baze care să evite obiecțiunile ridicate de metoda lui Kron.

Prezenta lucrare își pune deasemenea ca obiectiv stabilirea formulelor lui Kron, fără a face însă apel la conceptul rețelelor primitive sau a altor rețele auxiliare, precum și la principiul invarianței puterii disipate. Firul conducător al lucrării constă în folosirea la maximum a considerațiilor de topologie, care își găsesc în prezent o largă aplicare atît în teoria rețelelor electrice cît și într-o serie de alte domenii importante, ca de ex: programare liniară, balanțe energetice, automatică și reglaje, organizare, etc. Trecerea la folosirea mărimilor electrice a rețelelor se face atunci ca o aplicație a rezultatelor obținute pe baza considerațiilor de topologie.

Introducerea conceptelor de topologie în teoria rețelelor electrice a fost făcută de Kirchhof, prin folosirea noțiunii de „matriță de incidență". Această noțiune a fost reluată de H. Poincaré în studiile sale de topologie. Topologia sau geometria de poziție ca ramură a științelor matematice a fost apoi dezvoltată de König [8], care primul a introdus denumirea de „graf", Veblen [9], Berge [10], Lefschetz [11] și alții.

Ca urmare a scopului propus, lucrarea cuprinde 2 părți distincte: în prima parte se face expunerea considerațiilor topologice fundamentale nece-

sare, iar în cea de-a doua parte se expun metodele propriu zise de calcul matricial al rețelelor electrice, folosind rezultatele obținute în prima parte a lucrării.

1. Considerații topologice fundamentale.

1.1. *Definiții.* Întrucît în genere inginerii electricieni nu sînt familiarizați cu termenii folosiți în topologie, prezentăm în cele ce urmează — pentru a evita eventuale neînțelegeri — definițiile principalilor termeni folosiți în lucrarea de față ; de altfel această prezentare apare ca necesară și datorit faptului că în puținele lucrări apărute în acest domeniu nu s-a precizat încă un sistem de definiții unanim acceptat. Principalii termeni folosiți și definițiile lor (care nu au pretenția rigurozității perfecte din punct de vedere strict matematic) sînt următorii :

— *Element :* este un segment de linie (dreaptă sau curbă) limitat prin *2 puncte terminale* (sau *borne) ;* un element poate reprezenta o rezistență ohmică, un condensator, o conductă de apă, o șosea, o secție a unei uzine, etc.

— *Ramură :* este formată în genere din mai multe elemente legate în serie, prin suprapunerea a 2 puncte terminale aparținînd la 2 elemente diferite. O ramură nu poate conține elemente legate în paralel, care ar forma astfel bucle ; o ramură poate fi formată și dintr-un singur element.

— *Graf :* (sau *grafic,* sau *schemă) :* este o mulțime finită de ramuri (deci de elemente) legate sau nu între ele (avînd puncte terminale suprapuse sau independente) ; un graf este format din *laturi* și *noduri.*

— *Conexitate :* Un graf format din mai multe părți independente fără a exista puncte terminale comune între ele, este numit *multiplu-conex ;* un graf formînd un singur tot, în care deci se poate ajunge de la orice punct la oricare alt punct al grafului parcurgînd numai ramuri ale schemei, se numește *simplu-conex.* În cele ce urmează vom considera numai scheme simplu conexe, întrucît toate concluziile referitoare la aceste scheme se aplică și la schemele multiplu-conexe.

— *Latură :* este o ramură a cărei ambele puncte terminale se suprapun peste punctele terminale ale altor ramuri ale grafului ; o ramură devine latură prin includerea ei într-un graf. În cazul cînd numai un singur punct terminal al unei ramuri se suprapune peste un punct terminal al unei alte ramuri, celălalt punct terminal fiind liber, sau în cazul cînd ambele puncte terminale ale unei ramuri se suprapun unul peste celălalt (formînd o buclă) avem deaface cu o *latură neesențială ;* în unele probleme, de ex. din domeniul rețelelor electrice, laturile neesențiale pot fi îndepărtate fără a influența prin aceasta restul grafului ; în cele ce urmează vom considera că toate laturile neesențiale au fost eliminate, iar schemele sînt formate numai din laturi esențiale.

— *Nod :* este un punct rezultat din suprapunerea a 2 sau mai multe puncte terminale aparținînd unor laturi diferite ale grafului ; în cazul cînd un nod rezultă din suprapunerea a 2 puncte terminale avem deaface cu un *nod neesențial ; noduri esențiale* apar la intersecția a 3 sau mai multe laturi esențiale. Prezența nodurilor neesențiale nu are altă influență asupra grafului decît că mărește numărul nodurilor și laturilor ; din aceste motive în cele ce urmează nu vom face distincție între nodurile esențiale și neesențiale.

— *Incidență:* O latură și un nod se consideră incidente reciproc dacă nodul este un punct terminal al laturei.

— *Schemă parțială* (sau *subgraf*): cuprinde numai o parte din laturile și nodurile grafului; întrucît în prezenta lucrare luăm în considerare — din motivele expuse mai sus — numai scheme simplu-conexe, rezultă că și schemele parțiale considerate vor fi părți simplu-conexe ale schemelor date.

— *Orientare:* Un element, o ramură sau o latură poate căpăta o orientare prin alegerea unui sens de parcurgere de la un punct terminal la celălalt punct terminal (respectiv de la un nod la celălalt nod); orientarea adoptată se evidențiază printr-o săgeată. Un graf format din laturi orientate este un *graf orientat*; în cele ce urmează vom considera numai scheme orientate.

— *Circuit închis* (sau *buclă*): este un subgraf simplu-conex format din mai multe laturi și în care fiecare nod are 2 laturi incidente cu el. Un graf poate avea mai multe circuite închise diferite.

— *Arbore* (sau *trunchi*): este un subgraf simplu-conex care nu prezintă nici un circuit închis; dacă arborele cuprinde toate nodurile grafului considerat atunci avem un *arbore* (sau *trunchi*) *complet*. Dacă se notează cu n numărul de noduri ale grafului, atunci un arbore complet al acestui graf are $n-1$ laturi. Un graf poate avea mai mulți arbori completi diferiți. Nodurile unui arbor sînt fie *noduri de capăt* (inițiale sau finale) cu care sînt incidente numai o singură latură, fie *noduri de tranzit* cu care sînt incidente 2 sau mai multe laturi.

— *Coardă*: este o latură care nu face parte dintr-un arbore complet; mulțimea laturilor unui graf care sînt complimentare unui arbore complet al acestui graf formează *subgraful coardelor corespunzător arborelui considerat*. Dacă se notează cu l numărul laturilor unui graf, atunci subgraful coardelor conține $l-n+1$ laturi. Subgraful coardelor este în general multiplu-conex.

— *Secționare*: este o linie care împarte graful în 2 părți distincte formînd 2 subgrafuri independente; secționările sînt considerate ca făcute prin laturi. Fiecare subgraf astfel obținut al unui graf simplu-conex este deasemenea simplu-conex. [1]

1.2. *Matrița de incidență.* Considerăm un graf simplu-conex format din l laturi și n noduri; laturile grafului și deci graful sînt deocamdată neorientate. Numerotăm nodurile în mod arbitrar cu numere de ordine de la 1 la n: pe baza acestei numerotări notăm fiecare latură cu simbolul L prevăzut cu 2 indici numerici h, i, reprezentînd numerile de ordine ale nodurilor cu care latura considerată este incidentă; simbolul L_{hi} reprezintă astfel latura care leagă între ele nodurile h și i; prin această notație laturile și deci graful devin orientate, sensul de orientare al fiecărei laturi fiind în mod convențional de la nodul cu indicele mai mic spre nodul cu indicele mai mare. Simbolul L poate să reprezinte orice mărime fizică legată de latura respectivă, specifică problemei studiate; de ex: lungimea laturei, intensitatea unui curent electric, o tensiune electromotoare, o cădere de tensiune, o

[1] Nu luăm în considerare secționările care împart graful în mai mult decît 2 subgrafuri simplu-conexe.

putere electrică, un debit, un flux de materiale, un număr de automobile parcurgînd o șosea, etc.

Indicele *hi* poate fi considerat și ca număr întreg scris în sistemul de numerație zecimal (de ex; 1639 este indicele laturei care leagă nodul 16 cu nodul 39 într-un graf cu cel mult 99 noduri).

Pe baza convenției de numerotare a nodurilor și laturilor adoptate mai sus putem întocmi *matrița de incidență* a grafului. Se știe că matrița de incidență este un tablou cuprinzînd n rînduri (cîte un rînd pentru fiecare nod) și l coloana (cîte o coloană pentru fiecare latură).

În căsuțele tabloului introducem numerile ± 1 și 0 și anume : $+1$ dacă căsuța corespunde nodului h și laturei L_{hi} (latura L_{hi} *pleacă* de la nodul h) ; -1 dacă căsuța corespunde nodului i și laturei L_{hi} (latura L_{hi} *sosește* la nodul i) ;

0 dacă căsuța corespunde nodului k și laturei L_{hi} (nodul k și latura L_{hi} nu sînt incidente).

În fiecare coloană există numai un $+1$ sau -1, toate celelalte căsuțe fiind ocupate cu zerouri ; deci suma tuturor termenilor dintr-o coloană este egală cu 0.

În capul fiecărei coloane se poate înscrie simbolul laturei la care se referă coloana respectivă ; succesiunea laturilor și deci a coloanelor poate fi oarecare : ea poate fi de ex. în ordinea crescîndă a indicilor *hi* sau în orice altă ordine [12]. Pentru motivele cari vor rezulta mai departe împărțim laturile grafuluiîn 2 categorii în modul următor :

În fiecare nod al grafului vom repartiza latura cu indicele *hi* ($h < i$) cel mai mic, în prima categorie de laturi, iar toate celelalte laturi incidente cu acest nod, în cea de a doua categorie de laturi. În nodul h sosesc laturi cu indicii gh ($g < h$) de la nodurile anterioare ; de aceste laturi am dispus la cercetarea nodurilor anterioare prin includerea lor în categoriile de laturi respective. * Din modul n nu pleacă nici o latură ; în acest nod avem numai laturi care sosesc, deci nu vom mai avea laturi noi din prima categorie de laturi. Rezultă că în prima categorie vom repartiza $n-1$ laturi, iar în categoria a doua $l-n+1$ laturi. Se știe că numărul $l-n+1$ se numește numărul lui Betti sau numărul ciclometric.

Pe baza acestei repartizări a laturilor vom adopta următoarea succesiune a coloanelor matriței de incidență : primele $n-1$ coloane vor cuprinde laturile din prima cateogrie aranjate în ordinea crescîndă a indicilor lor ; următoarele $l-n+1$ coloane vor cuprinde laturile din categoria a doua aranjate deasemenea în ordinea crascîndă a indicelor lor.

Notăm matrița de incidență cu

$$\| A' \| = \left\| \| A_1' \| \; \| A_2' \| \right\|$$

în care :

$\| A_1' \|$ este matrița cuprinzînd laturile din prima categorie și avînd n rînduri și $n-1$ coloane ; iar

---

* Dacă într-un nod j nu avem nici o latură care să lege acest nod cu un nod k ($k > j$), atunci introducem în prima categorie de laturi ultima latură repartizată în categoria a doua de laturi.

$\| A_2' \|$ este matrița cuprinzînd doua categorie și laturile din cea de a avînd n rînduri și $l - n + 1$ coloane.

În topologie se demonstrează că rangul matrițelor $\| A' \|$, $\| A_1' \|$ și $\| A_2' \|$, care sînt matrițe singulare, este $n - 1$ [13].

Dacă îndepărtăm un rînd oarecare din matrița de incidență obținem matrița :

$$\| A \| = \left\| \| A_1 \| \vdots \| A_2 \| \right\|$$

în care acum matrița $\| A_1 \|$ este pătratică, de ordinul $n - 1$ și nesingulară, iar matrița $\| A_2 \|$ are $n - 1$ rînduri și $l - n + 1$ coloane și este de rang $n - 1$. În cele ce urmează vom presupune în genere că rîndul eliminat din matrița $\| A' \|$ se referă la nodul n; prin aceasta nu se pierde nimic din generalitatea demonstrațiilor, întrucît am adoptat o numerotare cu totul arbitrară a nodurilor. Se numește adesea nodul eliminat, deci în cazul nostru nodul n, *nodul de referință* sau *nodul de echilibrare*.

Matrița $\| A_1' \|$ este matriță de incidență a unui arbore complect; aceasta rezultă din însăși regula de selecție și de repartizare a laturilor grafului în prima categorie de laturi ale grafului, adoptată mai sus. De altfel se demonstrează în topologie pe cale directă că orice submatriță de rangul $n - 1$ extrasă din matrița de incidență $\| A' \|$ corespunde unui arbore complet, [13].

Matrița $\| A_2' \|$ este matrița de incidență a subgrafului de coarde, corespunzător arborelui stabilit prin matrița $\| A_1' \|$.

Așa dar, prin simpla numerotare la întîmplare a nodurilor grafului și adoptarea regulei indicate de clasificare a laturilor se obține în mod mecanic matrița de incidență a unui arbore complet și matrița de incidență a subgrafului de coarde corespunzător, ceia ce prezintă importanță pentru o rețea complexă, cu numeroase noduri și laturi, cînd se urmărește rezolvarea ei cu ajutorul mașinilor digitale automate de calcul [14].

Dacă notăm cu $L_{fg}^{(a)}$ o latură oarecare a arborelui complet $(f < g)$, cu $L_{jk}^{(c)}$ o latură-coardă oarecare $(j < k)$ și cu L_h mulțimea laturilor incidente cu nodul h, atunci se poate scrie relația matricială

$$\| L_h \| = \| A' \| \cdot \left\| \begin{array}{c} \| L_{fg}^{(a)} \| \\ \hdashline \| L_{jk}^{(c)} \| \end{array} \right\| = \left\| \| A_1' \| \vdots \| A_2' \| \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \| L_{fg}^{(a)} \| \\ \hdashline \| L_{jk}^{(c)} \| \end{array} \right\| . \qquad (1)$$

în care am notat cu :

$\| L_h \|$ matrița-coloană (vactorul) a cărei termeni reprezintă mulțimea laturilor incidente cu fiecare nod, aranjate în ordinea crescîndă a numerilor de ordine a nodurilor ;

$\| L_{fg}^{(a)} \|$ matrița-coloană (vectorul) a cărei termeni reprezintă laturile arborelui complet considerat, aranjați în ordinea crescîndă a indicilor acestor laturi ;

$\| L_{jk}^{(c)} \|$ matriță-coloană (vectorul) a cărei termeni reprezintă laturile-coardă corespunzătoare arborelui considerat, aranjați deasemenea în ordinea crescîndă a indicilor acestor laturi.

Matrița de incidență poate fi interpretată și ca matriță de conexiune a unui sistem de secționări, după cum se va arăta la punctul 1.4.

1.3. *Matrița de conexiune a circuitelor închise* (sau a buclelor). La un graf se pot distinge un număr finit de circuite închise (sau de bucle), din care unele sînt *independente*, iar celelalte sînt *dependente*, adică se pot obține prin combinarea circuitelor independente. Pentru fiecare circuit închis se poate stabili un sens considerat ca pozitiv. Pentru totalitatea circuitelor închise ale unui graf se poate întocmi *matrița de conexiune a circuitelor închise*. Se știe că această matriță este un tablou cuprinzînd atîtea rînduri cîte circuite închise se pot distinge și l coloane, cîte o coloană pentru fiecare latură.

În căsuțele fiecărui rînd al acestui tablou, corespunzător unui circuit închis oarecare, introducem numerile ± 1 și 0, și anume:

$+1$ dacă căsuța corespunde unei laturi L_{hi} conținute în acest circuit și a cărui sens pozitiv coincide cu sensul pozitiv al circuitului;

-1 dacă căsuța corespunde unei laturi L_{hi} conținute în acest circuit și a cărei sens pozitiv este invers sensului pozitiv al circuitului;

0 dacă căsuța corespunde unei laturi L_{hi} nefăcînd parte din acest circuit.

Notăm cu $\| B' \|$ matrița de conexiune a circuitelor închise. În topologie se demonstrează că matrița $\| B' \|$ are rangul $l - n + 1$ [13], adică numai $l - n + 1$ circuite închise sînt independente; rîndurile celorlalte circuite închise care sînt dependente, se obțin prin combinații liniare a rîndurilor corespunzătoare circuitelor închise independente. Notăm cu $\| B_x \|$ una din matrițele de conexiune a circuitelor închise, conținînd numai $l - n + 1$ rînduri și avînd rangul $l - n + 1$, posibile de extras din matrița $\| B' \|$; o asemenea matriță reprezintă un *sistem fundamental* (sau *complet*) *de circuite închise independente*. În genere pentru un graf dat există mai multe matrițe $\| B_x \|$.

Între matrițele $\| A' \|$ și $\| B' \|$, respectiv între matrița $\| A \|$ și o matriță oarecare $\| B_x \|$ există relațiile:

$$\| A' \| \cdot \| B' \|_t \equiv \| B' \| \cdot \| A' \|_t \equiv 0 \qquad (2\,a)$$

$$\| A \| \cdot \| B_x \|_t \equiv \| B_x \| \cdot \| A \|_t \equiv 0\,, \qquad (2\,b)$$

dacă ordinea coloanelor din matrițele de incidență și de conexiuni a circuitelor închise este aceiași. Aceste relații importante se demonstrează prin considerații topologice directe [10], [13]; o demonstrație puțin diferită este indicată în anexa I.

Putem distinge un sistem fundamental particular de circuite închise independente cu proprietăți remarcabile; fiecare circuit al acestui sistem cuprinde una și numai o singură latură-coardă, celelalte laturi făcînd parte din arborele grafului, reprezentat prin matrița $\| A_1' \|$. Cum subgraful coardelor cuprinde $l - n + 1$ laturi, sistemul are $l - n + 1$ circuite închise care sînt independente, întrucît fiecare circuit cuprinde altă latură-coardă și deci nici un circuit nu poate fi format din combinarea altor circuite închise făcînd parte din sistemul considerat; obținem astfel un sistem fundamental de circuite închise independente.

Matrița de conexiune $\| B \|$ a acestui sistem poate fi dedusă pe 2 căi diferite și anume : a) pe o cale directă și b) folosind relația (2b). Dat fiind interesul pe care-l prezintă, vom prezenta în cele ce urmează ambele căi :

a) Nodul n fiind nodul de referință, notăm cu $L_{fn}^{(a)}$ subgraful conex care realizează o legătură continuă între nodurile f și n, folosind pentru aceasta numai laturile arborelui complect reprezentat prin matrița $\| A_1' \|$.

Notăm cu $\| L_{fn}^{(a)} \|$ matrița-coloană (vectorul) a cărei elemente sînt mărimile $L_{fn}^{(a)}$ ordonate în ordinea crescîndă a indicilor f; această matriță cuprinde $n-1$ termeni, cîte un termen pentru fiecare nod, exceptînd nodul de referință n. Cu semnificația matriței $\| L_{fg}^{(a)} \|$ din relația (1), rezultă :

$$\| L_{fg}^{(a)} \| = \| A_1 \|_t \cdot \| L_{fn}^{(a)} \| \tag{3}$$

întrucît $L_{fg} = L_{fn} - L_{gn}$, iar matrița $\| A_1 \|_t$ are un $+1$ în dreptul coloanei f și un -1 în dreptul coloanei g. Din relația (3) deducem

$$\| L_{fn}^{(a)'} \| = \| A_1 \|_t^{-1} \cdot \| L_{fg}^{(a)} \|, \tag{4}$$

Matrița $\| A_1 \|_t^{-1}$ există pentrucă matrița $\| A_1 \|$ este pătratică și nesingulară.

Premultiplicînd ambii membrii a relației (4) cu matrița $\| A_2 \|_t$ obținem :

$$\| A_2 \|_t \cdot \| L_{fn}^{(a)} \| = \| A_2 \|_t \cdot \| A_1 \|_t^{-1} \cdot \| L_{fg}^{(a)} \|. \tag{5}$$

Fiecare termen a matriței coloană $\| A_2 \|_t \cdot \| L_{fn}^{(a)} \|$ reprezintă cîte un subgraf cuprinzînd laturile arborelui care realizează o legătură continuă între nodurile terminale ale unei anumite coarde. Într-adevăr, dacă notăm cu j și k nodurile incidente cu o coardă oarecare, atunci $L_{jn}^{(a)} - L_{kn}^{(a)}$ reprezintă parcursul dealungul arborelui care leagă între ele nodurile j și k (eventuale laturi comune ale arborelui pînă la nodul n se elimină prin scădere), iar matrița $\| A_2 \|_t$ are un $+1$ în dreptul coloanei j și un -1 în dreptul coloanei k.

Între perechile de noduri ale *fiecărei* coarde avem deci cîte 2 parcursuri distincte : unul dealungul coardei $L_{jk}^{(c)}$ și avînd sensul pozitiv de la j la k ($j < k$) și al doilea dealungul arborelui, avînd deasemenea sensul pozitiv de la j la k. Reprezentăm ambele aceste mulțimi de parcursuri, pentru totalitatea coardelor grafului, în modul următor :

— parcursurile dealungul *coardelor* prin matrița $\| L_{jk}^{(c)} \|$, și

— parcursurile dealungul *arborelui* prin matrița $\| L_{jk}^{(a)} \|$.

Observăm că mtrița

$$-\| L_{jk}^{(a)} \| = \| L_{kj}^{(a)} \| = -\| A_2 \|_t \cdot \| L_{fn}^{(a)} \| = -\| A_2 \|_t \cdot \| A_1 \|_t^{-1} \cdot \| L_{fg}^{(a)} \|$$

reprezintă parcursul invers de la k spre j folosind numai laturile arborelui.

Notăm pentru prescurtare

$$\| B_1 \| = \| A_2 \|_t \cdot \| A_1 \|_t^{-1} \tag{5}$$

Matrița $\| B_1 \|$ este dreptunghiulară și are $l-n+1$ rînduri $n-1$ coloane,

În aceste condiți este ușor de văzut că matrița

$$\left\| -\| B_1 \| \, \| U \| \right\| \cdot \left\| \frac{\| L_{fg}^{(a)} \|}{\| L_{jk}^{(c)} \|} \right\| = \| B \| \cdot \left\| \frac{\| L_{tg}^{(a)} \|}{\| L_{jk}^{(c)} \|} \right\| \qquad (5\,b)$$

este o matriță coloană cu $l - n + 1$ termeni care reprezintă sistemul fundamental particular de circuite închise independente, în care fiecare circuit este format dintr-o singură coardă și din mai multe laturi aparținînd arborelui definit de matrița $\| A_1' \|$; în consecință matrița $\| B \| = \left\| -\| B_1 \| \, \| U \| \right\|$ este matrița de conexiune a acestui sistem, avînd $l - n + 1$ rînduri și l coloane aranjate în aceiaș ordine în care este ordonată și matrița de incidență.

În expresiile de mai sus matrița $\| U \|$ reprezintă matrița unitate de ordinul $l - n + 1$.

Fiecărui arbore complet și deci fiecărui subgraf de coarde îi corespunde un singur sistem fundamental de circuite închise independente: într-adevăr dacă am presupune că fiecărui subgraf de coarde îi corespund mai multe sisteme fundamentale de circuite închise independente, atunci ar trebui să existe mai multe bucle care să fie formate din aceiaș coardă și din laturi aparținînd aceluiaș arbore complet; aceasta conduce însă imediat la concluzia că arborele conține bucle, ceiace este imposibil, fiind contrar definiții și modului de formare a unui arbore.

Sensul pozitiv al fiecărui circuit închis coincide cu sensul pozitiv al laturei-coarde respective care îi servește ca „suport".

Cu ajutorul expresiilor (5) și (5 b) se pot demonstra acum relațiile (2 b); conform regulilor algebrei matriciale avem:

$$\| B_1 \| = \| A_2 \|_t \cdot \| A_1 \|_t^{-1} \equiv \left\| \| A_1 \|^{-1} \cdot \| A_2 \| \right\|_t ; \qquad (6)$$

deci

$$\| A \| \cdot \| B \|_t = \| A \| \cdot \left\| -\| B_1 \| \, \| U \| \right\|_t =$$

$$= \left\| \| A_1 \| \, \| A_2 \| \cdot \left\| \frac{-\| B_1 \|}{\| U \|} \right\| \right\| = \left\| \| A_1 \| \, \| A_2 \| \right\| \cdot \left\| \frac{-\| A_1 \|^{-1} \cdot \| A_2 \|}{\| U \|} \right\| =$$

$$= -\| A_1 \| \cdot \| A_1 \|^{-1} \cdot \| A_2 \| + \| A_2 \| \equiv 0$$

Această demonstrație are un caracter general, fiind independentă de forma particulară a matrițelor $\| A_1 \|$ și $\| A_2 \|$.

b) La fel ca matrița de incidență $\| A \|$, matrița de conexiune $\| B \|$ a sistemului de circuite închise considerat poate fi partiționată în 2 submatrițe, din care prima, notată în cele ce urmează cu $\| B_1' \|$, se referă la laturile arborelui reprezentate prin matrița $\| A_1' \|$, iar a doua referindu-se la laturile-coarde corespunzătoare, va trebui să fie reprezentată prin matrița unitate $\| U \|$ de ordinul $l - n + 1$.

Deci vom putea scrie :

$$\| B \| = \left| \| B_1' \| \vdots \| U \| \right|$$

Aplicînd relația (2 b) avem :

$$\| B \| \cdot \| A \|_t = \left| \| B_1' \| \vdots \| U \| \right| \cdot \left\| \begin{matrix} \| A_1 \|_t \\ \cdots \\ \| A_2 \|_t \end{matrix} \right\| = \| B_1' \| \cdot \| A_1 \|_t + \| A_2 \| = 0$$

și deci

$$\| B_1' \| \cdot \| A_1 \|_t = - \| A_2 \|_t$$

sau prin postmultiplicarea ambilor membrii cu $\| A_1 \|_t^{-1}$

$$\| B_1' \| = - \| A_2 \|_t \cdot \| A_1 \|_t^{-1} \equiv - \| B_1 \|$$

conform notației adoptate în relația (5).

Rezultă așa dar că

$$\| B \| = \left| - \| B_1 \| \vdots \| U \| \right|$$

la fel cum am obținut mai sus sub a).

1.4. *Matrița de conexiune a secționărilor.* La un graf se pot distinge un număr finit de secționari din care unele sînt *independente,* iar celelalte sînt *dependente,* adică se pot obține prin combinarea secționărilor independente. Pentru fiecare secționare se poate stabili un sens considerat ca pozitiv după cum se indică în fig. 1.

Pentru totalitatea secționărilor unui graf se poate întocmi *matrița de conexiune a secționărilor,* care este iarăș un tablou cuprinzînd atîtea rînduri cîte secționări se pot practica și l coloane, cîte o coloană pentru fiecare

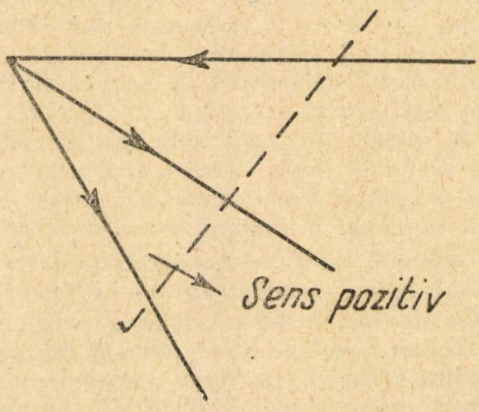


Fig. 1

latură. În căsuțele fiecărui rînd al acestui tablou, corespunzător unei secționări, introducem numerile $+1$ și 0, și anume:

$+1$ dacă căsuța corespunde unei laturi L_{hi} secționată și a cărei sens pozitiv coincide cu sensul pozitiv al secționării;

-1 dacă căsuța corespunde unei laturi L_{hi} secționate și a cărei sens pozitiv este invers sensului pozitiv al secționării;

0 dacă căsuța corespunde unei laturi L_{hi} nesecționate.

Notăm cu $\| C' \|$ matrița de conexiune a secționărilor. Prin considerente topologice se poate demonstra că matrița $\| C' \|$ are rangul $n-1$, deci numai $n-1$ secționări sînt independente, celelalte secționări posibile fiind dependente: rîndurile lor din matrița de conexiune a secționărilor se obțin prin combinații liniare a rîndurilor corespunzătoare secționărilor independente. Notăm cu $\| C_y \|$ una din matrițele de conexiune a secționărilor, conținînd numai $n-1$ rînduri și avînd rangul $n-1$, posibile de extras din matrița $\| C' \|$; o asemenea matriță reprezintă un *sistem fundamental* (sau *complet*) *de secționări indepenedente*. În genere pentru un graf dat există mai multe matrițe $\| C_y \|$.

Între matrițele $\| B' \|$ și $\| C' \|$ respectiv între matrițele $\| B_x \|$ și $\| C_y \|$ există relațiile:

$$\| B' \| \cdot \| C' \|_t \equiv \| C' \| \cdot \| B' \|_t \equiv 0 \qquad (7\,a)$$

$$\| B_x \| \cdot \| C_y \|_t \equiv \| C_y \| \cdot \| B_x \|_t \equiv 0 \qquad (7\,b)$$

dacă ordinea coloanelor din fiecare pereche de matrițe este aceiaș.

Dat fiind că demonstrația relațiilor (7 a) și (7 b) nu se întîlnește în literatura de specialitate, dăm în anexa I o demonstrație generală pentru aceste relații.

Este ușor de observat că relațiile (2 a) și (2 b) reprezintă cazuri particulare a relațiilor (7 a) resp. (7 b). Într-adevăr, putem obține un sistem de secționări practicînd cîte o secționare prin toate laturile care converg la nodurile grafului; sistemul va prezenta deci n secționări. Matrița de conexiune a acestui sistem de secționare este însă tocmai matrița de incidență $\| A' \|$ a grafului. Din cele n secționari ale sistemului, numai $n-1$ secționări sînt independente iar a n—a secționare este dependentă. Dacă considerăm numai primele $n-1$ secționări (care se referă la primele $n-1$ noduri) obținem un sistem fundamental de secționări independente a cărei matriță de conexiune este matrița de incidență $\| A \|$. Deci dacă relațiile (7 a) și (7 b) sînt valabile, atunci sînt valabile și relațiile (2 a) și (2 b).

Putem distinge și un al doilea sistem fundamental particular de secționări independente, cu proprități remarcabile; fiecare secționare a acestui sistem cuprinde una și numai o singură latură a arborelui complet definit prin matrița $\| A_1 \|$, celelalte laturi secționate fiind laturi-coarde. Cum arborele complet are $n-1$ laturi, sistemul are $n-1$ secționări, care sînt independente, întrucît fiecare secționare cuprinde altă latură a arborelui complet și deci nici o secționare nu poate fi formată din combinarea altor secționări făcînd parte din sistemul considerat; obținem astfel un sistem fundamental de secționări independente. Matrița de conexiune $\| C \|$ a acestui sistem poate fi iarăș dedusă pe 2 căi și anume: a) pe o cale directă, și

b) folosind relația (7 b). Ca și pentru matrița de conexiune a circuitelor închise vom expune în cele ce urmează ambele căi :

a) Considerăm arborele definit prin matrița $\| A_1 \|$; conform definiției, dacă îndepărtăm o latură oarecare dintr-un arbore îl împărțim în 2 părți independente, fiecare parte fiind simplu conexă și formată dintr-un număr m de noduri ($1 \leq m \leq n-1$) și din $m-1$ laturi ; cazul $m=1$ apare atunci cînd latura îndepărtată este incidentă cu un nod de capăt (inițial sau final) al arborelui ; în cazurile $m > 1$ latura îndepărtată este incidentă cu un nod de tranzit (nod incident cu 2 sau mai multe laturi făcînd parte din arbore).

În graful inițial, între cele 2 părți ale arborelui obținute prin îndepărtarea unei laturi a arborelui există legături formate numai din coarde. Notăm cu $L^{(c)}_{(fg)}$ mulțimea coardelor care leagă cele 2 părți ale grafului în cazul cînd îndepărtăm latura $L^{(a)}_{fg}$ a arborelui. Dacă nodul f cu care latura $L^{(a)}_{fg}$ este incidentă, este un nod de capăt, atunci $L^{(c)}_{fg}$ reprezintă mulțimea coardelor incidente cu acest nod. Dacă nodul f este un nod de tranzit, atunci $L^{(c)}_{fg}$ reprezintă mulțimea coardelor incidente cu nodurile anterioare cu care nodul f este legat prin laturi făcînd parte din arbore, plus coardele incidente cu nodul f ; în această mulțime coardele care leagă între ele 2 noduri anterioare sau un nod anterior cu nodul f apar de 2 ori, odată cu semnul + și a doua oară cu semnul — și deci se anulează reciproc.

Formăm matrița coloană $\| L^{(c)}_{fg} \|$ a mărimilor $L^{(c)}_{fg}$ ordonate în ordinea crescîndă a indicilor fg, această matriță cuprinde $n-1$ termeni, cîte un termen pentru fiecare latură a arborelui complet.

Notăm cu $\| L^{(c)}_{f} \|$ matrița-coloană a cărei termeni reprezintă mulțimea laturilor-coarde incidente cu nodurile grafului.

$$\| L^{(c)}_{f} \| = \| A_1 \| \cdot \| L^{(c)}_{(fg)} \| . \tag{8}$$

Într-adevăr, dacă nodul f este un nod de capăt al arborelui, atunci în rîndul corespunzător acestui nod din matrița de incidență $\| A_1 \|$ al laturilor arborelui, apare un singur + 1 și anume în coloana laturei $L^{(a)}_{fg}$; în toate celelalte coloane apar zerouri. Deci pentru acest nod $L^{(c)}_{f} = L^{(c)}_{(fg)}$ și reprezintă mulțimea coardelor incidente cu nodul f. Dacă nodul f este un nod de tranzit al arborelui, atunci în rîndul corespunzător apare un + 1 în coloana laturei $L^{(a)}_{fg}$ și unul sau mai mulți — 1 în coloanele laturilor arborelui incidente cu nodul f și sosind de la noduri anterioare. În consecință vom avea

$$L^{(c)}_{f} = L^{(c)}_{(fg)} - L^{(c)}_{(df)} - L^{(c)}_{(ef)} \ldots\ldots = L^{(c)}_{(fg)} - [L^{(c)}_{(df)} + L^{(c)}_{(ef)} + \ldots\ldots]$$

în care d, e,... reprezintă nodurile anterioare legate prin laturi ale arborelui cu nodul f. Ținînd seama de semnificația termenilor de forma $L^{(c)}_{(fg)}$, rezultă că diferența de mai sus reprezintă deasemenea mulțimea coardelor incidente cu nodul f.

Dar matrița $\| L^{(c)}_{f} \|$ se poate obține și direct cu ajutorul matriței de incidență $\| A_2 \|$ a coardelor din relația

$$\| L^{(c)}_{f} \| = \| A_2 \| \cdot \| L^{(c)}_{jk} \| ;$$

rezultă deci egalitate

$$\| A_1 \| \cdot \| L^{(c)}_{(fg)} \| = \| A_2 \| \cdot \| L^{(c)}_{jk} \|$$

Premultiplicînd ambii membrii cu matrița $\| A_1 \|^{-1}$ se obține

$$\| L^{(c)}_{(fg)} \| = \| A_1 \|^{-1} \cdot \| A_2 \| \cdot \| L^{(c)}_{jk} \|$$

Pentru a realiza o secționare completă a grafului trebuie să secționăm atît coardele care leagă cele 2 părți ale grafului obținute prin îndepărtarea laturei $L^{(a)}_{fg}$ ale arborelui cît și această latură însăși ceea ce se exprimă prin $L^{(a)}_{fg} + L^{(c)}_{(fg)}$.

Deci matrița

$$\| L^{(a)}_{fg} \| + \| L^{(c)}_{(fg)} \| = \| U \| \cdot \| L^{(a)}_{fg} \| + \| A_1 \|^{-2} \cdot \| A_2 \| \cdot \| L^{(c)}_{jk} \| =$$

$$= \left\| \| U \| \; \| A_1 \|^{-1} \cdot \| A_2 \| \right\| \cdot \left\| \frac{\| L^{(a)}_{fg} \|}{\| L^{(c)}_{jk} \|} \right\| = \left\| \| U \| \; \| B_1 \|_t \right\| \cdot \left\| \frac{\| L^{(a)}_{fg} \|}{\| L^{(c)}_{jk} \|} \right\|,$$

în care $\| U \|$ este matrița unitate de ordinul $n - 1$, va reprezenta sistemul fundamental particular de secționări independente căutat, iar matrița

$$\| C \| = \left\| \| U \| \; \| A_1 \|^{-1} \cdot \| A_2 \| \right\| = \left\| \| U \| \; \| B_1 \|_t \right\| \tag{9}$$

va reprezenta matrița de conexiuni a acestui sistem de secționări, cu observația că matrițele $\| C \|$ și $\| A \|$ au coloanele ordonate în același mod.

Pe baza relației (9) se poate acum demonstra egalitatea (7 b). Într-adevăr

$$\| C \| \cdot \| B \|_t \equiv \| B \| \cdot \| C \|_t = \left\| - \| B_1 \| \; \| U \| \right\| \cdot \left\| \| U \| \; \| B_1 \|_t \right\|_t =$$

$$= \left\| - \| B_1 \| \; \| U \| \right\| \cdot \left\| \frac{\| U \|}{\| B_1 \|} \right\| = - \| B_1 \| + \| B_1 \| \equiv 0$$

Această demonstrație are deasemenea un caracter general, fiind independentă de forma particulară a matriței $\| B_1 \|$, adică a matrițelor $\| A_1 \|$ și $\| A_2 \|$.

b) Și în acest caz matrița de conexiune $\| C \|$ a sistemului de secționări considerat poate fi partiționată în 2 submatrițe din care prima, referindu-se la laturile arborelui complet al grafului, va trebui să fie reprezentată prin matrița unitate $\| U \|$ de ordinul $n - 1$, iar a doua, notată în cele ce urmează $\| C'_2 \|$, se referă la laturile-coarde reprezentate prin matrița $\| A'_2 \|$.

Deci vom putea scrie

$$\| C \| = \left\| \| U \| \; \| C'_2 \| \right\| .$$

Aplicînd relația (7 b) avem:

$$\| C \| \cdot \| B \|_t = \left\| \| U \| \; \| C'_2 \| \right\| \cdot \left\| - \| B_1 \| \; \| U \| \right\|_t =$$

$$= \left\| \| U \| \; \| C'_2 \| \right\| \cdot \left\| \frac{- \| B_1 \|_t}{\| U \|} \right\| = - \| B_1 \|_t + \| C'_2 \| \equiv 0 ;$$

de unde rezultă că

$$\| C_2' \| = \| B_1 \|_t$$

și

$$\| C \| = \left\| \| U \| \vdots \| B_1 \|_t \right\|$$

la fel cum am obținut mai sus sub a).

Ca și în cazul circuitelor închise, fiecărui arbore complet al grafului îi corespunde un singur sistem particular fundamental de secționări independente. Sensul pozitiv al fiecărei secționări coincide cu semnul pozitiv al laturei respective al arborelui, care îi servește ca „suport".

Matrița $\| C \|$ poate fi calculată pe baza relației (9); ea poate fi însă dedusă și pe o cale directă, oarecum mecanică, în modul următor:

Considerăm laturile grafului ordonate așa cum s-a arătat la scrierea matriței de incidență $\| A' \|$, adică în fiecare din cele 2 categorii — laturi ale arborelui și laturi-coarde — în ordinea crescîndă a indicilor laturilor. Întrucît fiecărei laturi ale arborelui îi corespunde o secțiorare independentă, ordinea rîndurilor matriței $\| C \|$ va fi aceiaș cu a laturilor arborelui din matrița $\| A_1 \|$

După ce se scrie matrița unitate $\| U \|$ de ordinul $n - 1$, trebuiesc scrise succesiv rîndurile matriței $\| B_1 \|_t$.

În acest scop, pentru fiecare latură $L_{fg}^{(a)}$ a arborelui presupusă îndepărtată se stabilește, printr-o simplă inspecție a laturilor arborelui, nodurile care se găsesc în fiecare din cele 2 părți astfel obținute; coardele incidente cu noduri neaparținînd aceleiași părți, ordonate în ordinea crescîndă a indicilor laturilor, permit apoi scrierea termenilor rîndului respectiv al matriței $\| B_1 \|_t$.

Această metodă simplă permite programarea scrierei matriței $\| C \|$ cu ajutorul mașinelor digitale de calcul.

Avînd matrița $\| B_1 \|_t$ se poate acum ușor obține și matrița $-\| B_1 \| = -\left\| \| B_1 \|_t \right\|_t$ și deci se poate dispune de matrița $\| B \|$ de conexiune a circuitelor închise. Obținerea directă a matriței $\| B \|$ pe o cale mecanică, ca și cea utilizată mai sus pentru matrița $\| C \|$, pare mai greu de realizat.

Dualitatea care se știe că există între circuite închise și secționări, apare în forma matrițelor $\| B \|$ și $\| C \|$.

În anexa II dăm un exemplu de aplicare a considerațiilor expuse mai sus la punctele 1.2., 1.3 și 1.4.

2. Calculul matricial al rețelelor electrice.

2.1. *Considerații generale.* Fiecărei rețele electrice i se poate asocia un graf care reprezintă configurația sa geometrică; toate rezultatele topologice obținute în capitolul precedent sînt deci direct aplicabile rețelelor electrice.

Elementele rețelelor electrice constau din rezistențe ohmice R, selfinducții L și capacități C, considerate constante și independente de valorile tensiunilor aplicate sau a curenților care le traversează. Distingem la fiecare rețea electrică noduri și laturi (compuse din elementele indicate mai sus), pe care le numerotăm și le clasificăm în același mod ca și în graful asociat, pe baza convențiilor stabilite în capitolul precedent.

În afară de elementele pasive — rezistențe, selfinducții și capacități —, mai există în rețelele electrice surse de tensiuni electro-motoare și surse de curenți (sau injectoare de curenți) a căror legi de variație în timp se consideră cunoscute. Sursele de tensiuni și sursele de curent sînt presupuse că

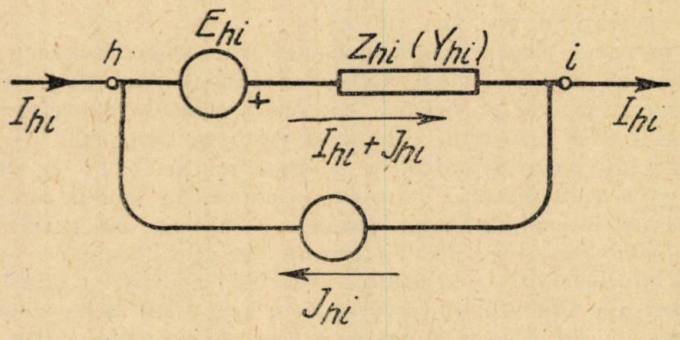


Fig. 2

acționează, în cazul general, după cum este indicat în fig. 2 pentru latura L_{hi}.

Între mărimile înscrise în fig 2 există relația (denumită adesea relația volt-amperică a laturei) :

$$V_{hn} + E_{hi} - V_{in} = Z_{hi}\,(I_{hi} + J_{hi})$$

În această expresie am considerat elementele pasive componente ale laturei combinate în mărimile Z_{hi} (impedanțe), respectiv Y_{hi} (admitanțe), a căror expresii depind de natura problemei studiate (probleme de regim staționar sau de regim tranzitoriu). Prin V_{hn} și V_{in} am notat potențialele nodurilor h respectiv i, raportate la potențialul nodului de referință n ; notînd în fine cu V_{hi} diferența de potențial între nodurile h și i, relația de mai sus devine cu $V_{hi} = V_{hn} - V_{in}$:

$$V_{hi} + E_{hi} = Z_{hi}\,(I_{hi} + J_{hi}) \qquad (10\,a)$$

sau

$$I_{hi} + J_{hi} = Y_{hi}\,(V_{hi} + E_{hi}) \qquad (10\,b)$$

Formulele (11 a) și (11 b) sînt valabile pentru cazul cînd între circuitele rețelei nu există acțiuni mutuale de inducție ; în cazul cînd considerăm și asemena acțiuni, atunci aceste relații devin :

$$V_{hi} + E_{hi} = Z_{hi}\,(I_{hi} + J_{hi}) + \ldots + Z_{(hi)\,(fg)}\,(I_{fg} + Jf_g) + \ldots \qquad (11\,a)$$

sau

$$I_{hi} + J_{hi} = Y_{hi}\,(V_{hi} + E_{hi}) + \ldots + Y_{(hi)\,(fg)}\,(V_{fg} + Ef_g) + \ldots \qquad (11\,b)$$

în care prin $Z_{(hi)\,(fg)}$ respectiv $Y_{(hi)\,(fg)}$ am notat expresiile care țin seama de acțiunea mutuală între laturile L_{hi} și L_{fg}. Expresile de forma (10 a—b) și (11 a—b) se pot scrie pentru fiecare latură a rețelei.

Introducem următoarele notații :

$\| E \|$ = matrița-coloană (vectorul) tensiunilor electromotoare a surselor de tensiune ;

$\| J \|$ = matrița-coloană (vectorul) curenților surselor de curent ;

$\| V \|$ = matrița-coloană (vectorul) diferențelor de potențial a punctelor terminale a fiecărei laturi ;

$\| I \|$ = matrița-coloană (vectorul) curenților din fiecare latură ;

$\| Z \|$ = matrița impedanțelor ; și

$\| Y \| = \| Z \|^{-1}$ = matrița admitanțelor.

Matrițele-coloană $\| E \|$, $\| J \|$, $\| V \|$ și $\| I \|$ au cîte l termeni, cîte un termen pentru fiecare latură, înșirați în aceiași ordine în care sînt ordonate laturile în matrița de incidență a grafului asociat. Matrițele $\| Z \|$ și $\| Y \|$ sînt pătratice de ordinul l ; în cauzl cînd nu considerăm acțiuni mutuale între elementele laturilor, aceste matrițe sînt matrițe diagonale.

Cu aceste notații, relațiile (10 a—b) și (11 a—b) se pot scrie condensat pentru întreaga rețea sub forma matricială.

$$\| V \| + \| E \| = \| Z \| . \left\| \| I \| + \| J \| \right\|, \tag{12 a}$$

respectiv

$$\| I \| + \| J \| = \| Y \| . \left\| \| V \| + \| E \| \right\| . \tag{12 b}$$

Într-o rețea electrică se cunosc în genere mărimile E, J și Z sau Y, iar necunoscutele sînt mărimile V și I, deci în total $2l$ necunoscute. Pentru determinarea acestor mărimi necunoscute sînt necesare în consecință $2l$ ecuații. Relațiile (12 a) sau (12 b) ne furnizează l ecuații ; restul de l ecuații se obțin cu ajutorul celor 2 legi ale lui Kirchhof. Prima lege a lui Kirchhof, legea echilibrului curenților, se aplică la $n-1$ secționări independente formînd un sitem fundamental de secționări ; a doua lege a lui Kirchhof, legea echilibrului tensiunilor, se aplică la $l - n + 1$ circuite închise independente formînd un sistem fundamental de circuite închise.

Se știe că printr-o alegere judicioasă a mărimilor necunoscute se simplifică scrierea ecuaților ; aceasta conduce la cunoscutele metode de calcul a rețelelor electrice : metoda tensiunilor nodale și metoda ochiurilor (sau a circuitelor închise).

În cele ce urmează vom deduce expresiile matriciale pentru calculul rețelelor electrice, aplicînd considerentele topologice expuse în capitolul precedent și folosind metoda tensiunilor nodale în 2 variante — metoda tensiunilor la noduri și metoda perechilor de noduri — și metoda ochiurilor.

2.2. *Metoda tensiunilor la noduri.*

În această metodă alegem ca necunoscute diferențele de potențial V_{hn} dintre potențialul V_h a fiecărui nod și potențialul nodului de referință n, deci în total $n - 1$ necunoscute. Notînd cu $\| V_n \|$ matrița-coloană (vectorul)

acestor diferențe de potențial, ordonate în ordinea crescîndă a numerilor nodurilor, și observînd că

$$V_{hi} = V_{hn} - V_{in}$$

se poate scrie relația pe baza definiției matriței de incidență :

$$\| V \| = \| A \|_t \cdot \| V_n \| \cdot \tag{13}$$

Aplicăm prima lege a lui Kirchhof la un sistem fundamental *oarecare* de secționări independente, caracterizat prin matrița sa de conexiune $\| C_y \|$; se poate scrie deci

$$\| C_y \| \cdot \| I \| = 0 \tag{14}$$

Folosind egalitatea (13), relația (12b) devine :

$$\| Y \| \cdot \| B \|_t \cdot \| V_n \| = \| I \| + \| J \| - \| Y \| \cdot \| E \|$$

Premultiplicînd toți termenii acestei relații cu matrița $\| C_y \|$ și ținînd cont de egalitatea (14) obținem :

$$\| C_y \| \cdot \| Y \| \cdot \| A \|_t \cdot \| V_n \| = \| C_y \| \cdot \left\| \| J \| - \| Y \| \cdot \| E \| \right\| = \| C_y \| \cdot \| \bar{J} \| \tag{15}$$

în care am notat pentru prescurtare

$$\| \bar{J} \| = \left\| \| J \| - \| Y \| \cdot \| E \| \right\|$$

Maarița $\| \bar{J} \|$ ține seama de influența pe care o au sursele de tensiune asupra surselor de curent (apariția semnului — înaintea termenului cuprinzînd tensiunile electromotoare se datorește numai convenției de sensuri adoptate în fig. 2).

Ecuația matricolă (15) reprezintă un sistem de $n - 1$ ecuații liniare cu $n - 1$ necunoscute V_{hn} a cărui rezolvare conduce la determinarea acestor necunoscute ; cu ajutorul egalităților (13) și (12b) se deduc apoi și mărimile V respectiv I, ceia ce rezolvă complect problema.

Sistemul de ecuații (15) nu prezintă însă nimic remarcabil, forma ecuațiilor depinzînd de sistemul de secționări ales. Se poate considera însă un sistem fundamental particular de secționări independente, care să dea ecuațiilor (15) o formă remarcabilă ; un asemenea sistem se obține prin secționarea laturilor convergente la fiecare nod, cu excepția nodului de referință. După cum am arătat la punctul 1.3. matrița de conexiune a acestui sistem de secționări este chiar matrița de incidență $\| A \|$. Deci egalitatea (15) se scrie :

$$\| A \| \cdot \| Y \| \cdot \| A \|_t \cdot \| V_n \| = \| A \| \cdot \| \bar{J} \| \tag{16}$$

Vom spune după Glazunov [15] că sistemul de ecuații reprezentat prin ecuația matricială (16) are forma „*canonică*", din cauza existenței

termenului $\| A \| \cdot \| Y \| . \| A \|_t$ în membrul întîi, care dă coeficienților necunoscutelor din ecuațiile (16) forma remarcabilă bine cunoscută. Dacă notăm

$$\| Y' \| = \| A \| \cdot \| Y \| \cdot \| A \|_t \text{ și } \| A \| \cdot \| \bar{J} \| = \| J' \| \tag{17}$$

se obține relația

$$\| Y' \| \cdot \| V_n \| = \| J' \| \tag{18}$$

Relațiile (17) și (18) reprezintă relații asemănătoare relațiilor fundamentale ale lui Kron; forma lor simplă se datorește faptului că am ales un sistem de secționări corespunzător sistemului de necunoscute adoptat. Vom spune că sistemul de secționări reprezentat prin matrița $\| A \|$ și sistemul de necunoscute reprezentat prin matrița $\| V_n \|$ sînt „*canonic conjugate*".

2.3. *Metoda perechilor de noduri.*

La această metodă alegem ca necunoscute diferențele de potențial $V_{fg}^{(a)}$ între punctele terminale ale laturilor arborelui complect ale grafului asociat, deci în total $n - 1$ necunoscute. Notăm cu $\| V_{fg}^{(a)} \|$ matrița-coloană (vectorul) acestor diferențe de potențial ordonate iarăși în ordinea crescîndă a indicilor laturilor arborelui. Să determinăm matrița $\| V \|$ în funcție de $\| V_{fg}^{(a)} \|$; pentru aceasta este necesar să determinăm matrița $\| V_{jk}^{(c)} \|$ a diferențelor de potențial dintre punctele terminale ale laturilor-coarde. În baza relațiilor (5) și (6) avem însă

$$\| V_{jk}^{(c)} \| = \left\| \| A_1 \|^{-1} \cdot \| A_2 \| \right\|_t \cdot \| V_{fg}^{(a)} \| = \| B_1 \| \cdot \| V_{fg}^{(a)} \|$$

și deci

$$\| V \| = \left\| \frac{\| V_{fg}^{(a)} \|}{\| V_{jk}^{(c)} \|} \right\| = \left\| \frac{\| V_{fg}^{(a)} \|}{\| B_1 \| \cdot \| V_{fg}^{(a)} \|} \right\| = \left\| \frac{\| U \| \cdot \| V_{fg}^{(a)} \|}{\| B_1 \| \cdot \| V_{fg}^{(a)} \|} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\| U \|}{\| B_1 \|} \right\| \cdot \| V_{fg}^{(a)} \| = \left\| \| U \| \, \| B_1 \|_t \right\|_t \cdot \| V_{fg}^{(a)} \| \tag{19}$$

Procedăm acum la fel ca la metoda tensiunilor la noduri expusă la punctul precedent; dacă aplicăm prima lege a lui Kirchhof folosind un sistem fundamental oarecare de secționări independente, sistemul de ecuații obținut pentru determinarea mărimilor necunoscute nu va avea forma „canonică". Putem însă alege și în acest caz un sistem fundamental particular de secționări independente care să fie „*canonic conjugat*" cu sistemul de necunoscute adoptat, după cum rezultă din compararea relațiilor (9) și (19). Pentru acest sistem particular de secționări matrița de conexiune are expresia

$$\| C \| = \left\| \| U \| \, \| B_1 \|_t \right\| ,$$

iar fiecare secționare cuprinde o latură a arborelui grafului asociat rețelei și laturi-coarde.

Aplicînd prima lege a lui Kirchhof la sistemul de secționări adoptat, obținem relația.

$$\| C \| \cdot \| I \| = 0 . \tag{20}$$

Folosind egalitatea (19), relația (12b) devine acum

$$\| Y \| \cdot \| C \|_t \cdot \| V_{fg}^{(a)} \| = \| I \| + \| J \| - \| Y \| \cdot \| E \| .$$

Prin premultiplicarea termenilor acestei relații cu matrița $\| C \|$ și luînd în considerare relația (20), obținem :

$$\| C \| \cdot \| Y \| \cdot \| C \|_t \cdot \| V_{fg}^{(a)} \| = \| C \| \cdot \left\| \| J \| - \| Y \| \cdot \| E \| \right\| = \| C \| \cdot \| \bar{J} \|,$$

în care matrița $\| \bar{J} \|$ are semnificația din relația (15).

Dacă notăm iarăși

$$\| Y'' \| = \| C \| \cdot \| Y \| \cdot \| C \|_t \text{ și } \| J'' \| = \| C \| \cdot \| \bar{J} \| \tag{21}$$

obținem relația

$$\| Y'' \| \cdot \| Y_{fg}^{(a)} \| = \| J'' \| \tag{22}$$

care reprezintă relațiile fundamentale ale lui Kron de aceiași formă cu relațiile (17) și (19) de mai sus. Continuarea mai departe a calculelor pentru rezolvarea complectă a problemei cu metoda perechilor de noduri se face în mod cu totul analog ca și la metoda tensiunilor al noduri.

2.4. *Metoda ochiurilor* (a circuitelor închise sau a curenților ciclici).

La această metodă luăm ca necunoscute nu diferențe de potențial ci intensități de curent ; din cei l curenți I_{hi} necunoscuți, prima lege a lui Kirchhof aplicată la $n - 1$ noduri permite să calculăm $n - 1$ curenți în funcție de ceilalți $l - n + 1$ curenți pe care îi vom alege ca necunoscute. În acest scop adoptăm ca necunoscute intensitățile curenților I_{jk} din laturile-coarde ale grafului asociat rețelei, care sînt în număr de $l - n + 1$ și notăm cu $\| I_{jk}^{(c)} \|$ matrița acestor curenți, în care termenii sînt ordonați în ordinea crescîndă a indicilor laturilor-coarde. Să determinăm matrița $\| I \|$ în funcție de $\| I_{jk}^{(c)} \|$; pentru aceasta este necesar să determinăm matrița $\| I_{fg}^{(a)} \|$ a curenților din laturile arborelui grafului asociat.

Aplicarea primei legi a lui Kirchhof la primele $n - 1$ noduri conduce la relația

$$\| A \| \cdot \| I \| = \left\| \| A_1 \| \; \| A_2 \| \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \| I_{fg}^{(a)} \| \\ \hdashline \| I_{jk}^{(c)} \| \end{matrix} \right\| = \| A_1 \| \cdot \| I_{fg}^{(a)} \| + \| A_2 \| \cdot \| I_{jk}^{(c)} \| = 0$$

deci

$$\| I_{fg}^{(a)} \| = - \| A_1 \|^{-1} \| \cdot \| A_2 \| \cdot \| I_{jk}^{(c)} \| = - \| B_1 \|_t \cdot \| I_{jk}^{(c)} \|$$

și

$$\| I \| = \left\| \frac{\| I_{fg}^{(a)} \|}{\| I_{jk}^{(c)} \|} \right\| = \left\| \frac{-\| B_1 \|_t \cdot \| I_{jk}^{(c)} \|}{\| I_{jk}^{(c)} \|} \right\| = \left\| \frac{-\| B_1 \|_t \cdot \| I_{jk}^{(c)} \|}{\| U \| \cdot \| I_{jk}^{(c)} \|} \right\} =$$

$$= \left\| \frac{-\| B \|_t}{\| U \|} \right\| \cdot \| I_{jk}^{(c)} \| = \| - \| B_1 \| \vdots \| U \| \|_t \cdot \| I_{jk}^{(c)} \| \qquad (23)$$

Aplicăm acum a doua lege a lui Kirchhof la $l - n + 1$ circuite închise independente pentru a stabili sistemul de ecuații liniare necesar determinării necunoscutelor; pentru aceasta este necesar să alegem un sistem fundamental *oarecare* de circuite închise independente, definit prin matrița sa de conexiune $\| B_x \|$.

Obținem astfel relația $\| B_x \| \cdot \| V \| = 0$

Procedînd în acest mod, sistemul de ecuații obținut nu va avea forma „canonică"; putem alege însă și în acest caz un sistem fundamental particular de circuite închise independente, care să fie „canonic conjugat" cu sistemul de necunoscute adoptat, după cum rezultă din compararea relațiilor (5) și (23). Pentru acest sistem particular de circuite închise, matrița de conexiune are expresia

$$\| B \| = \| - \| B_1 \| \vdots \| U \| \|,$$

iar fiecare circuit închis este format dintr-o latură-coardă și laturi ale arborelui grafului asociat rețelei.

Aplicînd cea de a doua lege a lui Kirchhof la sistemul de circuite închise adoptat, obținem relația

$$\| B \| \cdot \| V \| = 0 \qquad (24)$$

Folosind egalitatea (23), relația (12a) devine:

$$\| Z \| \cdot \| B \|_t \cdot \| I_{jk}^{(c)} \| = \| V \| + \| E \| - \| Z \| \cdot \| J \|$$

Prin premultiplicarea termenilor acestei relații cu matrița $\| B \|$, și luînd în considerare relația (24), obținem

$$\| B \| \cdot \| Z \| \cdot \| B \|_t \cdot \| I_{jk}^{(c)} \| = \| B \| \cdot \| \| E \| - \| Z \| \cdot \| J \| \| = \| B \| \cdot \| \bar{E} \|$$

în care am introdus notația

$$\| \bar{E} \| = \| E \| - \| Z \| \cdot \| J \|.$$

Matrița $\| \bar{E} \|$ ține seama de influența pe care o au sursele de curent asupra surselor de tensiune (apariția semnului — înaintea termenului cuprinzînd curenții surselor de curent se datorește iarăși convenției de sensuri adoptate în fig. 2).

Dacă notăm și în acest caz

$$\| Z' \| = \| B \| \cdot \| Z \| \cdot \| B \|_t \quad \text{și} \quad \| E' \| = \| B \| \cdot \| \bar{E} \| \qquad (25)$$

obținem relația

$$\| Z' \| \cdot \| I_{jk}^{(c)} \| = \| E' \| \tag{26}$$

care reprezintă pentru cazul folosirii metodei ochiurilor, relațiile fundamentale ale lui Kron, de aceiași formă ca relațiile (17) și (18) sau (21) și (22) de mai sus. Pentru rezolvarea completă a problemei, aflăm rădăcinile sistemului de ecuații (26) și cu ajutorul relațiilor (23) și (12a) deducem toate mărimile necunoscute.

ANEXA I

Demonstrația relațiilor (7a) și (7b)

Considerăm un rînd oarecare din matrița $\| B' \|$ care se referă la un circuit închis β; notăm cu $b_{hi}^{(h)}$ termenul din acest rînd care se referă la o latură oarecare L_{hi}. Considerăm deasemenea un rînd oarecare din matrița $\| C' \|$, care se referă la o secționare γ; notăm cu $c_{hi}^{(\gamma)}$ termenul din acest rînd care se referă la aceiași latură L_{hi}. Matrițele $\| B' \|$ și $\| C' \|$ au același număr de coloane, cîte o coloană pentru fiecare latură, ordinea coloanelor fiind aceiași în ambele matrițe. Pentru a demonstra relația

$$\| B' \| \cdot \| C' \|_t \equiv \| C' \| \cdot \| B' \|_t \equiv 0$$

este suficient să demonstrăm identitatea

$$\sum b_{hi}^{(\beta)} \cdot c_{hi}^{(\gamma)} \equiv 0$$

Termenii $b_{hi}^{(\beta)}$ și $c_{hi}^{(\gamma)}$ sînt ambii diferiți de zero dacă și numai dacă latura L_{hi}, făcînd parte din circuitul închis β, este tăiată de secționarea γ; dacă nu există nici o latură în această situație, atunci suma de mai sus este nulă.

Dacă există însă o latură L_{hi} în circuitul închis β care este tăiată de secționarea γ, atunci trebuie să existe în circuitul închis β exact încă o latură L_{jk} care să fie secționată de aceiași secționare γ. În consecință dacă există o latură într-un circuit închis pentru care produsul $b^{(\beta)} \cdot c^{(\gamma)} \neq 0$, atunci mai există o latură și numai una în aceiași situație. Ori este ușor de văzut că dacă pentru ambele laturi în matrița $\| B' \|$ termenii b au valorile $+1$ sau -1, atunci termenii c din matrița $\| C \|$ au unul valoarea $+1$ și celălalt valoarea -1 și invers; deci suma produselor $b^{(\beta)} \cdot c^{(\gamma)}$ pentru ambele laturi secționate trebuie să fie egală cu zero.

ANEXA II

Exemplu

Considerăm graful din fig. II-1, cu $n = 11$ laturi; numerotarea nodurilor — făcută fără nici o regulă — și a laturilor este indicată în figură. Nodul 6 este nodul de referință.

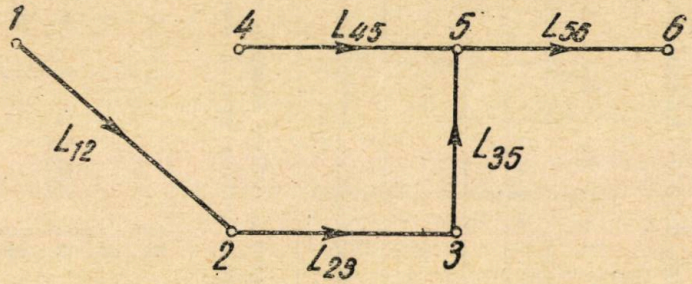


Fig. II-2
Subgraful „ arbore "

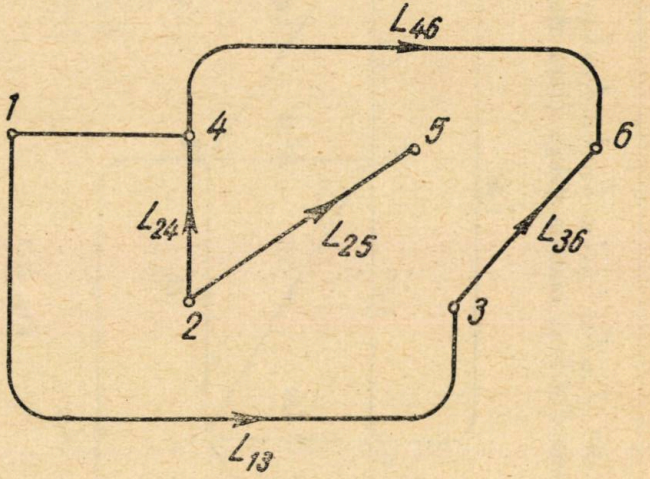


Fig II-3
Subgraful „coarde"

Laturile existente sînt : $L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{23}, L_{24}, L_{25}, L_{35}, L_{36}, L_{45}, L_{46}$ și L_{56}. Deci matrița de incidență $\|A'\|$ și matrița $\|A\|$, (fără rîndul referitor la

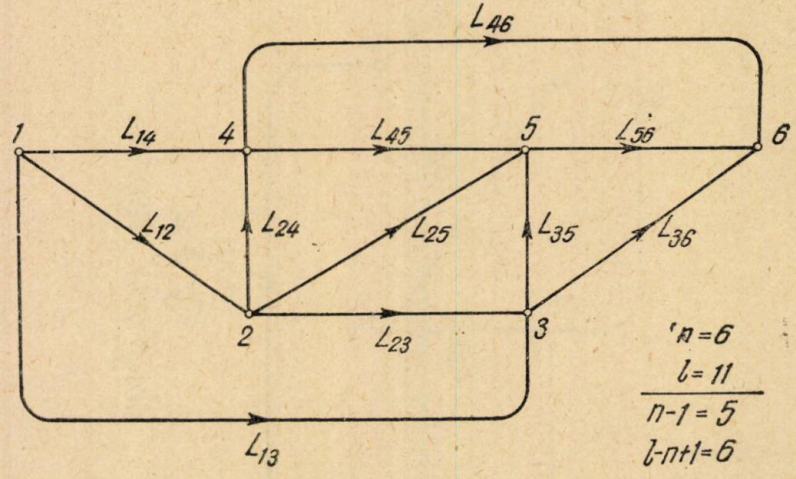


Fig. II-1

nodul 6), cu laturile repartizate în cele 2 categorii — laturile arboreluĭ complet și laturile-coarde —, sînt date de tabloul următor :

nod \ atură	L_{12}	L_{23}	L_{35}	L_{45}	L_{56}	L_{13}	L_{14}	L_{24}	L_{25}	L_{36}	L_{46}
1	+1	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0
2	−1	+1	0	0	0	0	0	+1	+1	0	0
3	0	−1	+1	0	0	−1	0	0	0	+1	0
4	0	0	0	+1	0	0	−1	−1	0	0	+1
5	0	0	−1	−1	+1	0	0	0	−1	0	0
6	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	−1	−1

Figurile II-2 și II-3 indică subgraful *arbore complet* resp. subgraful *coarde*. corespunzător numerotării adoptate pentru graful dat. Marițele $\|A_1\|$ și $\|A_2\|$ sînt în acest caz :

$$\|A_1\| = \begin{Vmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{Vmatrix} \quad \|A_2\| = \begin{Vmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Rezultă atunci

$$\| B_1 \| = \left\| \| A_1 \|^{-1} \cdot \| A_2 \| \right\|_t = \left\| \begin{array}{rrrrr} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{array} \right\|$$

Sistemul fundamental particular de circuite închise independente (cu $l - n + 1 = 6$ circuite închise), fiecare circuit fiind format dintr-o latură coardă și din laturi ale arborelui grafului, este indicat în fig. II-4.

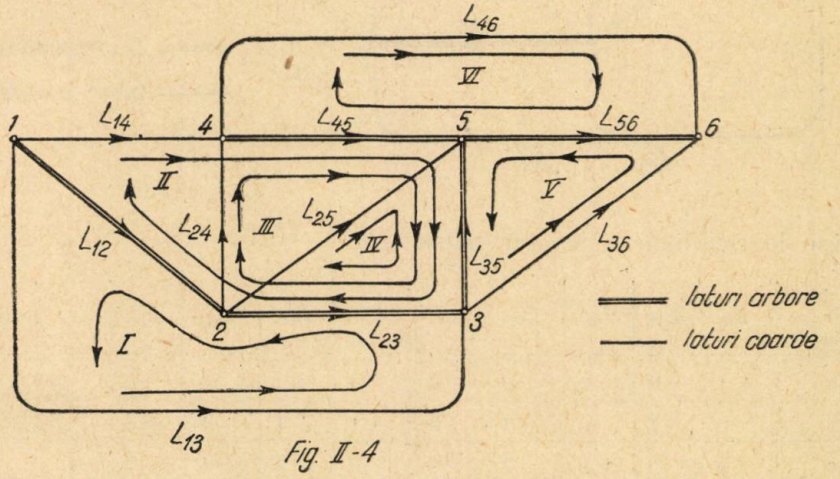


Fig. II-4

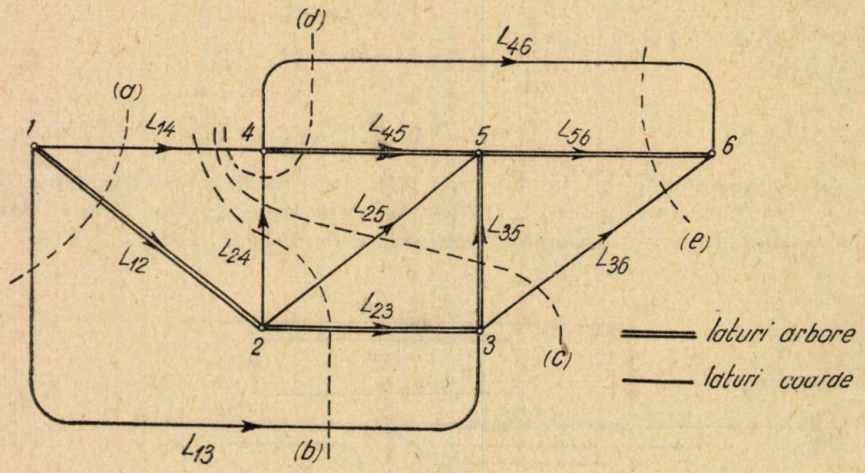
Matrița de conexiune a acestui sistem este :

latura / circuit	L_{12}	L_{23}	$L_{3\varepsilon}$	L_{45}	L_{56}	L_{13}	L_{14}	L_{24}	L_{25}	L_{36}	L_{46}
I	−1	−1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0
II	−1	−1	−1	+1	0	0	+1	0	0	0	0
III	0	−1	−1	+1	0	0	0	+1	0	0	0
IV	0	−1	−1	0	0	0	0	0	+1	0	0
V	0	0	−1	0	−1	0	0	0	0	+1	0
VI	0	0	0	−1	−1	0	0	0	0	0	+1

Se vede că această matriță este de forma

$$\| B \| = \| - \| B_1 \| \vdots \| U \| \|$$

Sistemul fundamental particular de secționări independente (cu $n - 1 = 5$ secționări), fiecare secționare tăind o latură a arborelui și laturi-coarde ale grafului, este indicat în fig. II-5.



Matrița de conexiune a acestui sistem este

latura / secționare	L_{12}	L_{23}	L_{35}	L_{45}	L_{56}	L_{13}	L_{14}	L_{24}	L_{25}	L_{36}	L_{46}
a	+1	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0
b	0	+1	0	0	0	+1	+1	+1	+1	0	0
c	0	0	+1	0	0	0	+1	+1	+1	+1	0
d	0	0	0	+1	0	0	−1	−1	0	0	+1
e	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	+1	+1

Se vede că această matriță este de forma

$$\| C \| = \left\| \| U \| \vdots \| B_1 \|_t \right\|$$

BIBLIOGRAFIE

1. *G. Kron* : Tensor Analysis of Networks. Wiley, New-York, 1939.
2. *W. Cauer* : Theorie der Linearen Wechselstromschaltungen. Akademische Verlagsgeselschaft, Leipzig 1941.
3. *P. Le Corbeiller* : Matrix Analysis of Electric Networks. Harv ard University Press 1949 (traducere franceză : Analyse matricielle des réseaux électriques. Dunod, Paris, 1954).

4. *I. Antoniu* : Rețelele primitive ale lui Kron și aplicația lor la calculul curenților electric. Lucrare prezentată la Sesiunea Științifică a Cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 31 oct.—1 noiembrie 1959.
I. Antoniu : Introducere în aplicarea calculului matricial la studiul curenților electrici. Editura Academiei R.P.R. București, 1953.
5. *C. Mocanu* : O teoremă în studiul rețelelor electrice prin calcul matricial. Studii și Cercetări de Energetică 6 (1956) p. 473—504.
C. Mocanu : Cercetări asupra topologiei rețelelor electrice. Bul. Științific al Academiei Militare Tehnice, 2 (1956), 2, p. 115—141.
C. Mocanu : Asupra topologiei rețelelor electrice. Ibid, 2, (1956), 3, p. 91—105.
C. Mocanu : Transformările topologice ale rețelelor electrice. Bul. Ins. Politehnic București 9 (1957), p. 215—253.
6. *Al. Fransua* : Cîteva precizări în legătură cu aplicarea de către G. Kron al calculul matricial în studiul rețelelor electrice complexe. Studii și Cercetări de Energetică 6 (1956), p. 461—73.
7. *M. Preda* : Considerații asupra aplicării calculului matricial în studiul rețelelor electrice. Electrotehnica 5, (1957, p. 134—38.
8. *D. König* : Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Academische Verlagsgeselschaft, Leipzig 1931 și Chelsea New York 1950.
9. *O. Veblen* : Analysis situs. American Mathematical Society, 1931.
10. *C. Berge* : Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris 1958.
11. *S. Lefschetz* : Introduction to Topology. Princeton University Press. 1949.
12. *H. Edelmann* : Allgemeine Grundlagen der Netzberchnung mit Inzidenzmatrizen. Archiv für Elektrotechnik 44 (1960), 7, pag. 419—440.
H. Edelmann : Die Inzidenzmatrizen der Schnittmengen eines Netzes. Ibid. 46 (1960), 5, p. 347—356.
13. *M. B. Reed* și *S. Seshu* : On Topology and Network Theory. Proceedings of the Symposium on Circuit Analysis, University of Illinois, Urbana, 1955.
14. *M. Bercovici* : Calculul circulației curenților în rețelele electrice buclate cu ajutorul mașinilor de calcul numeric. Probleme de automatizare. Extrase din lucrările prezentate la Consfătuirea asupra mașinilor electronice de calcul. Ianuarie 1960. Edit. Academiei R.P.R. București 1960, p. 57—60.
15. *A. A. Glazunov* : Electriceskie seti i sistemi. Ediția III-a. Gosenergoizdat 1954, p. 313—17.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С МАТРИЦАМИ

(Резюме)

В работе приводятся уравнения Крона для расчета электрических сетей при помощи матриц, без применения „элементарных“ сетей или других вспомогательных сетей, и без применения принципа инвариантности рассеянной мощности в сети.

Для этой цели, в первой части работы приводятся различные соображения по топологии сетей, при помощи матрицы схем, контур и разрезов; во второй части работы приводятся методы расчета при помоши матриц электических сетей (метод контур, напряжеий в узлах и парных узлов), используя результаты, полученные в первой части работы.

Доказано, что метод Крона состоит в сущност в написании уравнений сети в *„канонической форме"*, на основании выбора системы контур и системы разрезов соответсвенно системы, неизвестных принятых в каждом методе (названные в работе *„канонически связанные системы"*).

MATRIX COMPUTATION OF ELECTRIC NETWORKS

(Summary)

In the present paper Kron's relations for the matrix computation of electric networks are deducted without having recourse to the concept of primitive networks or of other auxiliary networks, and without making use of the principle of invariance of power dissipated in the networks. To this end, in the first part of the paper a series of considerations of networks topology are exposed by using matrices of incidence of graphs, meshes and cut-sets; in the second part of the paper the methods of matrix computation of electrical networks (the method of mesh currents, of node voltages and of pairs of nodes) making use of the results arrived at in the first part of the paper are given.

It is being proved that Kron's procedure is essentially a method of writing the network equations in a „canonic" form, by chosing the system of meshes, or the system of cut-sets, corresponding to the system of unknowns adopted in each method (which are called in the present paper „canonically conjugated systems").

CALCUL MATRICIEL DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES

(Résumé)

Dans le présent travail on déduit les relations de Kron pour le calcul matriciel des réseaux électriques, sans faire appel aux notions de réseaux primitifs ou d'autres réseaux auxiliaires et sans utiliser le principe de l'invariance de la puissance dissipée dans le réseau. À cette fin, dans la première partie du travail on expose quelques considérations de topologie des réseaux, à l'aide des matrices d'incidence des graphes, des mailles et des sectionnements; dans la seconde partie du travail on présente les méthodes du calcul matriciel des réseaux électriques (méthode des courants de mailles, des tensions aux noeuds et des paires de noeuds) en utilisant les résultats obtenus dans la première partie du travail.

On démontre que le procédé de Kron consiste en essence dans l'ecriture des équations des réseaux sous forme „canonique", par un choix convenable des systèmes des mailles, respectivement des sectionnements par rapport au système des inconnues choisi dans chaque méthode (dénomées dans l'article „systèmes canoniquement conjugués").

MATRIZENRECHNUNG ELEKTRISCHER NETZE

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Abhandlung werden die Kron'sche Gleichungen für die Berechnung der elektrischen Netzwerke mittels Matrizen aufgestellt ohne dabei vom Begriff der „primitiven Netze" oder anderen Hilfsnetze sowie vom Grundsatz der Invarianz der Netzverluste gebrauch zu machen.

Zu diesem Zweck werden im ersten Teil der Abhandlung einige Sätze der Netztopologie mittels der Inzidenzmatrizen der zugehörigen Graphen, der Maschen und der Schnitte wiedergegeben ; im zweiten Teil der Abhandlung werden alsdann, unter Benützung der im ersten Teil aufgeführten Resultate, die Methoden der Matrizenrechnung für elektrische Netzwerke (Methoden der Maschenströme, der Knotenpunktspannungen und der Spannungen der Knotenpunktpaare) angegeben. Es wird dadurch der Beweis erbracht, dass der von Kron eingeschlagener Weg im Grunde in einer „kanonischer" Schreibweise der Netzgleichungen besteht, durch eine geeignete Fahl der Maschensysteme, bzw. der Schnittmengen mit Bezug auf die bei jeder Methode gewählten Unbekanntensysteme (benannt in der Abhandlung „Kanonisch konjugierte Systeme").

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola II

SINTEZA GENERALĂ A SISTEMELOR AUTOMATE LINIARE PRIN INTERMEDIUL CARACTERISTICILOR LOGARITMICE ATENUARE-FRECVENȚĂ ALE SISTEMELOR ÎN STARE DESCHISĂ*)

de S. CĂLIN

A. *Considerațiuni introductive*

Prin sinteza generală a unui sistem automat se înțelege determinarea elementelor sale componente și a parametrilor lor (cu excepția porțiunii sistemului care este fixată prin datele inițiale și care în majoritatea cazurilor cuprinde instalația supusă automatizării), astfel încît sistemul proiectat să satisfacă în funcționare anumite performanțe impuse, soluția fiind cît mai simplă și mai economică. De regulă, performanțele impuse se referă la suprareglajul maxim $\Delta x_{e\cdot max}$ la durata procesului tranzitoriu t_r și la eroarea staționară E_s.

Dacă se presupun cunoscute elementele componente ale sistemului cu parametrii lor, iar operația de proiectare se restrînge asupra unui singur element suplimentar — elementul de corecție — care are rolul de a aduce performanțele sistemului la nivelul impus, atunci sinteza generală se reduce la sinteza elementelor de corecție, care este mult mai simplă.

Sinteza generală a sistemelor automate, reprezentînd în esență proiectarea acestora, este o operație laborioasă chiar pentru sistemele liniare, ea efectuîndu-se de regulă în planul complex și cuprinzînd următoarele trei etape:

a) transpunerea performanțelor impuse sistemului într-o repartiție corespunzătoare a polilor și zerourilor funcției de transfer Y_o (s) a sistemului închis, obținîndu-se estfel expresia acestei funcții;

b) trecerea de la funcția de transfer Y_0 (s) obținută pentru sistemul închis la expresia corespunzătoare a funcției de transfer Y (s) a aceluiași sistem în stare deschisă (cu reacția principală întreruptă) pentru a se putea determina elementele componente ale sistemului;

c) determinarea parametrilor elementelor componente și realizarea lor fizică, astfel încît să se obțină funcția de transfer Y (s).

Primele două etape sînt cele mai laborioase, necesitînd numeroas calcule, reprezentări grafice și eventual mai multe încercări pentru obținerea soluției.

*) Comunicare prezentată la a VI-a sesiune a cadrelor didactice din IPB, 17—18 decembrie 1960.

În ultima vreme a căpătat o largă răspîndire în sinteza sistemelor automate metoda hodografului rădăcinilor ecuației caracteristice în planul complex [1], [2], care are avantajul că permite o apreciere simultană a performanțelor sistemului în regim tranzitoriu și staționar, proiectarea rămînînd însă destul de complicată.

În lucrarea de față este prezentată o metodă de sinteză generală prin intermediul caracteristicilor logaritmice atenuare-frecvență ale sistemului deschis, care conduce direct la obținerea funcției de transfer a sistemului deschis Y (s) în conformitate cu performanțele impuse, proiectarea simplificîndu-se sensibil prin eliminarea primei etape menționate mai sus.

Sinteza generală prin intermediul caracteristicilor logaritmice atenuare-frecvență ale sistemului în stare deschisă se bazează pe aceleași principii ca și sinteza generală în planul complex prin repartiția poli-zerouri și anume :

— procesul tranzitoriu este în esență determinat prin plasarea corespunzătoare a celor doi poli dominanți în conformitate cu performanțele impuse regimului tranzitoriu, ceilalți poli și zerourile urmînd să fie astfel plasate încît să nu exercite decît o influență neglijabilă asupra procesului tranzitoriu (fie foarte departe de axa imaginară în comparație cu polii dominanți, fie sub formă de dipoli) ;

— după asigurarea performanțelor impuse în regim tranzitoriu se verifică factorul total de amplificare al sistemului deschis, care determină eroarea staționară ; în cazul cînd eroarea staționară nu se găsește în limitele impuse, se adaugă zerouri și poli pentru mărirea factorului total de amplificare pînă la valoarea prescrisă, fără însă a se modifica decît în mod neînsemnat procesul tranzitoriu definit de polii dominanți.

Simplificarea importantă pe care o introduce sinteza prin intermediul caarcteristicilor logaritmice constă în faptul că în timp ce la sinteza în planul complex se stabilește expresia completă pentru Y_0 (s) și apoi se face trecerea la expresia Y (s) corespunzătoare, la sinteza prin caracteristicile logaritmice corespondența între caracteristicile sistemului închis și deschis se stabilește pentru reprezentări simplificate ale acestora, în care apar numai punctele de frîngere corespunzătoare polilor dominanți. În plus, trecerea de la caracteristica logaritmică a sistemului închis la cea a sistemului deschis și invers se face foarte ușor grafic, relațiile analitice fiind de asemenea foarte simple.

B. *Expunerea metodei*

Să presupunem că se dă instalația supusă automatizării IA (fig. 1) avînd de exemplu o funcție de transfer de tipul

$$Y_2(s) = \frac{k_2}{s(s + p_2)} = \frac{k_2}{s(s + \omega_2)} \qquad (1)$$

(cu un pol în origină și un pol la $-p_2 = -\omega_2$) și se cere să se efectueze sinteza generală a sistemului automat astfel încît durata procesului tranzitoriu t_r, suprareglajul maxim $\Delta x_{e \cdot max}$. și eroarea staționară E_s să fie mai mici sau

cel mult egale cu valorile timpuse t_{ri}, $\Delta x_{e \cdot max \cdot i}$, E_{si} :

$$\left.\begin{aligned} t_r &\leqslant t_{ri} \\ \Delta x_{e \cdot max \cdot} &\leqslant \Delta x_{e \cdot max \cdot i} \\ E_s &\leqslant E_{si} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Soluția va trebui să cuprindă expresia funcției de transfer Y_1 (s) a elementelor dispozitivului de automatizare *DA*, care se adaugă instalației automatizate *IA*, astfel încît sistemul în ansamblu să satisfacă toate performanțele impuse.

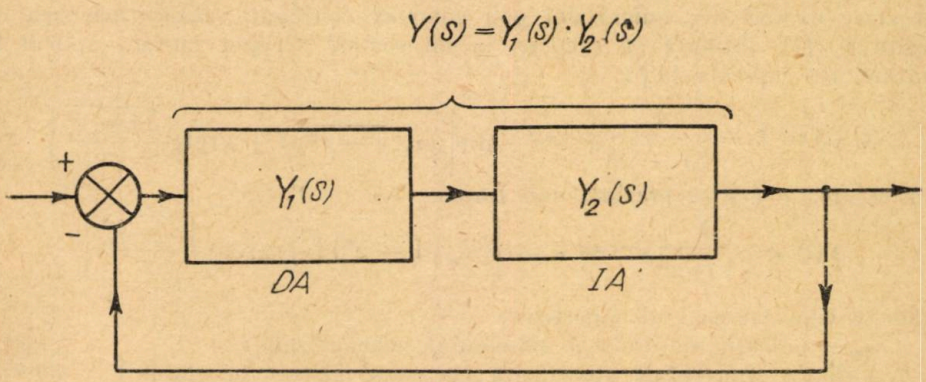


Fig. 1

Întrucît funcția de transfer a sistemului deschis Y (s) are forma

$$Y(s) = Y_1(s) \cdot Y_2(s) \tag{3}$$

problema este rezolvată dacă se determină expresia Y (s), întrucît apoi rezultă imediat

$$Y_1(s) = Y(s) \cdot \frac{1}{Y_2(s)} \tag{4}$$

Mersul calculului va fi următorul :

a. În conformitate cu performanțele impuse regimului tranzitoriu se determină frecvența de frîngere ω_n a caracteristicii logaritmice atenuare-frecvență A_o (ω) a sistemului închis, considerînd numai polii dominanți.

b. Se determină frecvența de frîngere ω_a și frecvența de tăiere ω_c pentru caracteristica logaritmică atenuare-frecvență A_s (ω) a sistemului deschis, corespunzătoare caracteristicii obținută anterior.

c. Se verifică pe caracteristica A_s (ω) valoarea factorului total de amplificare al sistemului deschis ; în cazul cînd acesta nu asigură eroarea staționară impusă se introduc noi puncte de frîngere (cu reducerea pantei și cu creșterea acesteia), ceea ce în repartiția poli-zerouri din planul complex se traduce prin introducerea unor zerouri și poli suplimentari.

d. Se compară excesul de poli asupra zerourilor pentru funcția de transfer Y (s) obținută și pentru funcția Y_2 (s), iar la nevoie se mai introduc puncte de frîngere în zona frecvențelor înalte (respectiv poli depărtați de axa imaginară) care nu modifică decît în măsură neînsemnată procesul tranzitoriu. Pe cît posibil, se caută să fie comuni unii dintre polii funcțiilor de transfer Y_2 (s) și Y (s), ceea ce simplifică considerabil expresia funcției de transfer Y_1 (s) și realizarea fizică a dispozitivului de automatizare DA.

e. Se determină funcția de transfer Y_1 (s) cu ajutorul relației (4).

a. *Determinarea frecvenței de frîngere* ω_n *a caracteristicii atenuare frecvență* A_0 (ω) *a sistemului închis considerînd numai polii dominanți.*

După cum se știe dacă funcția de transfer Y_o (s) a unui sistem automat în stare închisă are numai doi poli complex conjugați, atunci mărimea de ieșire x_e (t) obținută ca răspuns la un semnal treaptă unitară aplicat la intrare are expresia [1]:

$$x_e(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \cdot \sin\left[(\omega_n\sqrt{1-z^2})\,t + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right] \quad (5)$$

iar eroarea e (t) se prezintă sub forma

$$e(t) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \cdot \sin\left[(\omega_n\sqrt{1-z^2})\,t + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right] \quad (6)$$

unde z este factorul de amortizare

ω_n — pulsația naturală a sistemului neamortizat.

Variația sinusoidală amortizată (în cazul sistemelor stabile) a mărimii de ieșire x_e (t) și a erorii e (t) va fi cuprinsă (fig. 2) între curbele exponențiale definite de expresiile

$$1 - \frac{1}{\pm\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \text{ și } \frac{1}{\pm\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t}$$

Durata procesului tranzitoriu t_r reprezintă intervalul de la aplicarea semnalului treaptă unitară la intrare ($t = 0$) și pînă în momentul în care eroarea devine mai mică decît 5% din valoarea staționară x_{es} a mărimii de ieșire, fără a mai depăși ulterior această valoare. Presupunînd că pentru mărimi de intrare în treaptă sistemul are eroarea staționară nulă, deci $x_{es} = x_i = 1$ (ceea ce corespunde funcției de transfer Y_2 (s) dată inițial, întrucît aceasta are un pol în origină) durata t_r va fi cuprinsă între $t = 0$ și momentul cînd curba x_e (t) intră în gama indicată în fig. 2 — între $x_e = 0{,}95$ și $x_e = 1{,}05$ — fără să o mai părăsească ulterior.

Din fig. 2 b rezultă că în mod obligatoriu condiția

$$t_r \leqslant t_{ri}$$

va fi satisfăcută dacă după un timp egal cu t_{ri} de la aplicarea semnalului la intrare exponențiala

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t}$$

care încadrează variația erorii e (t) va intra în banda de $\pm 0{,}05$.

Rezultă deci că performanța impusă duratei procesului tranzitoriu va fi asigurată dacă este satisfăcută relația

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t_{rt}} = 0{,}05 \tag{7}$$

Performanțele impuse (2) cuprind și valoarea suprareglajului maxim $\Delta x_{e\,max} \cdot i$. Pentru sistemele ale căror funcții de transfer în stare închisă $Y_0(s)$ au numai doi poli complex conjugați există o corespondență precisă [2]

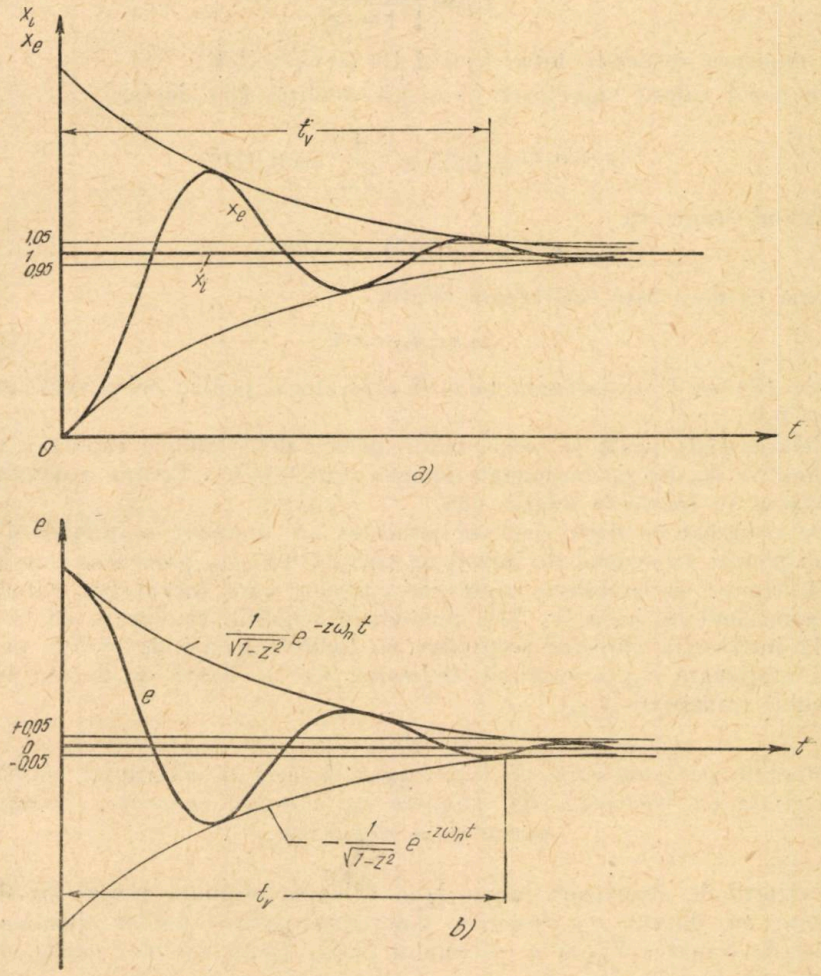


Fig. 2

între $\Delta x_{e \cdot max}$ și z și prin urmare performanța $\Delta x_{e \cdot max \cdot i}$ conduce la o valoare impusă z_i pentru factorul de amortizare.

Înlocuind în (7) pe z cu z_i se obține

$$\frac{1}{\sqrt{1 - z_i^2}} e^{-z_i \omega_n t_{ri}} = 0{,}05 \tag{8}$$

unde singura necunoscută rămîne ω_n, care se determină ușor.

Întrucît pentru sistemele automate se prescriu de regulă valori ale factorului de amortizare cuprinse între $z_i = 0{,}5$ și $z_i = 0{,}9$, valoarea expresiei

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{1 - z_i^2}}$$

va fi cuprinsă respectiv între $C_i = 1{,}15$ și $C_i = 2{,}3$.

În cazul valorii superioare $C_i = 2{,}3$ condiția (8) devine

$$e^{-z_i \omega_n t_{ri}} = 0{,}05 \times \frac{1}{2{,}3} = 0{,}0217 \tag{9}$$

Ținînd seama că

$$e^{-4} \cong 0{,}01831 < 0{,}0217$$

înseamnă că dacă este satisfăcută relația

$$z_i \, \omega_n \, t_{ri} = 4 \tag{10}$$

condiția (8) va fi satisfăcută în mod obligatoriu pentru orice valori z_i pînă la $z_i = 0{,}9$.

Relația (10) poate fi recomandată pentru determinarea rapidă a valorii aproximative ω_n din performanțele impuse prin z_i și t_{ri}. Pentru o determinare mai exactă se folosește relația (8).

De remarcat că dacă sistemul proiectat are o eroare staționară diferită de zero pentru un semnal de intrare în treaptă unitară, procedeul este analog cu cel expus : se stabilesc expresiile curbelor care încadrează variația în timp a mărimii de ieșire x_e (t), punîndu-se condiția ca durata de la $t = 0$ pînă la intersecția curbelor respective cu limitele gamei de $\pm 5\%$ în jurul valorii staționare x_{es} a mărimii de ieșire, să fie egală cu durata impusă procesului tranzitoriu t_{ri}.

b. *Determinarea caracteristicii logaritmice* A (ω) *a sistemului deschis în conformitate cu frecvența de frîngere* ω_n *obținută anterior, considerînd numai polii dominanți.*

Factorul de amortizare impus z_i și valoarea obținută pentru ω_n în conformitate cu durata t_{ri} prescrisă determină poziția polilor dominanți ai funcției de transfer $Y_o(s)$ a sistemului închis (polii complex conjugați $-p_\alpha$ și $-p_\beta$ din fig. 3), întrucît

$$|p_\alpha| = |p_\beta| = \omega_n \quad \text{și} \quad \theta_i = \arccos z_i$$

Expresia funcției de transfer $Y_o(s)$, considerînd numai polii dominanți, va fi [3].

$$Y_o(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 z_i \omega_n s + \omega_n^2} \tag{11}$$

Numărătorul expresiei $Y_o(s)$ este ω_n^2 deoarece funcția $Y_2(s)$ dată inițial prin (1) are un pol în origină și prin urmare și funcția $Y(s)$ din (3) — a întregului sistemîn stare deschisă — va avea un pol în origină; după cum se știe, în acest caz $Y_o(0) = 1$, ceea ce se obține în (11) prin adoptarea numărătorului egal cu ω_n^2.

Caracteristica logaritmică asimptotică atenuare-frecvență $A_0(\omega)$ a sistemului închis, corespunzătoare expresiei (11) are aspectul din fig. 4 (caracteristica a).

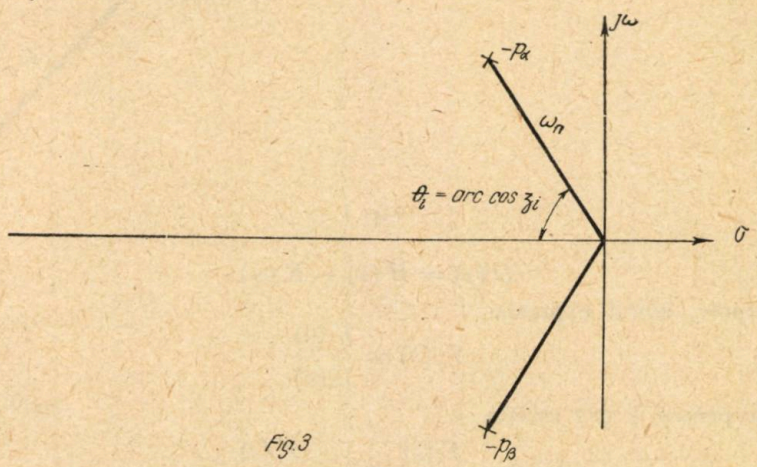


Fig. 3

Pentru trecerea la sistemul deschis trebuie găsite funcția de transfer $Y_s(s)$ și caracteristica asimptotică atenuare-frecvență $A_s(\omega)$ pentru sistemul deschis simplificat care ar conduce în stare închisă la funcția de transfer $Y_0(s)$ din (11) și la caracteristica $A_0(\omega)$ din fig. 4, asigurînd astfel satisfacerea performanțelor z_i și t_{ri} din regimul tranzitoriu.

Relațiile dintre funcțiile de transfer $Y_0(s)$ și $Y(s)$ ale unui sistem automat în stare închisă și deschisă sînt cunoscute [3]. Astfel, dacă notăm

$$Y(s) = \frac{K(s)}{D(s)}$$

atunci se obține (presupunînd că reacția principală este directă)

$$Y_o(s) = \frac{Y(s)}{1 + Y(s)} = \frac{\frac{K(s)}{D(s)}}{1 + \frac{K(s)}{D(s)}} = \frac{K(s)}{K(s) + D(s)} = \frac{K(s)}{H(s)}$$

unde deci

$$H(s) = K(s) + D(s)$$

respectiv

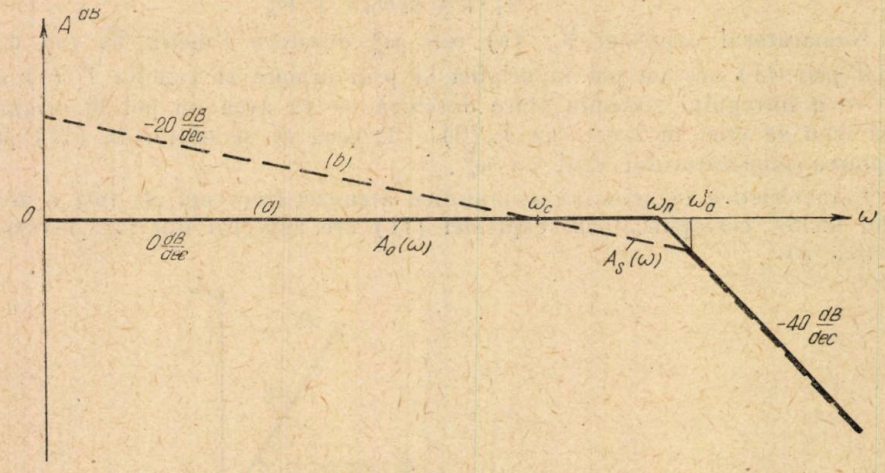


Fig. 4

$$D(s) = H(s) - K(s)$$

Reciproc, avînd expresia

$$Y_o(s) = \frac{K(s)}{H(s)}$$

se obține pentru Y (s) relația

$$Y(s) = \frac{K(s)}{D(s)} = \frac{K(s)}{H(s) - K(s)} \tag{12}$$

Aplicînd relația (12) la funcția de transfer Y_0 (s) din (11) unde

$$K(s) = \omega_n^2$$
$$H(s) = s^2 + 2 z_i \omega_n s + \omega_n^2$$

rezultă funcția de transfer Y_s (s) a sistemului deschis simplificat, care în stare închisă conduce la funcția de transfer Y_0 (s) din (11) :

$$Y_s(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 z_i \omega_n s} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2 z_i \omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_a)} \tag{13}$$

sau

$$Y_s(s) = \frac{\omega_n}{s(s + 2 z_i \omega_n)} = \frac{\frac{\omega_n}{2 z_i}}{s\left(\frac{s}{2 z_i \omega_n} + 1\right)} = \frac{K_{vs}}{s\left(\frac{s}{2 z_i \omega_n} + 1\right)} \tag{14}$$

unde $\omega_a = 2\, z_i\, \omega_n$ este frecvența de frîngere a caracteristicii $A_s\ (\omega)$ corespunzătoare prezenței unui pol la $-p_a = -\omega_a$ în repartiția poli-zerouri a funcției $Y_s\ (s)$;

$K_{vs} = \dfrac{\omega_n}{2\, z_i}$ — factorul total de amplificare al sitemului definit de funcția de transfer $Y_s\ (s)$.

După cum rezultă din relația (14), caracteristica asimptotică atenuare-frecvență $A_s\ (\omega)$ a sistemului deschis simplificat va avea două asimptote (fig. 4, caracteristica b): cea de joasă frecvență, cu panta de — 20 db/dec și cea de înaltă frecvență cu panta de — 40 db/dec, punctul de conjugare fiind la frecvența de frîngere

$$\omega_a = 2\, z_i\, \omega_n \tag{15}$$

Intrucît factorul z_i este dat, iar valoarea ω_n a fost determinată, relația (15) conduce la frecvența de frîngere ω_a căutată și la trasarea caracteristicii $A_s\ (\omega)$, care pentru $\omega > \omega_a$ coincide cu caracteristica $A_0\ (\omega)$.

Grafic, se obține frecvența de tăiere ω_c (unde atenuarea devine nulă) care însă rezultă imediat și analitic, întrucît

$$\omega_c = K_{vs} = \frac{\omega_n}{2\, z_i} \tag{16}$$

deorece funcția de transfer a sistemului deschis are un pol de ordinul I în origină.

c. *Verificarea satisfacerii performanței în regim staționar*

După cum se știe, o anumită valoare maximă impusă erorii staționare E_{si} se traduce imediat în o anumită valoare minimă impusă factorului total de amplificare al sistemului deschis K_{vi}.

În cazul exemplului analizat, condiția

$$E_s \leqslant E_{si}$$

se transformă deci într-o condiție corespunzătoare

$$K_v \geqslant K_{vi} \tag{17}$$

Întrucît din relația (14) a rezultat pentru sistemul deschis simplificat

$$K_{vs} = \frac{\omega_n}{2\, z_i}$$

unde z_i și ω_n sînt cunoscute, se poate verifica condiția (17) înlocuind K_v cu K_{vs}.

Dacă relația (17) este satisfăcută, respectiv dacă

$$K_{vs} \geqslant K_{vi},$$

atunci sistemul în forma simplificată — cu funcția de transfer $Y_s\ (s)$ în stare deschisă — satisface toate performanțele impuse, atît în regim tranzitoriu cît și în regim staționar, și sinteza generală se poate considera încheiată.

Dacă însă relația (17) nu este satisfăcută, respectiv dacă

$$K_{vs} < K_{vi}$$

atunci trebuie să se introducă zerouri și poli suplimentari în funcția de transfer Y_0 (s) și deci și în Y_s (s), astfel încît factorul total de amplificare să fie mărit cel puțin pînă la valoarea K_{vi}, dar performanțele stabilite prin polii dominanți pentru regimul tranzitoriu să nu fie prin aceasta modificate decît în măsură neglijabilă.

În acest scop, zerourile și polii suplimentari trebuie să fie plasați fie foarte departe de origină — în comparație cu polii dominanți — fie sub formă de dipoli în imediata apropiere a originii ; prima variantă corespunde utilizării unor rețele de corecție derivative, iar a doua variantă — utilizării unor rețele de corecție integratoare.

În cadrul sintezei pe intermediul caracteristicilor logaritmice este recomandabilă — din punct de vedere al rapidității proiectării — folosirea dipolilor, întrucît imediat se poate determina grafic [4] dipolul care trebuie introdus în funcția de transfer a sistemului deschis pentru obținerea factorului de amplificare impus, în timp ce pentru determinarea parametrilor unei rețele derivative de corecție în serie este necesară și caracteristica logaritmică fază-frecvență.

De remarcat că dacă se efectuează sinteza generală prin repartiția polizerouri în planul complex, atunci este mai convenabilă — din punct de vedere al proiectării — introducerea rețelelor derivative, întrucît parametrii dipolului se obțin pe cale analitică [2] destul de dificil, pe cînd parametrii rețelei derivative de corecție în serie rezultă foarte simplu pe cale grafică [5].

Funcția de transfer Y_{rc} (s) a unei rețele integratoare de corecție în serie are forma

$$Y_{r\cdot e\cdot}(s) = \frac{T_{r\cdot c\cdot}s+1}{T'_{r.c.}s+1} = \frac{\frac{s}{z_{r.c}}+1}{\frac{s}{p_{r.c}}+1} = \frac{\frac{s}{\omega_{r.c}}+1}{\frac{s}{\omega'_{r.c}}+1} = \frac{p_{r.c.}}{z_{r.c.}} \cdot \frac{s+z_{r.c.}}{s+p_{r.c.}} = \tag{18}$$

$$= \frac{\omega'_{r.c.}}{\omega_{r.c.}} \cdot \frac{s+\omega_{r.c.}}{s+\omega'_{r.c.}}$$

unde $T_{r.c.} = \frac{1}{z_{r\cdot c\cdot}} = \frac{1}{\omega_{r\cdot c\cdot}}$ și $T'_{r.c.} = \frac{1}{p_{r\cdot c\cdot}} = \frac{1}{\omega'_{r.c.}}$ sînt constantele de timp ale rețelei ;

$z_{r\cdot c\cdot}$ și $p_{r\cdot c\cdot}$ — sînt zeroul și polul introduși de rețeaua de corecție integratoare ;

$\omega_{r\cdot c\cdot}$ și $\omega'_{r.c.}$ — frecvențele de frîngere (prima — cu reducerea pantei, a doua — cu creșterea pantei) pe care le introduce rețeaua de corecție în caracteristica logaritmică asimptotică atenuare-frecvență a sistemului deschis.

Evident, $z_{r\cdot c\cdot} = \omega_{r\cdot c\cdot}$ și $p_{r\cdot c\cdot} = \omega'_{r.c.}$

Rețeaua fiind integratoare, are loc relația $T'_{r.c.} > T_{r \cdot c}$ și deci $|z_{r \cdot e}| > |p_{r \cdot c}|$ respectiv $\omega_{r \cdot c} > \omega'_{r.c.}$ întrucît în caz contrar rețeaua ar fi derivativă.

Din valoarea K_{vi} impusă pentru factorul total de amplificare al sistemului deschis se obțin în modul următor frecvențele de frîngere $\omega_{r \cdot c}$ și $\omega'_{r.c.}$ care definesc rețeaua integratoare.

Prin punctul de coordonate $\omega = 1$ și $A = K_{vi}^{db}$ (fig. 5) se duce asimptota de joasă frecvență (dreapta I, cu pantă de $-20 \frac{\text{db}}{\text{dec}}$, sistemul avînd un pol de ordinul I în origină), care trebuie să facă parte din caracteristica atenuare-frecvență A (ω) a sistemului deschis după corecția în serie cu rețeaua integratoare, întrucît astfel se asigură valoarea K_{vi} prescrisă. Pe aceeași diagramă se trasează caracteristica A_s (ω) determinată anterior (caracteristica II, identică cu caracteristica b din fig. 4).

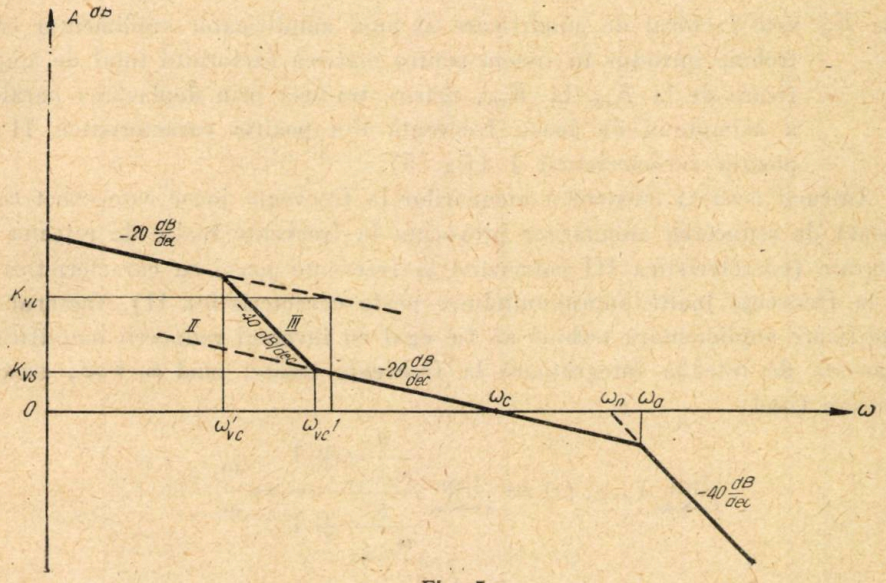


Fig. 5

Cele două caracteristici I și II trebuie unite prin un segment de pantă — 40 db/dec, obținîndu-se astfel caracteristica A (ω) a sistemului deschis (caracteristica III), care satisface performanțele impuse atît regimului tranzitoriu, cît și regimului staționar, rezultînd grafic frecvențele de frîngere $\omega_{r \cdot c}$ și $\omega'_{r.c.}$ căutate.

Segmentul de pantă —40 db/dec care unește caracteristicile I și II, formînd împreună cu porțiuni din ele caracteristica A (ω), trebuie plasat în

zona frecvențelor suficient de joase, pentru ca procesul tranzitoriu asigurat de polii dominanți să nu fie decît insensibil modoficat.

Acest lucru rezultă atît din principiile sintezei prin repartiția poli-zerouri în planul complex — care prevăd ca dipolul să fie foarte aproape de origină în raport cu polii dominanți, deci impun relația $\omega_{r\cdot c\cdot} \ll \omega_n$ — cît și din teorema lui Bode, conform căreia calitatea procesului tranzitoriu se păstrează dacă panta caracteristicii $A(\omega)$ rămîne egală cu -20 db/dec în o gamă cît mai largă de frecvențe din jurul frecvenței de tăiere ω_c.

În conformitate cu caracteristica $A(\omega)$ obținută în fig. 5 și cu relațiile (14) și (18) se poate scrie funcția de transfer $Y(s)$ a sistemului deschis proiectat:

$$Y(s) = K_a \cdot Y_s(s) \cdot Y_{r\cdot c\cdot}(s) = K_a \cdot \frac{\frac{\omega_n}{2z_i}}{s\left(\frac{s}{2z_i\omega_n}+1\right)} \cdot \frac{\left(\frac{s}{\omega_{r\cdot c\cdot}}+1\right)}{\left(\frac{s}{\omega'_{r\cdot c\cdot}}+1\right)} \tag{19}$$

unde K_a este factorul de amplificare al unui amplificator suplimentar care trebuie introdus în sistem pentru mărirea factorului total de amplificare de la K_{vs} la K_{vi}, mărire tradusă prin deplasarea paralelă a asimptotei de joasă frecvență din poziția caracteristicii II în poziția caracteristicii I (fig. 5).

Întrucît această creștere a atenuărilor la frecvențe joase este exact compensată de reducerea atenuărilor provocată la frecvențe înalte de rețeaua de integrare (caracteristica III coincizînd la frecvențe joase cu caracteristica I, iar la frecvențe înalte suprapunîndu-se peste caracteristica II), factorul de amplificare suplimentară trebuie să fie egal cu inversul reducerii amplificării provocate de rețeaua integratoare la frecvențe înalte, cînd $\omega \to \infty$, această reducere fiind

$$\lim_{s\to\infty} Y_{r\cdot c\cdot}(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\frac{s}{\omega_{r\cdot c\cdot}}+1}{\frac{s}{\omega'_{r\cdot c\cdot}}+1} = \frac{\omega'_{r\cdot c\cdot}}{\omega_{r\cdot c\cdot}}$$

Prin urmare, factorul de amplificare suplimentară trebuie să aibă valoarea

$$K_a = \frac{1}{\frac{\omega'_{r\cdot c\cdot}}{\omega_{r\cdot c\cdot}}} = \frac{\omega_{r\cdot c\cdot}}{\omega'_{r\cdot c\cdot}} \tag{20}$$

unde $\omega_{r\cdot c\cdot}$ și $\omega'_{r\cdot c\cdot}$ au fost determinate grafic.

Introducînd valoarea factorului K_a din (20) în (19) se obține funcția de transfer a sistemului deschis care va satisface toate cele trei performanțe

impuse prin (2)

$$Y(s) = \frac{\omega_{r\cdot c\cdot}}{\omega'_{r.c.}} \cdot \frac{\frac{\omega_n}{2z_i}}{s\left(\frac{s}{2z_i\omega_n}+1\right)} \cdot \frac{\frac{s}{\omega_{r\cdot c\cdot}}+1}{\left(\frac{s}{\omega'_{r.c.}}+1\right)} = \tag{21}$$

$$= \frac{K_{vi}\left(\frac{s}{\omega_{r\cdot c\cdot}}+1\right)}{s\left(\frac{s}{2z_i\omega_n}+1\right)\left(\frac{s}{\omega'_{r.c.}}+1\right)}$$

unde $K_{vi} = \frac{\omega_{r\cdot c\cdot}\cdot\omega_n}{\omega'_{r.c.}\cdot 2z_i}$ este factorul total de amplificare al sistemului, egal cu cel impus.

Relația (21) se poate pune și sub forma

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2z_i\omega_n)} \cdot \frac{s+\omega_{r\cdot c\cdot}}{s+\omega'_{r.c.}} \tag{22}$$

d. *Verificarea excesului de poli asupra zerourilor*

Funcția de transfer $Y(s)$ obținută din performanțele impuse trebuie comparată cu funcția de transfer $Y_2(s)$ a porțiunii inițiale a sistemului, pentru a se verifica compatibilitatea lor din punct de vedere al excesului de poli asupra zerourilor.

După cum se știe [2], pentru funcția $Y(s)$ excesul de poli asupra zerourilor trebuie să fie mai mare sau cel mai mult egal cu cel al funcției $Y_2(s)$.

În exemplul analizat funcția $Y_2(s)$ din expresia (1) are doi poli ($P=2$) și nici un zero ($Z=0$), excesul fiind deci $P-Z=2$.

Din (21) se constată că funcția $Y(s)$ are trei poli și 1 zero, excesul fiind $P-Z=3-1=2$, deci egal cu al funcției $Y_2(s)$.

Funcția $Y(s)$ obținută este deci compatibilă cu cea a porțiunii inițiale și nu mai sînt necesari poli suplimentari.

Dacă funcția $Y_2(s)$ ar fi avut un exces mai mare, de exemplu $P-Z=4$, atunci ar fi fost necesară introducerea a încă 2 poli (de exemplu la $-p_f=-\omega_f$ și $-p_g=-\omega_g$ în expresia funcției $Y(s)$, respectiv a încă două puncte de frîngere — cu creșterea pantei — în caracteristica $A(\omega)$ obținută anterior, rezultînd în acest caz pentru sistemul deschis o funcție de transfer de forma

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2(s+\omega_{r\cdot c\cdot})}{s(s+2z_i\omega_n)(s+\omega'_{r.c.})(s+\omega_f)(s+\omega_g)} \tag{23}$$

unde $\omega_f = p_f$ și $\omega_g = p_g$ sînt punctele de frîngere introduse de prezența noilor poli.

Noul aspect al caracteristicii A (ω) este reprezentat în fig. 6.

Pentru a nu influența decît în mod neglijabil procesul tranzitoriu definit de polii dominanți, este necesar ca polii $-p_f$ și $-p_g$ să fie depărtați de origină în comparație cu polii dominanți, respectiv este necesar ca $\omega_f \gg \omega_n$ și $\omega_g \gg \omega_n$.

Practic, se recomandă ca pentru cel mai mic dintre noii poli introduși să existe relația

$$\omega_f \geqslant (5 \div 6)\ \omega_n$$

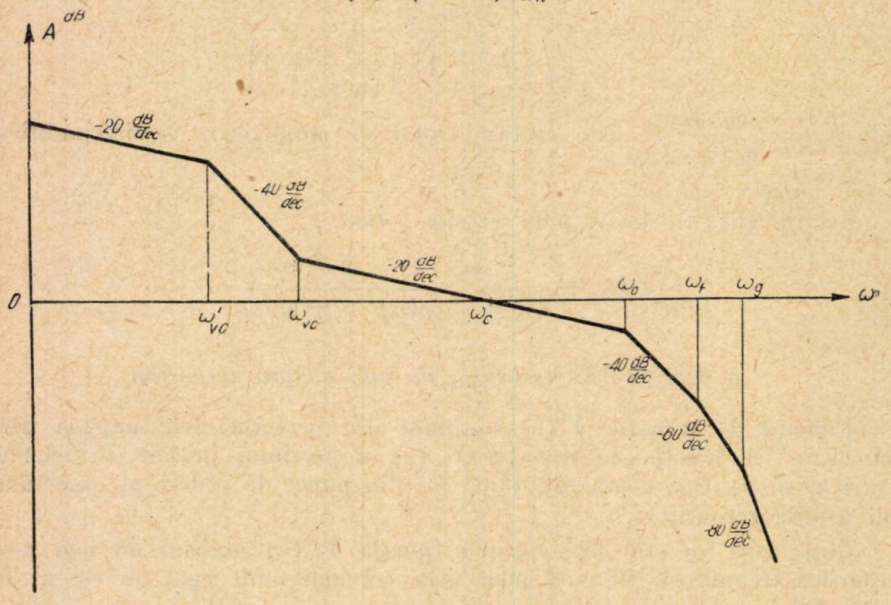


Fig. 6

În același timp se va căuta ca unul din polii noi să coincidă cu polul din $-p_2 = -\omega_2$ al funcției $Y_2(s)$, sau cu alt pol, întrucît în acest caz se simplifică expresia rezultată pentru funcția de transfer $Y_1(s)$ a dispozitivului de automatizare *D.A.*

e. *Determinarea funcției de transfer $Y_1(s)$ a dispozitivului de automatizare D. A.*

După cum s-a arătat în relația (4)

$$Y_1(s) = Y(s) \cdot \frac{1}{Y_2(s)}$$

și înlocuind funcțiile $Y(s)$ și $Y_2(s)$ cu expresiile din (23) și (1) se

$$Y_1(s) = \frac{\omega_n^2 (s + \omega_{r \cdot c \cdot})}{s(s + 2 z_i \omega_n)(s + \omega'_{r.c.})(s + \omega_f)(s + \omega_g)} \cdot \frac{s(s+\omega_2)(s+\omega_3)(s+\omega_4)}{K_2} =$$

$$= \frac{\omega_n^2}{K_2} \frac{(s + \omega_{r \cdot c \cdot})(s + \omega_2)(s + \omega_3)(s + \omega_4)}{(s + 2 z_i \omega_n)(s + \omega'_{r.c.})(s + \omega_f)(s + \omega_g)} \qquad (24)$$

unde ω_3 și ω_4 sînt poli ai funcției $Y_2(s)$ în ipoteza $P - Z = 4$.

Se vede din (24) că dacă unul din polii suplimentari $p_f = \omega_f$ sau $p_g = \omega_g$ coincide cu polul $p_2 = \omega_2$, respectiv dacă există de exemplu egalitatea

$$\omega_f = \omega_2 \tag{25}$$

și eventual și egalitatea $\omega_g = \omega_3$

atunci expresia (24) a funcției $Y_1(s)$ se simplică devenind

$$Y_1(s) = \frac{\omega_n^2}{K_2} \cdot \frac{(s + \omega_{r.c.})(s + \omega_4)}{(s + 2\zeta_i \omega_n)(s + \omega_{r.c.})}$$

ceea ce simplifică evident și realizarea fizică a dispozitivului de automatizare.

Realizarea condiției (25) este posibilă numai dacă polul $p_2 = \omega_2$ și polul $p_3 = \omega_3$ se găsesc în zona frecvențelor suficient de înalte în care trebuie plasate punctele suplimentare de frîngere ω_f și ω_g.

Metoda de sinteză prezentată poate fi utilizată pentru diferite tipuri de funcții de transfer $Y_2(s)$ ale porțiunii inițiale a sistemului, exemplul anterior fiind ales numai pentru ilustrarea modului de aplicare a metodei propuse.

C. *Concluzii*

1. Sinteza generală prin intermediul caracteristicilor logaritmice simplifică considerabil operația de proiectare, conducînd direct la expresia funcției de transfer a sistemului deschis care satisface performanțele impuse, ținînd seama și de porțiunea dată inițial a sistemului.

2. Principiile sintezei generale prin repartiția poli-zerouri din planul complex se transpun cu fidelitate în sinteza prin intermediul caracteristicilor logaritmice, determinîndu-se la început frecvența de frîngere ω_n a caracteristicii $A_0(\omega)$ și frecvența de frîngere ω_a a caracteristicii $A_3(\omega)$ în conformitate cu procesul tranzitoriu prescris — ceea ce reprezintă stabilirea poziției polilor dominanți — și fixîndu-se ulterior celelalte puncte de frîngere pentru obținerea factorului total de amplificare impus — ceea ce reprezintă introducerea zerourilor și polilor suplimentari.

3. Simplificarea sintezei generale prin folosirea caracteristicilor logaritmice se datorește faptului că trecerea de la sistemul închis la cel deschis se face pentru funcții de transfer și caracteristici logaritmice simplificate — corespunzătoare numai polilor dominanți — spre deosebire de trecerea de la sistemul închis la cel deschis în cazul sintezei în planul complex, care se efectuează destul de complicat, pentru expresiile complete ale funcțiilor de transfer respective.

4. Cu toată simplitatea sintezei generale prin intermediul caracteristicilor logaritmice, acesta conduce la rezultate tot atît de exacte ca și sinteza generală prin repartiția poli-zerouri, întrucît se realizează în conformitate cu aceleași principii de bază.

5. Fiind mult mai simplă decît sinteza în planul complex, efectuîndu-se mult mai rapid și conducînd la rezultate tot atît de exacte, sinteza generală prin metoda caracteristicilor logaritmice prezintă deosebite avantaje pentru aplicarea în practică.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Ia. Lerner. Introducere în teoria reglării automate (Введение в теорию автоматического регулирования) Maşghiz, 1958.

2. J. G. Truxal. Automatic feedback control system synthesis. McGraw-Hill, 1955.

3. V. V. Solodovnikov. Bazele reglării automate (Основы автоматического регулирования) Maşghiz, 1954.

4. Expres-Informaţia (Экспресс-Информация) AŸ 155—157, 1957.

5. S. Călin. Sinteza directă a reţelelor derivative de corecţie în serie prin metoda hodografului rădăcinilor. Comunicare la sesiunea ştiinţifică a Comisiei de automatizare a Academiei R.P.R., 1960.

ОБЩИЙ СИНТЕЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ В РАЗОМКНУТОМ СОСТОЯНИИ

(Резюме)

Общий синтез автоматических систем производится обычно в комплексной плоскости и имеет три этапы: определение передаточной функции системы в замкнутом состоянии в соответствии с заданными качественными показателями, определение соответственной передаточной функции систмы в разомкнутом состоянии и расчет параметров составляющих элементов.

В сообщении излагается метод общего сиснтеза автоматических систем с помощью логарифмических амплитудных частотных характеристик, который позволяет получить прямо передаточную функцию системы в разомкнутом состоянии в соответствии с заданными показателями (статическая погрешность, время переходного ороцесса и перерегулирование), что значительно упрощает синтез автоматнческих систем.

CONTROL SYSTEM SYNTHESIS USING LOGARITHMIC ATTENUATION-FREQUENCY DIAGRAMS OF OPEN-LOOP SYSTEMS

(Summary)

The synthesis of control systems is generally effectuated in the complex plane and includes three phases : the determination of the transfer function of the closed-loop system in concordance with the imposed performances, the determination of the corresponding transfer function of the open-loop system, and the calculation of the different elements ot the system.

The paper presents a synthesis method of control systems using logarithmic attenuation-frequency diagrams of the open-loop system, permitting

to obtain directly the transfer function of the open-loop system in concordance with the imposed performances (steady-state error, settling-time and overshoot) and simplifying thus the synthesis operation.

LA SYNTHÈSE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES AUTOMATIQUES EN UTILISANT LES CARACTÉRISTIQUES LOGARITHMIQUES ATTÉNUATION — FRÉQUENCE DES SYSTÈMES AVEC LA BOUCLE OUVERTE

(Résumé)

La synthèse générale des systèms automatiques est généralement effectuée dans le plan complexe et contient trois étapes relativement laborieuses : la détermination de la fonction de transfert du système avec la boucle fermée en concordance avec les performances imposées, la détermination de la fonction de transfert correspondante pour le système avec la boucle ouverte et le calcul des parametres des elements components.

Le rapport présente une méthode de synthèse générale des systèmes automatiques en utilisant les caractéristiques logarithmiques atténuation — fréquence, qui permet d'obtenir directement la fonction de transfert du système avec la boucle ouverte en concordance avec les performances imposées (erreur stationnaire, durée du régime transitoire et valeur du surréglage), la synthèse devenant ainsi plus rapide et moins laborieuse.

ALLGEMEINE SYNTHESE DER AUTOMATISCHEN SYSTEME MIT HILFE DER LOGARITHMISCHEN CHARAKTERISTIKEN FREQUENZ-DÄMPFUNG DER SYSTEME MIT OFFENEM REGELKREIS

(Zusammenfassung)

Die allgemeine Synthese der automatischen Systeme erfolgt der Regel wie im komplexen Plan und in drei ziemlich schwierigen Etappen : Bestimmung der Übergangsfunktion des Systems mit geschlossenem Regelkreis gemäss den bedingten Leistungen, Bestimmung der dem System mit offenem Regelkreis entsprechenden Übergangsfunktion und die Berechnung der Parameter für die zugehörigen Elemente.

In der Mitteilung ist eine allgemeine Synthesenmethode der automatischen Systeme mit Hilfe der logaritmischen charakteristiken Frequenz-Dämpfung des Systems mit offenem Regelkreis vorgesehen, welche die direkte Bestimmung der Übergangsfunktion des Systems mit nicht geschlossenem Regelkreis gemäss den bedingten Leistungen (stationären Fehler, Dauer des Übergangsprozesses und grösste Höchstregelung) ermöglicht, wodurch das projektieren der automatischen Systeme äusserst vereinfacht wird.

MŰSZAKI KÖNYVTÁR-OSZTÁLY 1883

TIPOGRAFIA ŞI LITOGRAFIA
ÎNVĂŢĂMÎNTULUI
C. 1317

T.I.C.
C

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de pronume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F 1130

REFERÁLVA

R

Korádi Lóránt

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIII — FASCICOLA 3

IULIE — SEPTEMBRIE

1961

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului“)

MŰSZAKI KÖNYVTÁR

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIII — FASCICOLA 3

IULIE — SEPTEMBRIE

1961

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*; Conf. *I. Berceanu*; Prof. Dr. *E. Bratu*; Prof. *Gh. Buzdugan*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*; Acad. Prof. Dr. *Tr. Negrescu*; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*; Prof. *M. Postelnicescu*; Prof. Dr. *R. Rădulet*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. Dr. *T. Tănăsescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei R.P.R

SUMAR

MATEMATICĂ

M. BOTEZ — Sur une nouvelle manière de représenter l'espace linéaire 13

I. MIU — Un nou procedeu de rezolvare a unor probleme cu condiții la limită 23

G. TEODORESCU — Asupra caracteristicilor unui sistem de ecuații cu derivate parțiale 33

A. TĂNĂSESCU — Apparatus for construction of an axonometrical projection of an abject, drawn in double orthogonal projection [1]) 43

FIZICĂ

D. BÎRCĂ-GĂLĂȚEANU, L. ARCAN și L. MĂNTOIU — Spectrul de vibrație al 2—4 diiodanilinei 51

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. ATANASIU, L. BLUM-LAZAR — Coroziunea fierului și aliajelor sale în medii oxidante alcaline 63

E. RUCKENSTEIN — A physical model for nucleate boiling heat transfer frons a horizontal surface 79

CHIMIE

V. PĂRĂUȘANU, F. DANEȘ, O. LANDAUER, C. MATEESCU — absorbția fierului trivalens pe calioniți polistiren sulfonici 87

REZISTENȚA MATERIALELOR

GH. BUZDUGAN, D. CRAIFALEANU, V. ANTONESCU, T. PANĂ, V. POSTELNICU — Kerbwirkungen bei hohen Temperaturen 101

METALURGIE

I. TRIPȘA, L. SOFRONI, M. POPOVICI — Contribuții la extinderea turnării pieselor de oțel în forme întărite cu bioxid de carbon 115

ENERGETICĂ

D. PAVEL — Berachnung der wirtschaftlichen Fallhöhen der Wasserkraftwerke 131

TERMOTEHNICĂ

G. BĂRĂNESCU, T. DUDAȘ, B. GRÜNWALD — Unele probleme privind injecția de păcură în motoarele cu aprindere prin comprimare 157

ELECTROTEHNICĂ

M. PREDA — Construcții grafice în cadrul metodei componentelor simetrice 189

ELECTRONICĂ

AL. SPĂTARU — Betrachtung über einige Grundaufgaben des Farbfernschens 197

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

М. БОТЕЗ — Новые изображение линейного пронстранства . 13
И. МИУ — Новый способ разрешения некоторых задач с граничными условиями 23
Л. ТЕОДОРЕСКУ — О характеристиках некоторых систем уравнений с настными произ одными . . . 33
А. ТЫНЫСЕСКУ — Прибор для построения аксонометрической проекции предмета, изображенного в двойной ортогональной проекции 43

ФИЗИКА

Д. БЫРКЫ-ГЫЛЫЦЕАНУ, Л. АРКАН, Л. МЫНТОЮ — Спектр вибрации 2—4 диноданилина . . . 51

ТЕХНОЛОГИЯ КИМИКИ

И. АТАНАСЮ, Л. БЛУМ-ЛАЗЭР — Коррозия железа и его сплавов в окислительных основных средах . . 63
Е. РУКЭНШТАЙН — Физический модель для теплопередаче для кипения с нуклеацией от плоской поверхности . 79

ХИМИЯ

В. ПЫРЫУШАНУ, Ф. ДАНЕШ, О. ЛАНДАУЭР, С. МАТЕЕСКУ — Адсорбция трехвалентного железа на полистирен-сульфоновых ионообменных веществах . . 87

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ГХ. БУЗДУГАН, Д. КРЫЙФЫЛЕАНУ, В. АНТОНЕСКУ, Т. ПАНЫ, В. ПОСТЕЛНИКУ — Влияние концентрацнй напряжений при высоких температурах . . . 101

МЕТАЛЛУРГИЯ

И. ТРИПША, Л. СОФРОНИ, М. ПОПОВИЧ — К вопросу раширения применения быстротвердеющих смесей для стального литья 115

ЭНЕРГЕТИКА

Д. ПАВЕЛ — Расчет экономических напоров для гидроэлектростанции 131

ТЕРМОТЕХНИКА

Г. БЫРЫНЭСКУ, Т. ДУДАШ, Б. ГРИНВАЛД — Проблемм инжекционного закона мазута в двигателях с воспламенением от сжатия 157

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

М. ПРЕДА — Графические построения в области метода симметричных составляющих 189

ЭЛЕКТРОНИКА

АЛ. СПЫТАРУ — Обсуждение некоторых основных вопросов цветного телевидения 197

CONTENTS

MATHEMATICS

M. BOTEZ — On a linear space representation 13
I. MIU — A new procedure of solwing some problems with conditions at limits 23
G. TEODORESCU — On the charactiristics of a system of partial differential equations 33
A. TĂNĂSESCU — Apparatus for the construction of the axonometrical projection of an object drawn in the double orthogonal projection 43

PHYSICS

D. BÎRCĂ-GĂLĂȚEANU, L. ARCAN și L. MĂNTOIU — The vibration spectrum of 2—4 diiodanilin 51

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. ATANASIU, L. BLUM-LAZĂR — The corrosion of iron and its alloys in alkaline oxidizing solutions 63
E. RUCKENSTEIN — A physical model for nucleade boiling head transfer from a horizontal surface 79

CHEMISTRY

V. PĂRĂUȘANU, F. DANEȘ, O. LANDAUER, C. MATESCU — The adsorption of threevalid iron. on ionexchaugers of sulfonic polystyrene 87

STRENGHT OF MATERIALS

GH. BUZDUGAN, D. CRAIFALEANU, V. ANTONESCU, T. PANĂ, V. POSTELNICU — Strees concentration at high temperature 101

METALURGY

I. TRIPSA, L. SOFRONI, M. POPOVICI — Contributions to the wider use of casting steel parts in carbon dioxide hardened moulds 115

ELECTRIC POWERS

D. PAVEL — Calculation of the economical head of waterpower plants 131

TERMODYNAMICS

G. BĂRĂNăSCU, T. DUDAȘ, B. GRÜNWALD — Some problems on the oil injection in the compression ignition engines 157

ELECTRICITY

M. PREDA — Graphic designs available within the fromewerk of the symetrical component method 189

ELECTRONIQUE

AL. SPĂTARU — Consideration on some essential problems of the colour television 197

SOMMAIRE

MATHEMATIQUE

M. BOTEZ — Sur une nouvelle manière de représenter l'espace linéaire 13

I. MIU — Un nouveau procédé de resoudre certains problèmes a conditions limite 23

G. TEODORESCU — Sur les caractéristiques des systémes d'écuations aux dérivées partielles 33

A. TĂNĂSESCU — Appareil pour la construction de la projection axonométrique d'un objet représente par double projection orthogonale 43

PHYSIQUE

D. BÎRCĂ-GĂLĂȚEANU, L. ARCAN și L. MANTOIU — Le spectre de vibration de 2—4 diiodamiline. 51

CHIMIE TECHNOLOGIQUE

I. ATANASIU, L. BLUM-LAZĂR — La corrosion du fer et de ses alliages dans des milieux oxydant alcalins 63

E. RUCKENSTEIN — Un modèle physique pour le transfers de chaleur dans le cas de l'élibitions nucleate pour une surface horizontale de chauffage 79

CHIMIE

V. PĂRĂUȘANU, F. DANEȘ, O. LANDAUER, C. MATEESCU — L'adsorbtion du fer trivalent sur les échangeurs d'ions polistyrène-sulphoniques 87

REZISTANCE DES MATERIAUX

GH. BUZDUGAN, D. CRAIFALEANU, V. ANTONESCU, T. PANĂ, V. POSTELNICU — Effets de concentration des tensions à haute température 101

METALURGIE

I. TRIPSA, L. SOFRONI, M. POPOVICI — Contribution a l'extension de l'emploi des moules durcis au bioxyde de carbone pour les moulages d'acier 115

ENERGÉTIQUE

D. PAVEL — Calcul des chutes économiques pour les usines hydroélectriques 131

TERMOTECHNIQUE

G. BĂRĂNESCU, T. DUDAȘ, B. GRÜNWALD — Quelques problèmes concernant l'injection du pétrole brut dans les moteurs à allumage par compression 157

ELECTROTECHNIQUE

M. PREDA — Constructions graphiques utiles dans le cadre de la méthodes de composantes symétriques 189

ELECTRONIQUE

AL. SPĂTARU — Considerations sur quelques problèmes fondamentales de la télévision en couleurs 197

INHALT

MATEMATIK

M. BOTEZ — Eine neue abbildung des Strahlraumes 13
I. MIU — Ein neues Verfahren zur Lösung von Grenzproblemen 23
G. TEODORESCU — Über den Karakteristicken eines mit partiellen abgeleiteten Gleichungsystems 33
A. TĂNĂSESCU — Ein Apparat für die Konstruktion der axonometrischen Projection eines Gebildes, das in zweifach orthogonaler Projektion dargestellt ist 43

PHYSIK

D. BÎRCĂ-GĂLĂȚEANU, L. ARCAN și L. MĂNTOIU — Das Schwingungsspectrum des 2—4 Diiodanilins 51

TEHNOLOGISCHE CHEMIE

I. ATANASIU, L. BLUM-LAZĂR — Die Korrosion des Eeisens und seiner Legierungen in alkalischoxydierenden Mitteln. 63
E. RUCKENSTEIN — Ein physikalisches Modell für den Wärmeiibergang andeiner horizontalen Fläche, beins Sieden mit Keimsbildung 79

CHEMIE

V. PĂRĂUȘANU, F. DANEȘ, O. LANDAUER, C. MATEESCU — Die Adsorbtion des dreiwertigen Eisens an Ionenaustauschern von sulfoniertem polystyrol 87

FESTIGKEITSLEHRE

GH. BUZDUGAN, D. CRAIFALEANU, V. ANTONESCU, T. PANĂ, V. POSTELNICU — Kerbwirkungen bei hohen Temperaturen 101

METALURGIE

I. TRIPSA, L. SOFRONI, M. POPOVICI — Beitrag Zur Erweiterung der anvendung der Kohlensäurehärtung bei stehlgussformen 115

ENERGETIK

D. PAVEL — Berechung der wirtschaftlichen Fallhöhhen der Wasserkraftwerke 131

TERMOTECHNIK

G. BĂRĂNESCU, T. DUDAȘ, B. GRÜNWALD — Über das Einspritzgesetz von mit Schweröl betriebenen Dieselmotoren 157

ELECTROTECHNIK

M. PREDA — Nüteliche graphische Konstruktionen im Rahmen der Methode der symetrischen Komponenten 189

ELEKTRONIK

AL. SPĂTARU — Betrachtungen über einige Grundaufgaben des Farbenfernschens 197

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

MATEMATICĂ

SUR UNE NOUVELLE MANIÈRE DE REPRÉSENTER L'ESPACE LINÉAIRE

par MIHAIL BOTEZ

Soit (Δ) une droite donnée par les équations :

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma ;$$

et les plans π $(z = 0)$ et $\pi^*(z = 1)$ $\therefore$ $(\pi \parallel \pi^*)$.

Considérons le plan π comme plan de la représentation, et la droite comme l'élement fondamental de l'espace.

Le plan π est intersecté par la droite (Δ) en $\delta(\varrho, \sigma)$ et le plan π^* en un point dont la projection sur le plan π est $\delta^*(r + \varrho ; s + \sigma)$.

On obtient de cette manière une corréspondance biunivoque entre les ∞^4 des droites de l'espace et les ∞^4 paires des points du plan.

C'est ainsi qu'on obtient un mode de représenter l'espace réglé sur un plan satisfaisant la condition de biunivocité, au moyen d'une image unique.

Donc la droite (Δ) est representée par les points δ et δ^* qui peuvent être considérés comme un bi-point orienté. Nous allons nommer le point δ trace principale de la droite, tandisque δ^* sera sa trace secondaire. L'épure ainsi obtenue sera nommée, *épure simple*.

En ce qui suit nous allons montrer la simplicité de ce système de représentation pour l'étude de la géométrie descriptive radiale.

1. La droite (Δ) qui est représentée par sa projection orthogonale sur le plan π sur laquelle on a marqué les point δ et δ^*, sera notée par $\Delta(\delta\delta^*)$. Afin que l'image ainsi obtenue soit complète, on ajoute la longueur μ de l'unité de mesure des axes aux quelles ont été référés les plans π et π^*. Nous allons nommer la longueur μ le module de l'épure. Evidement le changement du module de l'épure d'une droite entraîne le changement de l'angle de cette droite avec le plan de projection.

---

*) Communication présentée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique de Bucarest, 17—18 Decembrie, 1960.

On remarque immédiatement que :

a) Si les droites $\Delta \parallel \Delta_1$, alors $\delta\delta^* \parallel \delta_1\delta_1^*$ et $\delta\delta_1 \parallel \delta^*\delta_1^*$ où $\delta\delta_1$ est la trace sur π du plan (Δ, Δ_1).

b) Si les droites Δ et Δ_1 sont incidentes, alors $\delta\delta^*$ et $\delta^*\delta_1^*$ sont incidentes, tandis que $\delta\delta_1 \parallel \delta^*\delta_1^*$.

c) Si les droites Δ et Δ_1 sont contennues dans des plans différents alors on a $\delta^*\delta_1^* \nparallel \delta\delta_1$, tandisque leurs projections peuvent être paralléles ou non.

d) Un point M de l'espace peut être donné par une droite passant par M et par sa projection $m (m \in \delta\delta^*)$. Il est à remarquer que la position du point m par rapport à δ et δ^* est donnée par sa coordonnée baricentrique $\lambda = -\frac{m\delta^*}{m\delta}$ où δ et δ^* sont fixes.

Parce que de cette manière on a une homothétie dont le rapport est λ, et le centre est m, il suffit de connaître la projection orthogonale m du point m et le rapport λ, pour que le point soit déterminé. En consequence nous allons noter le point par $M(m, \lambda)$.

Entre la cote q d'un point M de l'espace et λ on a la rélation : $q = 1 + \lambda$.

2. Le plan est représenté par sa trace principale P, et par un de ses points ou par une de ses droites. En ce qui suit on représente le plan par ses trace $P \parallel P^*$.

On a :

a) Si $P \equiv P^*$, le plan est perpendiculaire sur le plan π.

b) Si la distance $\overline{PP^*} = \mu$, on a entre le plan (PP^*) et π, un angle $\widehat{\theta} = 45°$.

Le rapport entre la distance des traces P et P^* d'un plan et le module μ de l'épure, exprime la tangente de l'angle dièdre $(\widehat{PP^*, \pi})$.

3. a) Une droite Δ $(\delta\delta^*)$ est parallèle à un plan (PP^*) si une parallèle Δ_1 à Δ détermine sur les traces P et P^* deux pointes δ_1 et δ_1^* de sorte que $\delta\delta_1 \parallel \delta^*\delta_1^*$ (fig. 1).

b) Une droite est perpendiculaire à un plan si sa proejction orthogonale est perpendiculaire aux traces du plan et le rabattement de la droite est perpendiculaire au rabattement d'une droite de la plus grande pente du plan donné.

Soit $M(m, \lambda)$ le point du quel on doit mener une perpendiculaire au plan (PP^*).

Pour cela, on construit les points δ et δ^* collinéaires avec m, en sorte que $\lambda = -\frac{m\delta^*}{m\delta}$ (fig. 2). On a ensuite la cote du point moyenant le rabattement de la droite $(\delta\delta^*)$. Le rabattement de la droite de la plus grande pente du plan (PP^*) qui est determinée par le plan projettant de la normale isue du point donné, est $\alpha\alpha_o^*$ pendant que le rabat-

tement de la normale est $m_0' u_1 \perp \alpha\alpha_0^*$; le point $i_0 = m'u \times \alpha\alpha_0^*$, est le rabattement du pied de la perpendiculaire cherchée. Ce point a comme projection orthogonale i; la trace de la normale au plan (PP^*) est u.

c) *Perpendiculaire commune à deux droites non situées dans un même plan.*

Soit Δ $(\delta\delta^*)$ et D (d, d^*), les droites données (fig. 3). Pour trouver la perpendiculaire commune qui est à la fois la plus

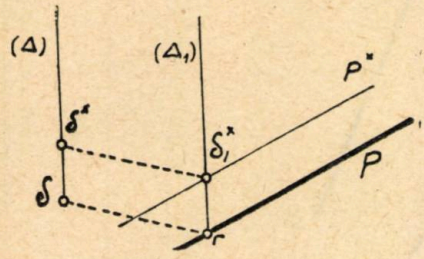


Fig. 1

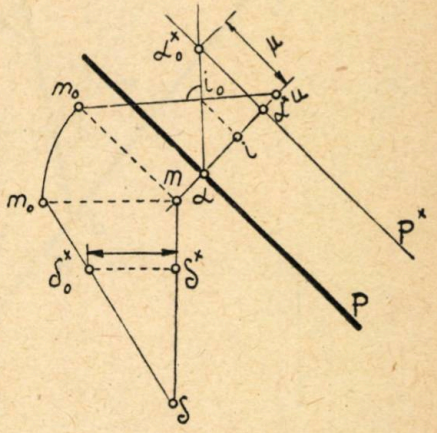


Fig. 2

courte distance de ces deux droites, menons par Δ, le plan (QQ^*) qui este paralléle à D, parce qu'il contient la droite $\delta_1\delta^* \parallel dd^*$.

La perpendiculaire cherchée est $i_1 d_2$ obtenue par une translation du segment id^*, dont la direction est donnée par $D(dd^*)$, afin que le point i soit situé sur $\delta\delta^*$.

d) *Série des droites* (fig. 4).

Soit D_1 $(d_1\, d_1^*)$, D_2 $(d_2\, d_2^*)$ et D_3 $(d_3\, d_1^*)$, trois droites non situées dans un même plan.

Toutes les droites qui recontrent les droites données définissent un système de droites simplement infini ou une série, qui sont les génératrices de même systme d'une quandrique réglée. Une droite de la série, est l'intersection des plans determinés par les points d'une des droites données avec chacune des deux autres.

Soit les plans $(d_2 d_2^*;\ d_1^*)$ et $(d_3 d_3^*;\ d_1^*)$, dont les traces sont $P \parallel d_2^* d_2^*$ et $Q \parallel d_1^* d_3^*$, et dont le point $\alpha = P \times Q$, est la trace de la droite cherchée qui rencontre D_2 et D_3 en β et γ. Quand d_1^* décrit la droite D on obtient la série demandée. La quadrique obtenue est un hyperbolïde à une nappe, dont la trace est une conique.

e) *Droite qui rencontre quatre droites linéairement indépendantes.*

Soient $A(aa^*)$, $B(bb^*)$, $C(cc^*)$ et $D(dd^*)$, quatre droites linéairement idépendantes. Pour la simplicité de l'épure, prenons $D \perp \pi \cdot$: $(d \equiv d^*)$.

Les intersections de la droite $ub^* = (b^*.A) \times (b^*.C)$, avec A, B, et C, sont les points : α, b^* et γ; et les intersections de la droite

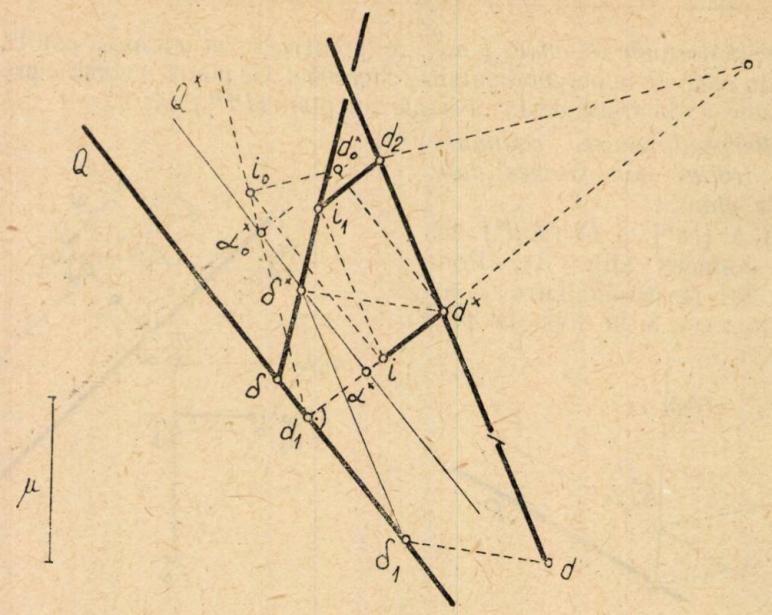


Fig. 3

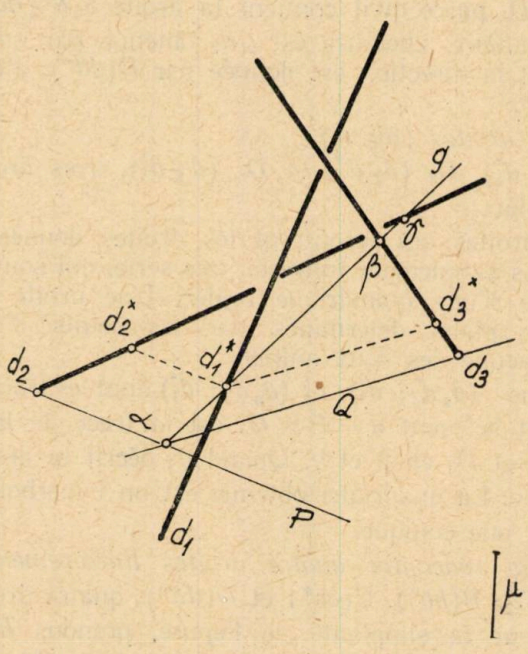


Fig. 4

$vb^* = (b^* C) \times (b^*, D)$ avec B, C et D, sont les points : b^*, $\delta \equiv d$ et γ_1. (fig. 5).

Si b^* décrit la droite B, les points : $\gamma = (b^*.A) \times C$ et $\gamma_1 = (b^*.D) \times C$, décrivent deux ponctuelles projectives de même support. C, et nous aurons

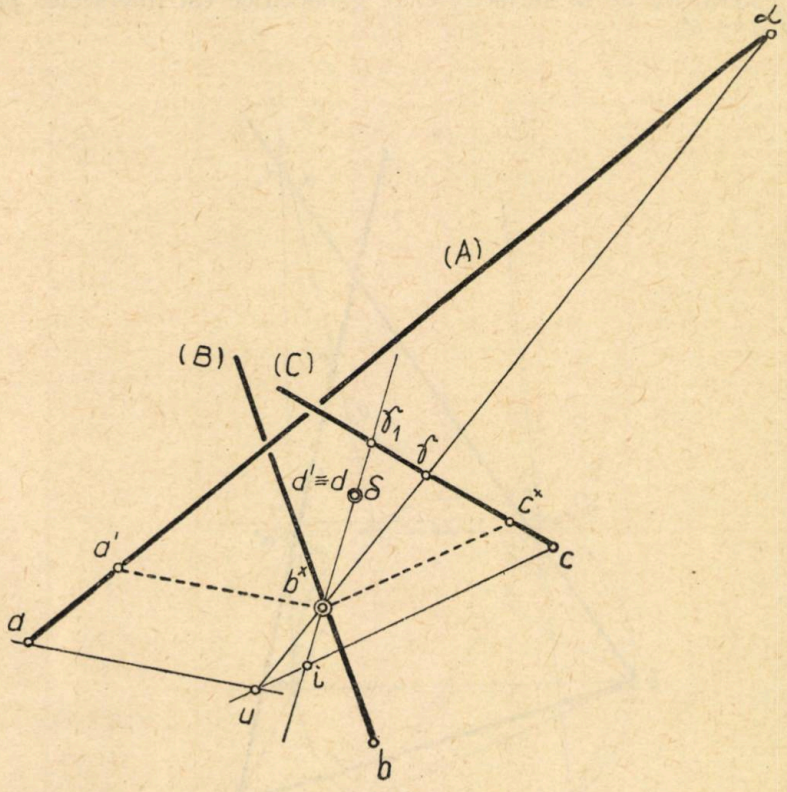


Fig. 5

tant de solutions, combien de positions de coïncidence sont entre les points γ et γ_1.

Si donc la projectivité est hyperbolique nous aurons deux droites réelles et distinctes, si elle est parabolique nous aurons une seule droite, et il n'y-a pas de solution si la projectivité est elliptique.

4. *La représentation d'une surface réglée d'ordre supérieur,* (fig. 6).

Soit la surface réglée générée par les droites qui s'appuient sur une conique (C), et sur deux directices rectilignes $\triangle$ et $\triangle_1$, dont l'une coupe la conique (C).

La directrice rectiligne qui rencontre (C), est un lieu de points doubles de la surface, parce que de chaque point de celle-ci, partent deux génératrices tandis que l'autre directrice rectiligne est simple. Prenons (C) dans le plan π. Les directrices rectilignes sont $\triangle$ $(\delta\delta^*)$ et $\triangle_1$ $(\delta_1 \delta_1^*)$ avec $\delta \in C$.

En ce cas, le lieu des traces des génératrices sur le plan π est la conique (C).

Soit $a \in C$, la trace d'une génératrice quelconque. La droite

$$aa^* = (\alpha \,.\, \delta\delta^*) \times (a \,.\, \delta_1 \delta_1^*)$$

est une génératrice de la surface ; cette génératrice est intersectée par Δ et Δ_1 en α et α'.

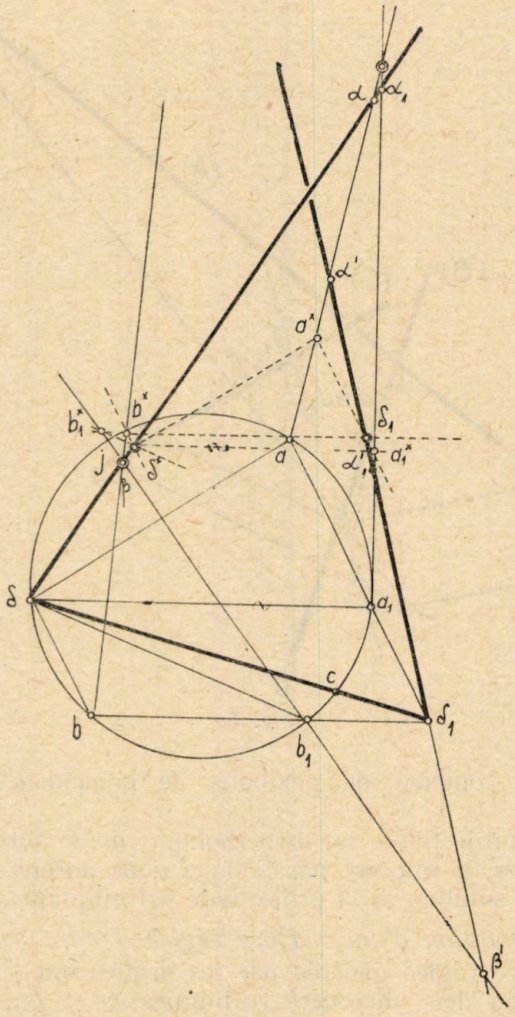


Fig. 6

La trace $a\delta_1$ du plan $(a.\delta_1 \delta_1^*)$ recoupe la directrice (C) en a_1 et on a une seconde génératrice $a_1 a_1^*$, qui est intersectée par Δ et Δ_1 en α_1 et α_1'. Parce que les plans $(a \,.\, \delta_1 \delta_1^*) \equiv (\alpha_1 .\, \delta_1 \delta_1^*)$, les génératrices aa^* et

$\alpha_1\alpha_i^*$ sont incidentes. Le point i este leur point d'incidence. Il *y en* a sur cette surface une ∞^1 de telles génératrices dont les intersections donnent les points d'une courbe double de la surface.

5. *La transformation d'une épure simple en une épure axonométrique* (fig. 7).

Sans nuire à la généralité, on peut choisir un des plans du trièdre trirectangle confondu avec π. Les deux autres sont représentés par : $R \equiv R^*$ et $S \equiv S^*$; le plan axonométrique est (PP^*).

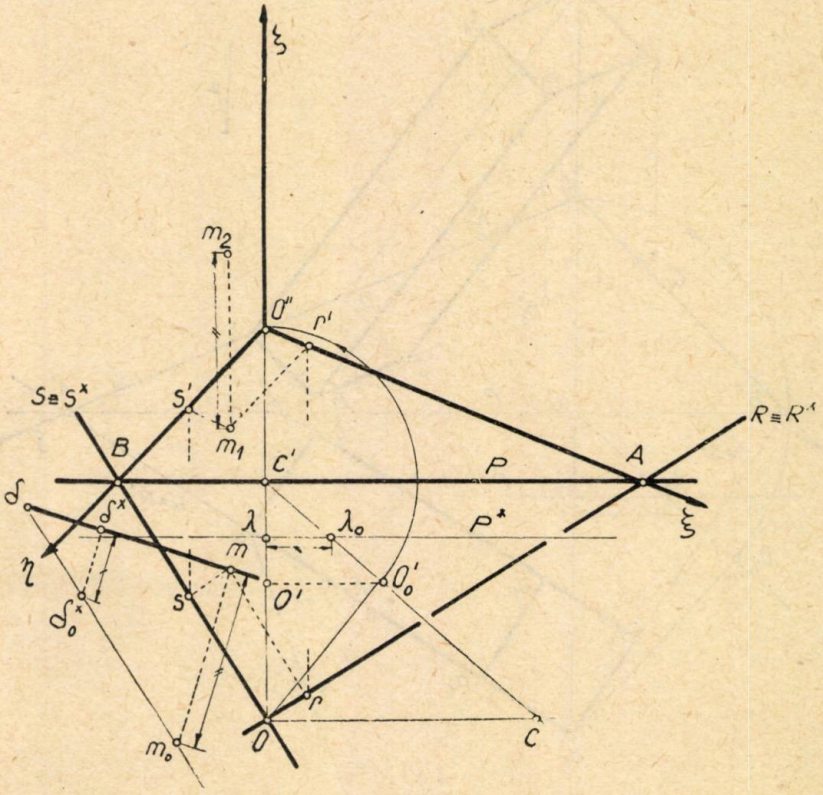


Fig. 7

Le plan (PP^*) coupe sur les arêtes du trièdre les segments : OA, OB et OC. Le dernier, OC, étant obtenu par le rabattement de l'hauter CC' du triangle ABC. On obtient l'origine des axes axonométriques en projettant sur (PP^*), l'origine O du trièdre de référence. La projection O' est située sur OC'. Par le rabattement du plan (PP^*) sur π, ayant comme charnière la trace P, on trouve les axes axonométriques : $O''\xi$, $O''\eta$, $O''\zeta$.

Soit maintenant le point M dont la projection orthogonale est $m \in (\delta\delta^*)$; pour trouver son image axonométrique complète, c'est à dire les projections principale et secondaire, on détermine les coordonnées Or et Os de

sa projection m, par rapport au systhème OR, OS, dont les correspondantes axonométriques sont $O''s'$ et $O''r'$. On a ainsi la projection principale m_1.

Pour obtenir la projection secondaire m_2, on construit $m_1 m_2 = m_0 m$, avec $m_1 m_2 \| O''\zeta$.

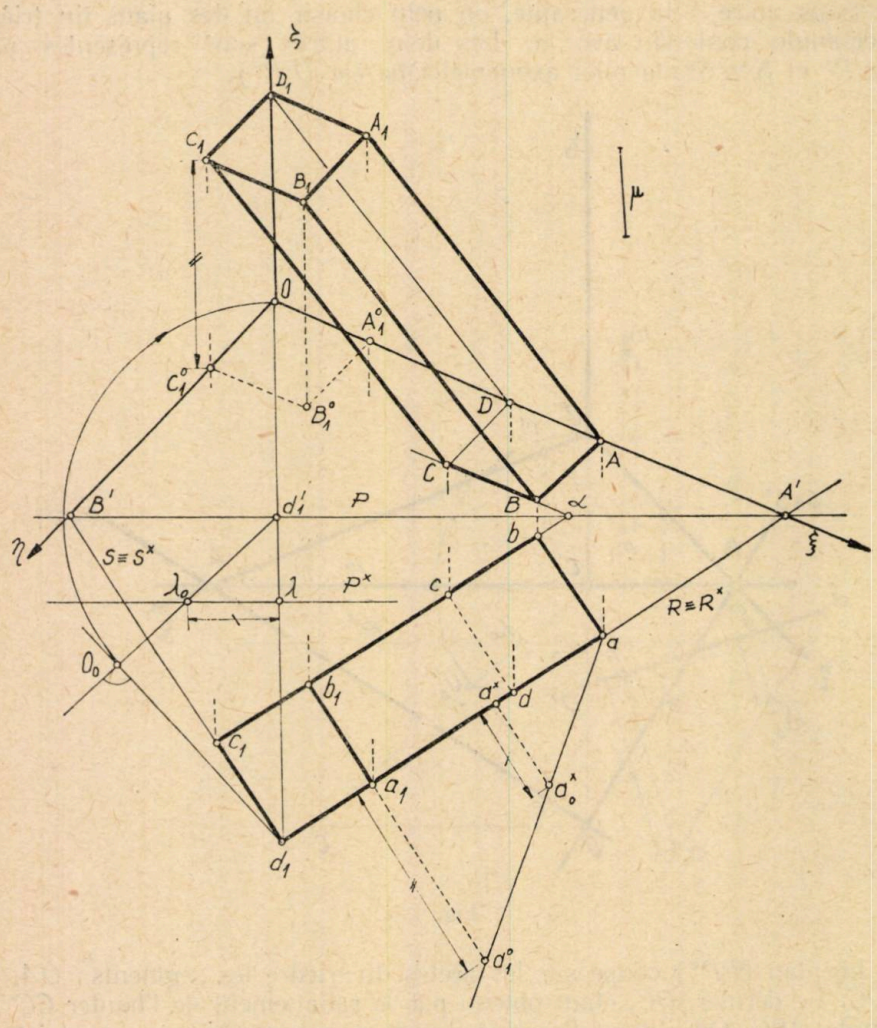


Fig. 8

Exemple pratique. (fig. 8). Soit donné par une épure simple de module μ un parallélipipède dont la base *abcd* est située dans le plan π. Le poit a^* est la seconde trace de l'arête a. Pour obtenir sa perspective axonométrique choisissons comme trièdre de référence, le trièdre trirectangle formé par les plans : π, $R \equiv R^*$, $S \equiv S^*$. Le plan (R) contient la

face ada_1d_1 tandis que (S) passe par l'arête $c_1\ d_1$. Le plan axonométrique est (PP^*).

Pour obtenir les axes axonométriques on rabatte le plan axonométrique sur le plan du tableau, à l'aide du point d'intersection de la normale isue de l'origine des axes cartésiennes avec le plan (PP^*). On obtient ainsi le rabattement O_0. Le plan (PP^*) coupe deux des arêtes du trièdre en A' et B' ; la charnière du rabattement est $A'B' \equiv P$.

L'origine O des axes axonométriques est située sur $d_1\ d_1' \perp A'B'$.

On a ainsi les axes $O\xi$, $O\eta$ et $O\zeta$. Le polygone $ABCD$ est l'affine du $abcd$. Pour avoir l'image axonométrique complète du parallélipipède donné, il suffit de construire le point A_1 en prenant $A_1^0\ A_1 = a_1\ a_1^0$ *avec* $A_1^0\ A_1 \parallel O\zeta$

La chaire de Géométrie descriptive
l'Institut Polytechnique de Bucarest

НОВОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

(Краткое содержание)

Автор изображает линейное пространство при помощи двух параллельных плоскостей П и $П^x$, причем П являетея плоскостью картины.

Рассматривая прямую как основной элемент пространства, получается эпюра с одним изображением. Системой проекции является ортогональная проекция. Автор решил несколько основных задач, касающихся геометрии прямой, а потом нашел превращение эпюры полученной в аксонометрической эпюре.

ON A LINEAR SPACE REPRESENTATION

(Summary)

The author proposes a new linear space representation by means of two parallel planes π and π^*; π beeing the plane of the paper.

Ta king the straight line as a fundamental space element and using a unique image, a complete simple draught is obtained. The projection system used is the orthogonal system.

After resolving somme simple questions concerning the straight line, the image given by a simple draught is transformed in an axonometric image.

SUR UNE NOUVELLE MANIÈRE DE REPRÉSENTER L'ESPACE LINÉAIRE

(Résumé)

L'auteur propose un nouvel système de représenter l'espace linéaire à l'aide de deux plans parallèles π et π^*, dont π est le plan du tableau. En considérant la droite comme l'élément fondamental de l'espace, il obtient une épure simple complète, à l'aide d'une image unique. Le systhème de projection est celui orthogonal.

Après avoir résolu les problèmes fondamentales concernant la géométrie de la droite, on transforme l'épure simple en une épure axonométrique.

EINE NEUE ABBILDUNG DES STRAHLRAUMES

(Zusammenfassung)

Der Verfasser findet ein neues System den Strahlraum darzustellen indem er als anhaltsebenen zwei parallele Ebenen π und π^* annimt, von denen π die Bildebene ist.

Indem er die Gerade als Grundelement des Raumes annimt, erhält der Verfasser ein vollkommenes einfaches Bild mit Hilfe eines einzigen Bildes. Das Projektionssystem ist achteckig. Nachdem er die Grundprobleme hinsichtlich der Geometrie der Geraden löst, hat der Verfasser die Umwandlung des einfachen Grundrisses in einen axonometrischen Grundriss gefunden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

UN NOU PROCEDEU DE REZOLVARE A UNOR PROBLEME CU CONDIȚII LA LIMITĂ

ION M. MIU

Metoda Fourier-Bernoulli permite rezolvarea unor ecuații diferențiale cu ajutorul separării variabilelor, fiind necesar apoi găsirea valorilor proprii și a funcțiilor proprii în număr infinit. Însă deteminarea valorilor proprii, constituie uneori o dificultate sau cel puțin trebuiesc considerații și raționamente suplimentare, deoarece ele trebuiesc alese dintr-o mulțime mai mare de valori.

Procedeul ce-l vom indica are avantajul că nu mai pune problema determinării valorilor proprii, simplificînd prin aceasta calculele. În general el se aplică acolo unde se aplică și metoda Fourier-Bernoulli, iar uneori chiar și la alte probleme unde metoda separării variabilelor nu dă rezultate.

Procedeul constă în a găsi un sistem convenabil complet de funcții ortogonale după care să dezvoltăm în serie Fourier funcția w necunoscută. Fie acest sistem:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_k(x), \cdots \tag{1}$$

Avem:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x) \tag{2}$$

unde α_k sînt coeficienții Fourier ai seriei și pot fi constanți, (cînd w este numai funcție de x) sau funcții și de alte variabile în afară de x.

În rezolvarea problemei se admite ipoteza, că în condițiile problemei, soluția există și este unică.

Aplicarea procedeului constă din două părți:

I. Prima chestiune și uneori mai dificilă este găsirea sistemului 1) de funcții ortogorale și acesta se află avînd în vedere ecuația cu derivate parțiale care intervine în problemă și condițiile problemei.

Din exemplele ce le vom da, va rezulta mai bine determinarea funcțiilor φ_k.

II. A doua chestiune este determinarea coeficienților astfel ca seria 2) să satisfacă ecuația cu derivate parțiale a problemei și condițiile problemei.

Pentru determinarea coeficienților α_k se procedează astfel:

a) Se înmulțește ecuația diferențială în general cu $\varphi_k(x)$ sau cu $\psi_k(x)\varphi_k(x)$ unde $\psi(x)$ este o funcție convenabilă, care se află ținînd ținînd seama de ponderea sistemului 1).

b) Se integrează apoi expresia obținută la a) termen cu termen în domeniul respectiv, ținîndu-se seama de ortogonalitatea sistemului 1) și de condițiile problemei.

c) Se pot întîmpla următoarele cazuri:

— Coeficenții α_k ai seriei 2) să rezulte imediat și atunci am aflat funcția ω.

— Între coeficienții α_k să rezulte o relație, care să necesite în prealabil determinarea unora din ei prin ecuații algebrice deduse din condițiile problemei, sau prin ecuații diferențiale.

d) În rezolvarea problemei se pot întrebuința și șiruri biortogonale de funcțiuni convenabil alese.

În cele ce urmează vom arăta cum se aplică metoda la cîteva cazuri.

A. PROBLEMA COARDEI VIBRANTE FINITE

Să se găsească soluția ecuației

$$c^2 u_{x2} - u_{t2} = 0 \tag{3}$$

pentru $o \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, care satisface condițiile la limită

$$u(0, t) = 0, \; u(l, t) = 0 \tag{4}$$

și condițiile inițialeî:

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad u_t\big|_{t=0} = g(x) \tag{5}$$

unde $f(x)$ și $g(x)$ trebuie să satisfacă la:

$$f(o) = f(l) = g(o) = g(l)$$

Vom considera funcțiunea u impară în intervalul $(-l, l)$, deoarece ne interesează valoarea ei numai în intervalul (o, l).

Luăm:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

unde

$$A_n(t) = \frac{2}{l}\int_o^l \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{7}$$

Înmulțim în 3) cu $\sin \frac{n\pi x}{l}$ și integrăm de la o la l. Avem:

$$\int_o^l (c^2 u_{x^2} - u_{t^2}) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0. \tag{8}$$

Se desparte în două integrale, dintre care prima se integrează de două ori prin părți ținînd cont de condițiile la limită 4) și de 7). Pentru a doua integrală avem:

$$\frac{2}{l}\int_o^l u_{t^2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{d^2 A_n}{dt^2}$$

Relația 8) devine:

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} + \frac{c^2 n^2 \pi^2 A_n}{l^2} = 0$$

din care se obține:

$$A_n = \alpha_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + \beta_n \sin \frac{cn\pi}{l} t$$

Înlocuind în 6) avem:

$$u = \sum \left(a_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + \beta_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{6'}$$

Considerăm dezvoltările în serie Fourier ale lui $f(x)$ și $g(x)$:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Din 6') pentru $t = o$ ținînd cont de 5), respectiv 9) avem

$$u(x, o) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$u_t(x, o) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Rezultă

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n = a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ \beta_n = \frac{l}{n\pi c} b_m &= \frac{2}{n\pi c}\int_o^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Seria 6') cu valorile coeficienților din 10) dă soluția problemei.

B. PROBLEMA MEMBRANEI RECTANGULARE

Se cere soluția ecuației:

$$c^2(w_{x2} + w_{y2}) - w_{t2} = 0 \tag{11}$$

pentru $o \leqslant x \leqslant a$, $o \leqslant y \leqslant b$, $t \geqslant o$, care să satisfacă condițiile la limită: pentru $x = o$, $x = a$, $y = a$, $y = b$ avem $w = o$ și condițiile inițiale

$$w\,|_{t=0} = f(x, y), \quad w_t\,|_{t=0} = g(x, y)$$

unde f și g satisfac la:

$$f(o, y) = f(a, y) = f(x, o) = f(x, b) = 0$$

$$g(o. y) = g(a, y) = x, o) = g(x, b) = 0$$

Scriem funcțiunea w sub formă de serie Fourier impară în x și y

$$w(x, y\,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{12}$$

unde

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_o^a \int_o^b w \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy. \tag{13}$$

Înmulțim ecuația 11) cu $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ și integrăm astfel:

$$\int_o^a \int_o^b [c^2 (w_{x2} + w_{y2}) - w_{t2}] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy = 0. \tag{14}$$

Integrăm primele două integrale din membrul I de cîte două ori prin părți, prima în raport cu x și a doua în raport cu y ținîndu-se cont de condițiile la limită și de 13), iar pentru integrala treia se ține seamă de relația

$$\frac{4}{ab} \int_o^a \int_o^b w_{t2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy = \frac{d^2 A_{mn}(t)}{dt^2},$$

dedusă din 13).

Egalitatea 14) devine:

$$\frac{d^2 A_{mn}}{dt^2} + c^2\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) A_{mn} = 0,$$

din care se găsește:

$$A_{mn} = \alpha_{mn} \cos c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\, t + \beta_{mn} \sin c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\, t$$

Înlocuind valorile lui A_{mn} în 12) avem:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{mn} \cos c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\, t + \right.$$
$$\left. + \beta_{mn} \sin c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\, t \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{15}$$

Pentru determinarea constantelor α_{mn}, β_{mn} utilizăm condițiile inițiale. Considerăm dezvoltările în serie Fourier ale lui $f(x, y)$ și $g(x, y)$:

$$f(x, y) = \sum \sum a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$
$$g(x, y) = \sum \sum b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi x}{b} \tag{16}$$

Pentru $t = o$ din 15) avem:

$$w(x, y, o) = \sum \sum \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$
$$w_t(x, y\, o) = \sum \sum \beta_{mn}\, c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{17}$$

Din (16) și (17) avem

$$\alpha_{mn} = a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_o^a \int_o^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy \tag{18}$$

$$\beta_{mn} = \frac{b_{mn}}{c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}} = \frac{4}{c\pi ab \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}} \int_o^a \int_o^b g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

Seria 15) cu coeficienții dați de 18) dă soluția problemei.

C. PROBLEMA MEMBRANEI CIRCULARE

Se cere soluția ecuației [3] (pag. 462):

$$w_{r^2} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta^2} = c^2 w_{t^2} \tag{19}$$

pentru $o \leqslant r \leqslant a$, $t \geqslant 0$, care satisface la:

— condiția la limită: $w(a, \theta, t) = 0$

— condiții inițiale: $w|_{t=0} = f(r, \theta)$, $w_t|_{t=0} = g(r, \theta)$

Funcțiile $f(r, \theta)$, $g(r, \theta)$, trebuie să fie finite pentru $r = 0$ și periodice în θ, de perioadă 2π.

Este evident că funcția w definită în cercul cu raza a prin condițiile de mai sus este periodică cu perioada 2π

Deci punem

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n(r,t)\cos n\theta + B_n(r,t)\sin n\theta) \tag{20}$$

unde:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\,d\theta,\quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w\cos n\theta\,d\theta,\quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w\sin n\theta\,d\theta$$

Inmulțind 19) cu $\cos n\theta$ și integrînd între 0 și 2π obținem:

$$\frac{\partial^2 A_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2\pi}\int_0^{2\pi} w_{\theta 2}\cos n\theta\,d\theta = c^2\frac{\partial^2 A_n}{\partial t^2}$$

Integrăm de două ori prin părți integrala din membrul I ținînd cont de condițiile problemei. Obținem:

$$\frac{\partial^2 A_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}A_n = c^2\frac{\partial^2 A_n}{\partial t^2} \tag{21 a}$$

Dacă se înmulțește 19) cu $\sin n\theta$ și se procedează analog se obține:

$$\frac{\partial^2 B_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}B_n = c^2\frac{\partial^2 B_n}{\partial t^2} \tag{21 b}$$

Din 21 a) și 21 b) se vede că A_n și B_n satisfac aceiași ecuație diferențială de forma:

$$u''_{\rho 2} + \frac{1}{\varrho}u'_\rho - \frac{n^2}{r^2}u = c^2 u''_{t\,2}, \tag{22}$$

pe care ne propunem s-o integrăm.

Se vede că r ia valori în intervalul (o, a).

Facem schimbarea de variabilă:

$$r = a\varrho$$

unde ϱ ia valori în intervalul $(0, 1)$ și obținem:

$$u''_{\rho 2} + \frac{1}{\varrho}u'_\rho - \frac{n^2}{\varrho^2}u = c^2 a^2 u''_{t\,2} \tag{22'}$$

Dezovltăm funcția u în serie Fourier după funcțiile Bessel.

Avem

$$u = \sum_{p=1}^{\infty} c_p(t)\,\varphi_n(\lambda_p\varrho) \tag{23}$$

unde λ_p sînt zerorile pozitive ale funcției Bessel $\varphi_n(\varrho)$ de prima speță.

Rezultă că $\varphi_n(\varrho)$ satisface ecuația :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right)\varphi = 0, \; n \text{ întreg pozitiv sau zero} \qquad (24)$$

Avem :

$$c_p(t) = \frac{2}{\varphi_{n+1}(\lambda_n)} \int_0^1 u\, \varrho\, \varphi_n(\lambda_p \varrho)\, d\varrho$$

Inmulțim ecuația 22′) cu $\varrho \varphi_n(\lambda_n \varrho)$ și integrînd între 0 și 1 avem :

$$\int_0^1 \varrho\, u''_{\varrho 2}\, \varphi(\lambda_p \varrho)\, d\varrho + \int_0^1 \varrho\, u'_\varrho \varphi(\lambda_p \varrho)\, d\varrho - \int_0^1 \frac{n^2}{\varrho} \varphi(\lambda_p \varrho)\, d\varrho =$$

$$= c^2 a^2 \int_0^1 \varrho\, u''_{t2} \varphi(\lambda_p \varrho)\, d\varrho$$

(pentru simplicitate nu s-a mai pus indicele lui φ).

Integrăm prima integrală prin părți și relația precedentă devine :

$$\left| u'_\varrho \varrho\, \varphi(\lambda_p \varrho) \right|_0^1 - \int_0^1 u'_\varrho \left[\varrho \frac{\partial \varphi(\lambda_p \varrho)}{\partial(\lambda_p \varrho)} \lambda_p + \varphi(\lambda_p \varrho) \right] d\varrho + \int_0^1 u'_\varrho \varphi(\lambda_n \varrho)\, d\varrho -$$

$$- \int_0^1 \frac{n^2}{\varrho^2} u\, \varphi(\lambda_p \varrho)\, d\varrho = c^2 a^2 \int_0^1 \varrho\, u''_{t^2} \varphi(\lambda_p \varrho)\, d\varrho$$

Cum : $\left| u'_\varrho \varrho\, \varphi(\lambda_p \varrho) \right|_0^1 = 0$, obținem :

$$- \int_0^1 \varrho\, u'_\varrho \frac{\partial \varphi(\lambda_p \varrho)}{\partial(\lambda_p \varrho)} d\varrho - \int_0^1 \frac{n^2}{\varrho^2} u\, \varphi(\lambda_n \varrho)\, d\varrho = c^2 a^2 \int_0^1 \varrho\, u''_{t2} \varphi(\lambda_p \varrho)\, d\varrho$$

Integrînd din nou prima integrală prin părți obținem :

$$- \left| u\, \varrho \frac{\partial \varphi(\lambda_p \varrho)}{\partial(\lambda_p \varrho)} \lambda_p \right|_0^1 + \int_0^1 u \left[\varrho \frac{\partial^2 \varphi(\lambda_p \varrho)}{\partial(\lambda_p \varrho)^2} \lambda_p^2 + \frac{\partial \varphi(\lambda_p \varrho)}{\partial(\lambda_p \varrho)} \lambda_p - \right.$$

$$\left. - \frac{n^2}{\varrho} \varphi(p \varrho) \right] d\varrho = c^2 a^2 \int_0^1 \varrho\, u''_{t2} \varphi(\lambda_p)\, d\varrho \qquad (25)$$

Din 24) înlocuind pe ϱ cu $\lambda_p \varrho$ rezultă :

$$\varrho^2 \frac{\partial^2 \varphi(\lambda_p \varrho)}{\partial(\lambda_p \varrho)^2} \lambda_p^2 + \frac{\partial \varphi(\lambda_p \varrho)}{\partial(\lambda_p \varrho)} - \frac{n^2}{\varrho} \varphi(\lambda_p \varrho) = -\lambda_p^2 \varrho\, \varphi(\lambda_p \varrho)$$

și atunci ținînd cont în 25) de aceasta, de faptul că primul termen este nul și de formula de mai sus, care dă pe c_p obținem :

$$c^2 a^2 \frac{\partial^2 c_p}{\partial t^2} + \lambda_p^2 c_p = 0$$

de unde avem:

$$c_p = k'_p \cos\frac{\lambda_p l}{c a} + k''_p \sin\frac{\lambda_p l}{c a}$$

Seria ce da pe u din 23) devine:

$$u = \sum_{p=1}^{\infty}\left(k'_p \cos\frac{\lambda_p t}{c a} + k''_p \sin\frac{\lambda_p t}{c a}\right)\varphi_n\left(\frac{\lambda_p r}{a}\right) \tag{26}$$

Cum A_n şi B_n satisfac aceiaşi ecuaţie difeernţială 22), ei se obţin din 26) dînd constantelor k'_p, k''_p diverse valori.

Rezultă:

$$A_n = \sum_{p=1}^{\infty}\left(M'_p \cos\frac{\lambda_p t}{c a} + M''_p \sin\frac{\lambda_p t}{c a}\right)\varphi_n\left(\frac{\lambda_p r}{a}\right)$$

$$B_n = \sum_{p=1}^{\infty}\left(N'_p \cos\frac{\lambda_p t}{c a} + N''_p \sin\frac{\lambda_p t}{c a}\right)\varphi_n\left(\frac{\lambda_p r}{a}\right)$$

unde M'_p, M''_p, N'_p, N''_p sînt constante.

Cu valorile de mai sus ale lui A_n şi B_n valoarea lui w din 20) devine:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left(M'_p \cos\frac{\lambda_p t}{c a} + M''_p \sin\frac{\lambda_p t}{c a}\right)\cos n\theta + \left(N'_p \cos\frac{\lambda_p t}{c a} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + N''_p \sin\frac{\lambda_p t}{c a}\right)\sin n\theta\right\}\varphi_n\left(\frac{\lambda_p r}{a}\right)$$

Constantele M'_p, M''_p, N'_p, N''_p se găsesc punînd condiţiile ca w să satisfacă la:

$$w\,|_{t=0} = f(r,\theta),\quad w_t\,|_{t=0} = g(r,\theta)$$

(după ce în prealabil se dezvoltă $f(r,\theta)$, $g(r,\theta)$ în serie dublă Fourier după funcţiunile circulare şi funcţiunile Bessel).

D. PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU DREPTUNGHI

Se cere soluţia ecuaţiei diferenţiale [4] (vol. I, pag. 106).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{27}$$

definită în dreptunghiul $o \leqslant x \leqslant a$, $o \leqslant y \leqslant b$, cunoscîndu-se valoarea acestei funcţiuni pe conturul dreptunghiului.

Considerăm funcţia sub forma:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{28}$$

Înmulțim ecuația 27) cu $\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ și integrînd în dreptunghiul considerat avem: $\int_o^a\int_o^b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy=0$

Integrînd prin părți de două ori obținem:

$$A_{mn}=-\frac{4}{m^2b^2+n^2a^2}\left(mb\int_o^b\left|u\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right|_o^a dy+\right.$$
$$\left.+na\int_o^a\left|\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right|_o^b dx\right. \tag{29}$$

Membrul II fiind cunoscut, această formulă dă coeficienții seriei 28).

Catedra de Matematici din Institutul
Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1.] *V. I. Smirnov*: Curs de matematici superioare. Traducere din limba rusă, editura tehnică, 1956.

[2.] *N. I. Mușhelișvili*: Cîteva probleme fundamentale ale teoriei matematice a elasticității. (Litografiat de Academia R.P.R.).

[3.] *Mircea Drăgan*: Introducere matematică în fizica teoretică modernă. (Editura tehnică, 1957).

[4.] *L. V. Kantorovici* și *V. Krîlov*: Metode de aproximație ale analizei superioare. (Litografiat de Academia R.P.R.).

НОВЫИ СПОСОБ РАЗРЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ С ГРАНИНЧЫМИ УСЛОВИЯМИ

(Краткое содержание)

В задачах, которые приводят к уравнениями в частных производных с граничными условиями, указывается более простое решение при помощи рядов на основ некоторых замечаний о данных условий, о применении, и о форме диференциальных уравнений.

Преимущество этого метода по сравнению с методом Фурье-Бернулли с разделением переменных состоит в том, что приводит быстрее к решению, и имеет более широкое поле прменения.

Даются разные применения к некоторым классическим задачам. Из чего вилнее простота данного способа.

A NEW RROCEDURE OF SOLWING SOME PROBLEMS WITH CONDITIONS AT LIMITS

(S u m m a r y)

A simpler solving method by means of scries is indicated for the problems bearing on the derivating partial equations with conditions at limits, based on some observations on the given conditions, on the field and form of the differential equations.

The method presents advantages as to Fourier-Bernoulli's method on the separation of variables as it leads more quickly to the result and it has a wieder field of application.

Several applications on some classical problems are given emphasizing the simplity of the procedure.

UN NOUVEAU PROCEDE DE RESOUDRE CERTAINS PROBLEMES A CONDITIONS LIMITE

(R é s u m é)

On idique pour les problemes conduisant auz équations à dérévées partielles avec des conditions limite, une methode plus simple de les résondre à l'aide des séries, en fondant certaines observations sur les conditions données, sur le domaine et sur la forme des équations différentielles.

La methode présente des avantages par rapport à la méthode de la séparation des variables de Fourier-Bernoulli, par le fait qu'elle mene plus rapidement au résultat et qu'elle a un champ plus grand d'applicabilité.

On donne diverses applications sur quelques problèmes classiques, d'ou il résulte encore mieux la simplicité du procédé.

EIN NEUES VERFAHREN ZUR LÖSUNG VON GRENZPROBLEMEN

(Z u s a m m e n f a s s u n g)

Bei Problemen die zu Gleichungen mit Teilableitungen mit Grenzbedingungen führen wird eine einfache Methode vorgeführt zur Lösung mit Hilfe der Serien, die auf einige Beobachtungen über die gegebenen Bedingungen und die Form der diferenziellen Gleichungen begründet ist.

Diese Methode zeigt Vorteile gegenüber der Methode von Fourier-Bernoulii uber die Trennung von Veränderlichen, da sie schneller zum Resultat führt und ein grösseres Anwendungsgebiet hat.

Es werden verschiedene Anwendungen an klassischen Problemen vorgeführt aus denen die Einfachheit des Verfahrens noch besser hervorgeht.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

ASUPRA CARACTERISTICILOR UNUI SISTEM DE ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE*

G. TEODORESCU

Într-o lucrare apărută în Analele Academiei R.P.R., Acad. Gr. C. Moisil tratează mai multe metode pentru aflarea ecuațiilor caracteristicilor unui sistem de ecuații cu derivate parțiale și aplică aceste metode la sistemul de ecuații cu derivate parțiale obținut din condițiile ca o funcție de variabila ipercomplexă $z = u + iv + \varepsilon s + i\varepsilon w$, să fie monogenă. De asemenea, aplică aceleași metode și pentru aflarea caracteristicilor sistemelor de ecuații cu derivate parțiale ale lui Cauchy-Poincaré, care dau condițiile pentru monogeneitatea funcțiilor U + iV, de două variabile complexe, ordinare, u + is, s + it.

În această lucrare vom căuta caracteristicile sistemului de ecuații cu derivate parțiale, care dau condițiile ca o funcție de două variabile ipercomplexe, să fie monogenă, aplicînd aceea din metodele date de Acad. Gr. C. Moisil, care m-a dus într-un mod mai simplu la aflarea ecuațiilor caracteristicilor.

Să vedem întîi care este metoda utilizată.

Vom considera un sistem de ecuații cu derivate parțiale, cu m funcții necunoscute $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ și cu $n + 2$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z$, sistem de forma

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_p} = \sum_j \alpha_{pij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \sum_j \beta_{pij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \tag{1}$$

Deoarece avem,

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_p \partial x_q} = \frac{\partial \alpha_{pij}}{\partial x_q} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \sum_j \varphi_{pij} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y \partial x_q} + \sum_j \frac{\partial \beta_{pij}}{\partial x_q} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} + \sum_j \beta_{pib} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z \partial x_q}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_q \partial y} = \sum_l \frac{\partial \alpha_{qjl}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_l}{\partial y} + \sum_l \alpha_{qjl} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial^2 y} + \sum_l \frac{\partial \beta_{qfl}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_l}{\partial z} + \sum_l \beta_{qjl} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_q \partial z} = \sum_l \frac{\partial \alpha_{qfl}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_l}{\partial y} + \sum_l \varphi_{qjl} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial y \partial z} + \sum_l \frac{\partial \beta_{qfl}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_l}{\partial z} + \sum_l \beta_{qfl} \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial z^2}$$

* Comunicată la sesiunea Academiei R.P.R.

ecuațiile (1) vor fi complet integrabile dacă avem

$$\frac{\partial \alpha_{qjl}}{\partial x_q} - \frac{\partial \alpha_{qjl}}{\partial x_p} + \sum_j \alpha_{pil} \frac{\partial \alpha_{qjl}}{\partial y} + \sum_j \beta_{pij} \frac{\partial \alpha_{qjl}}{\partial z} - \sum_j \alpha_{qij} \frac{\partial \alpha_{qjl}}{\partial y} - \\ - \sum_j \beta_{qif} \frac{\partial \alpha_{qjl}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \beta_{pil}}{\partial x_q} - \frac{\partial \beta_{qil}}{\partial x_p} + \sum_j \alpha_{pij} \frac{\partial \beta_{qjl}}{\partial y} + \sum_j \beta_{pij} \frac{\partial \beta_{qjl}}{\partial z} - \sum_j \alpha_{qij} \frac{\partial \beta_{pjl}}{\partial y} - \\ - \sum_j \beta_{qij} \frac{\partial \beta_{pjl}}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Să facem o schimbare de variabile

$$\begin{aligned} \bar{x}_p &= \bar{x}_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z) \\ \bar{y} &= \bar{y}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z) \\ \bar{z} &= \bar{z}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z) \end{aligned} \tag{3}$$

Vom avea

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{y}} + \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{y}} \left(\delta_{ij} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \sum_p \alpha_{pil} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{y}} \right) + \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} \left(\delta_{ij} \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} + \sum_p \beta_{pij} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$\frac{6\varphi_i}{\partial \bar{z}} = \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{y}} \left(\delta_{ij} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + \sum_p \alpha_{pij} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{z}} \right) + \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} \left(\delta_{ij} \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} + \sum_p \beta_{pij} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{z}} \right) \tag{4}$$

Notînd cu

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \delta_{ij} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \sum_p \alpha_{pij} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{y}} \\ B_{ij} &= \delta_{ij} \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} + \sum_p \beta_{pij} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{y}} \\ C_{ij} &= \delta_{ij} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + \sum_p \alpha_{pij} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{z}} \\ D_{ij} &= \delta_{ij} \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} + \sum_p \beta_{pij} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \tag{5}$$

sistemul (4) devine

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{y}} = \sum_j A_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \sum_j B_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} = \sum_j C_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \sum_j D_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}$$

Acest sistem poate fi rezolvat în raport cu $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = \sum_j \bar{A}_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{y}} + \sum_j \bar{B}_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \sum_j \bar{C}_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{y}} + \sum_j \bar{D}_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}}$$

dacă determinantul următor nu e nul

$$\begin{vmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & D_{ij} \end{vmatrix} = D \neq 0 \tag{6}$$

În acest caz, vom putea exprima pe $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_p}$ cu ajutorul derivatelor $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{y}}$ și $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{z}}$.

Vom avea

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_p} = \sum_q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_q} \frac{\partial x_q}{\partial \bar{x}_p} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_p} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \bar{x}_p}.$$

Sau, ținînd seama de (1)

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_p} = \sum_q \frac{\partial x_q}{\partial \bar{x}_p} \left(\alpha_{pij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \beta_{qij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right) +$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}_p} \left(\sum_j \bar{A}_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{y}} + \sum_j \bar{B}_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} \right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial \bar{x}_p} \left(\sum_j \bar{C}_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{y}} + \sum_j \bar{D}_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}} \right) =$$

$$= \sum_j \bar{\alpha}_{pij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{y}} + \sum_j \bar{\beta}_{pij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}}.$$

Deci sistemul (1) admite soluții, cu valori date pe varietatea $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \ldots = \bar{x}_n = 0$ cu y și z arbitrari, cu condiția ca varietatea să nu fie caracteristică, numind varietate caracteristică aceea pentru care determinantul D este nul.

Deci ecuația caracteristicilor sistemului (1) este dată de

$$\begin{vmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & D_{ij} \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

O suprafață integrală a acestei ecuații, va fi numită suprafața caracteristică.

Vom aplica cele spuse mai sus, sistemului de ecuații cu derivate parțiale care dă condițiile ca o funcție ipercomplexă, de două variabile ipercomplexe, să fie monogenă.

Fie

$$f(z, z') = U + iV + \varepsilon S + i\varepsilon W$$

cu

$$z = u + iv + \varepsilon s + i\varepsilon w$$

$$z' = u' + iv' + \varepsilon s' + i\varepsilon w'$$

$$(\text{cu } i^2 + 1 = 0\,;\ \varepsilon^2 = 0\,;\ i\varepsilon = \varepsilon i)$$

Condițiile ca această funcție $f(z, z')$ să fie monogenă, adică $\frac{\partial f}{\partial z}$ și $\frac{\partial f}{\partial z'}$ să nu depindă de direcțiile lui dz și dz' sînt următoarele

$$\frac{\partial f}{\partial v} - i\frac{\partial f}{\partial u} = 0\,;\ \frac{\partial f}{\partial s} - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial u} = 0\,;\ \frac{\partial f}{\partial w} - i\varepsilon\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v'} - i\frac{\partial f}{\partial n'} = 0\,;\ \frac{\partial f}{\partial s'} - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial u'} = 0\,;\ \frac{\partial f}{\partial w'} - i\varepsilon\frac{\partial f}{\partial u'} = 0. \tag{8}$$

Acest sistem revine la un sistem de 24 ecuații cu derivate parțiale cu 4 funcții necunoscute U, V, S, W de 8 variabile u, v, s, w, u', v', w'.

Sistemul este de tip Koenig considerat mai sus sistemul (1), cu $y = u$, $z = u'$, $x_p = v, s, w, v', s', w'$.

Teorema de existență a lui Koenig, ne permite să rezolvăm o problemă de tip Cauchy, U, V, S, W fiind date pe varietatea $v = s = w = v' = s' = w' = o$ dacă această varitate nu e caracteristică.

Sistemul (7), dacă despărțim componentele, este un sistem de 24 ecuații cu 4 funcții necunoscute

$$\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} = 0\,;\ \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial u}\,;\ \frac{\partial S}{\partial v} = -\frac{\partial W}{\partial u}\,;\ \frac{W\partial}{\partial v} = \frac{\partial S}{\partial u}$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = 0\,;\ \frac{\partial V}{\partial s} = 0\,;\ \frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial u}\,;\ \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial u}\,;\ \frac{\partial U}{\partial w} = 0\,;\ \frac{\partial U}{0w} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial w} = -\frac{\partial V}{\partial u}\,;\ \frac{\partial W}{\partial w} = \frac{\partial U}{\partial u}\,;\ \frac{\partial U}{\partial v'} = -\frac{\partial V}{\partial u'}\,;\ \frac{\partial V}{\partial v'} = \frac{\partial U}{\partial u'}\,; \tag{9}$$

$$\frac{\partial S}{\partial v'} = -\frac{\partial W}{\partial u'}\,;\ \frac{\partial W}{\partial v'} = \frac{\partial S}{\partial u'}\,:\ \frac{\partial V}{\partial s'} = 0\,;\ \frac{\partial V}{\partial s'} = 9$$

$$\frac{\partial S}{\partial s'} = \frac{\partial U}{\partial v'}\,;\ \frac{\partial W}{\partial s'} = \frac{\partial V}{\partial u'}\,;\ \frac{\partial U}{\partial w'} = 0\,;\ \frac{\partial V}{\partial w'} = 0\,;\ \frac{\partial S}{\partial u'} = \frac{\partial V}{\partial u'}\,;\ \frac{\partial W}{\partial w'} = \frac{\partial U}{\partial u'}$$

Coeficienții α_{pij} și β_{pij} vor avea valorile următoare:

$$\alpha_{112} = -1\,;\ \alpha_{111} = \alpha_{113} = \alpha_{114} = 0\,;\ \alpha_{121} = 1\,;\ \alpha_{122} = \alpha_{123} = \alpha_{124} = 0$$

$$\alpha_{134} = -1\,:\ \alpha_{131} = \alpha_{132} = \alpha_{133} = 0\,;\ \alpha_{143} = 1\,;\ \alpha_{141} = \alpha_{142} = \alpha_{144} = 0$$

$$\alpha_{211} = \alpha_{212} = \alpha_{213} = \alpha_{214} = 0\,;\ \alpha_{221} = \alpha_{222} = \alpha_{223} = \alpha_{224} = 0$$

$$\alpha_{131} = 1\ ;\ \alpha_{232} = \alpha_{233} = \alpha_{234} = 0\ ;\ \alpha_{242} = 1\ ;\ \alpha_{241} = \alpha_{243} = \alpha_{244} = 0$$

$$\alpha_{311} = \alpha_{312} = \alpha_{313} = \alpha_{314} = 0\ ;\ \alpha_{321} = \alpha_{322} = \alpha_{323} = \alpha_{324} = 0$$

$$\alpha_{332} = -1\ ;\ \alpha_{331} = \alpha_{333} = \alpha_{334} = 0\ ;\ \alpha_{341} = 1\ ;\ \alpha_{342} = \alpha_{343} = \alpha_{344} = 0$$

$$\alpha_{pij} = 0 \quad \text{pentru } p = 4, 5, 6$$

$$\beta_{pij} = 0 \quad \text{pentru } p = 1, 2, 3$$

$$\beta_{412} = -1\ ;\ \beta_{411} = \beta_{413} = \beta_{414} = 0\ ;\ \beta_{421} = 1\ ;\ \beta_{422} = \beta_{423} = \beta_{424} = 0$$

$$\beta_{434} = -1\ ;\ \beta_{431} = \beta_{432} = \beta_{433} = 0\ ;\ \beta_{443} = 1;\ \beta_{441} = \beta_{442} = \beta_{444} = 0$$

$$\beta_{511} = \beta_{512} = \beta_{513} = \beta_{514} = 0\ ;\ \beta_{521} = \beta_{522} = \beta_{523} = \beta_{524} = 0$$

$$\beta_{531} = 1\ ;\ \beta_{532} = \beta_{533} = \beta_{534} = 0\ ;\ \beta_{542} = 1\ ;\ \beta_{541} = \beta_{543} = \beta_{544} = 0$$

$$\beta_{611} = \beta_{612} = \beta_{613} = \beta_{614} = 0\ ;\ \beta_{621} = \beta_{622} = \beta_{623} = \beta_{624} = 0$$

$$\beta_{632} = -1\ ;\ \beta_{632} = \beta_{633} = \beta_{634} = 0\ ;\ \beta_{641} = 1\ ;\ \beta_{642} = \beta_{643} = \beta_{644} = 0$$

Coeficienţii Aij, Bij, Cij, Dij vor avea valorile următoare:

$$A_{11} = \frac{\partial y}{\partial y};\ A_{12} = -\frac{\partial x_1}{\partial y};\ A_{13} = A_{14} = 0;\ A_{21} = \frac{\partial x_1}{\partial y};\ A_{22} = \frac{\partial y}{\partial y};\ A_{23} = A_{24} = 0$$

$$A_{31} = \frac{\partial x_2}{\partial y};\ A_{32} = -\frac{\partial x_3}{\partial y};\ A_{33} = \frac{\partial y}{\partial y};\ A_{34} = -\frac{\partial x_1}{\partial x};\ A_{41} = \frac{\partial x_3}{\partial y};\ A_{42} = \frac{\partial x_2}{\partial y};$$

$$A_{43} = \frac{\partial x_1}{\partial y}$$

$$B_{11} = \frac{\partial z}{\partial y};\ B_{12} = -\frac{\partial x_4}{\partial y};\ B_{13} = B_{14} = 0;\ B_{21} = \frac{\partial x_4}{\partial y};\ B_{22} = \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$B_{23} = B_{24} = 0$$

$$B_{31} = \frac{\partial x_5}{\partial y};\ B_{32} = -\frac{\partial x_6}{\partial y};\ B_{33} = \frac{\partial z}{\partial y};\ B_{34} = -\frac{\partial x_4}{\partial y};\ B_{41} = \frac{\partial x_6}{\partial y};$$

$$B_{42} = \frac{\partial x_5}{\partial y};\ B_{43} = \frac{\partial x_4}{\partial y};\ B_{44} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$C_{11} = \frac{\partial y}{\partial z};\ C_{12} = -\frac{\partial x_1}{\partial z};\ C_{13} = C_{14} = 0;\ C_{21} = \frac{\partial x_1}{\partial z};\ C_{22} = \frac{\partial y}{\partial z};$$

$$C_{23} = C_{24} = 0$$

$$C_{31} = \frac{\partial x_2}{\partial z};\ C_{32} = -\frac{\partial x_3}{\partial z};\ C_{33} = \frac{\partial y}{\partial z};\ C_{34} = -\frac{\partial x_1}{\partial z};\ C_{41} = \frac{\partial x_3}{\partial z};$$

$$C_{42} = \frac{\partial x_2}{\partial z};\ C_{43} = \frac{\partial x_1}{\partial z};\ C_{44} = \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$D_{11}=\frac{\partial z}{\partial \bar{z}};\ D_{12}=-\frac{\partial x_4}{\partial \bar{z}};\ K_{13}=D_{14}=0;\ D_{21}=\frac{\partial x_4}{\partial \bar{z}};\ D_{22}=\frac{\partial z}{\partial z};$$

$$D_{23}=D_{24}=0$$

$$D_{31}=\frac{\partial x_5}{\partial \bar{z}};\ D_{32}=-\frac{\partial x_6}{\partial \bar{z}};\ D_{33}=\frac{\partial z}{\partial \bar{z}};\ D_{34}=-\frac{\partial x_4}{\partial \bar{z}};\ D_{41}=\frac{\partial x_6}{\partial \bar{z}};\ D_{42}=\frac{\partial x_5}{\partial \bar{z}};$$

$$D_{43}=\frac{\partial x_4}{\partial \bar{z}};\ D_{44}=\frac{\partial z}{\partial \bar{z}}.$$

Avînd în vedere că $\bar{y}$ și $\bar{z}$ sînt $\bar{U}$ și $\bar{U}'$, iar $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, sînt v, s, w, v', s', w' ecuația (6) devine:

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & -\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & 0 & 0 & \frac{\partial u'}{\partial \bar{v}} & -\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}} & 0 & 0 \\
\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & 0 & 0 & \frac{\partial v'}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u'}{\partial \bar{u}} & 0 & 0 \\
\frac{\partial s}{\partial \bar{u}} & -\frac{\partial w}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & -\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial s'}{\partial \bar{u}} & -\frac{\partial w'}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u'}{\partial \bar{u}} & -\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}} \\
\frac{\partial w}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial s}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial w'}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial s}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v'}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u'}{\partial \bar{u}} \\
\frac{\partial u}{\partial \bar{u}'} & -\frac{\partial v}{\partial \bar{u}'} & 0 & 0 & \frac{\partial u'}{\partial \bar{u}'} & -\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}'} & 0 & 0 \\
\frac{\partial v}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial u}{\partial \bar{u}'} & 0 & 0 & \frac{\partial v'}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial u'}{\partial \bar{u}'} & 0 & 0 \\
\frac{\partial s}{\partial \bar{u}'} & -\frac{\partial w}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial u}{\partial \bar{u}'} & -\frac{\partial v}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial s'}{\partial \bar{u}'} & -\frac{\partial w'}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial u'}{\partial \bar{v}'} & -\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}'} \\
\frac{\partial w}{\partial \bar{u}'} & -\frac{\partial s}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial u}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial w'}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial s'}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial v'}{\partial \bar{u}'} & \frac{\partial u'}{\partial \bar{u}'}
\end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Suprafețele caracteristice ale sistemului (8) sînt date de integralele acestei ecuații (9).

Această ecuație se reduce, desvoltînd determinantul, la ecuația:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u'}{\partial \bar{u}'}-\frac{\partial u'}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{u}'}+\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}'}-\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\cdot\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}'}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}'}-\frac{\partial u}{\partial \bar{u}'}\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}'}+\frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u'}{\partial \bar{u}'}-\frac{\partial u'}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}'}\right)^2=0$$

Această sumă de pătrat va fi nulă, dacă :

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u'}{\partial \bar{u}'} - \frac{\partial u'}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{u}'} + \frac{\partial v'}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}'} - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}'} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}'} - \frac{\partial u}{\partial \bar{u}'}\frac{\partial v'}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u'}{\partial \bar{u}'} - \frac{\partial u'}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} = 0$$

sau

$$\frac{D(u, u')}{D(\bar{u}, \bar{u}')} = \frac{D(u, v')}{D(\bar{u}, \bar{u})} ; \quad \frac{D(u, v')}{D(\bar{u}, \bar{u})} = \frac{D(u', v)}{D(\bar{u}, \bar{u}')} \tag{11}$$

Deci sistemul (9) permite să determinăm în mod unic funcția $f(z, z')$ monogenă, dacă cunoaștem valoarea ei pentru $v = s = w = v' = s' = w = o$, dacă între z și z' nu există relațiile date de (10).

Relațiile (10) sînt tot una cu relația :

$$\frac{D(u + iv, u' + iv')}{D(\bar{u}, \bar{u}')} = 0 \tag{12}$$

ceea ce exprimă că $u' + iv' = f(u + iv)$.

Notînd cu

$$\bar{z} = u + iv - \varepsilon s - i\varepsilon w$$

$$\bar{z}' = u' + iv' - \varepsilon s' - i\varepsilon w'$$

relația (12) poate fi exprimată prin :

$$z.\ \bar{z} = f[z.\ \bar{z}]$$

în care f este o funcție monogenă, arbitrară z, $\bar{z}$ putînd fi schimbate cu z', $\bar{z}'$.

Suprafețele caracteristice sînt deci varietățile date de ecuația (12).

Catedra de matematici
din Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Goursat :* Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles.
2. *Grigore C. Moisil* : Asupra teoriei caracteristicilor sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Analele Academiei R.P.R., seria A, tom II.

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С НАСТНЫМИ ПБОИЗВОДНЫМИ.

(Резюме)

В этой работе автор использует один из мётодов Григоре С. Моисил для получения характеристик некоторых систем уравнений с ностными производными, которые дают условия моногенности функции

двух переменных $z = u + iv + \varepsilon s + i\varepsilon\omega$, $z' = u' + iv' + \varepsilon s' + i\varepsilon\omega'$, Уравнение характеристик системы (g) дается уравнением (10) или (12).

Характеристические изменения системы (9) суть те изменения, для которых $u + iv = f(u' + iv')$, f — моногенная функция ом $u' + iv'$.

ON THE CHARACTIRISTICS OF A SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

The author utilized one of the methods of Grigore C. Moisil to obtain the characteristic of a system of partial differential equations.

She utilized this method to a system of equations, wich give the conditions for a function of two hypercomplex variables to be monogene

$$z = u + iv + \varepsilon s + i\varepsilon w\,,\quad z' = u' + iv' + \varepsilon s' + i\varepsilon w'$$

The characteristic equations of the system (9) is given by the equations (10) or (12).

The characteristics varieties of the system (9) are this varieties for which $u + iv = f(u' + iv')$ (f a monogene function of $u' + iv'$)

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(Résumé)

L'auteur utilise une des méthodes données par Gr. C. Moisil, pour trouver les caractéristiques du système d'équations aux dérivées partielles qui exprime la condition de monogénéité des fonctions de deux variables hypercomplexes

$$z = u + iv + \varepsilon s + i\varepsilon w\,,\quad z' = u' + iv' + \varepsilon s' + i\varepsilon w'.$$

Les caractéristiques du système (9) sont données par (10) ou par (12). Les caractéristiques sont les surfaces pour lesquelles $u + iv = f(u' + iv')$. f étant une fonction monogène de $u' + iv'$.

ÜBER DEN KARAKTERISTICKEN EINES MIT PARTIELLEN ABGELEITETEN GLIECHUNGSYSTEMS

(Zusammenfassung)

Die Verfasserin anwendet eine der von Grigore C. Moisil angegebenen Metoden zur Erhaltung der Karakteristiken eines System von partiellen Differentialgleichungen nud wendet sie auf einem gleichungssystem, welches die

Bedingungen für die Monogeneität einer Funktion von hyperkomplexen Veränderlicher gibt.

$$z = u + iv + \varepsilon s + i\varepsilon w\,,\quad z' = u' + iv' + \varepsilon s' + i\varepsilon w'$$

Die Gleichung der Karakteristik des Systems (9) ist in der Gleichungen (10) oder (12) angegeben.

Die dem System (9) Karakteristichen Varietäten sind diejenigen Varietäten für welche $u + iv = f\,(u' + iv')$.

f monogene Funktion der $u' + iv'$ ist.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

APPARATUS FOR CONSTRUCTION OF AN AXONOMETRICAL PROJECTION OF AN OBJECT, DRAWN IN DOUBLE ORTHOGONAL PROJECTION [1]

by AURELIAN TĂNĂSESCU

The axonometrical projections are necessary, on the one hand in projecting, and on the other, in technical descriptions, in elaborating instructions for use of equipment in mounting operations, in technical high school and educations college, as well as many other fields.

Axonometrical projections have the quality to give at one look many particulars regarding the shape of the projected object, particulars, which can not be easely noticed merely by looking at the representations of the object in the double orthogonal projection.

At the present stade of technique, the construction of axonometrical projection of an object, drawn in the double orthogonal projection, is carried out according to the principles of classical axonometry, by calculation of the rates of reduction, by selecting the type of axonometrical projection, (isometrical, dimetrical, anisometrical) which results from the values of the rates of reduction, by measuring along the axonometrical axis of the dimensions of the object, amplified by the respective reduction rates.

The transpossing operations of an object in axonometrical projections are thuse very complicated and require much working time for the draftsman or projector.

All though some devices have been made for the construction of axonometrical projection of an object, drawn in double orthogonal projection, none of these devices meet completely the requirements imposed by practice, because some of these apparatuses are extremely complicated in principle and from an operational point of view, and other besides this require the use of nomograms for the parameter values of adjustment and usage.

---

[1] Report presented at the first meeting of the Chairs of descriptive Geometry of all the Polytechnical Institutes of Roumanian People's Republic, Bucharest 3rd — 5th March, 1960.

Likewise, by using these apparatuses, one can not carry out parallel orthogonal projection or oblique projections of objects on planes of vertical, terminal, or prophyle representations.

This paper covers an original apparatus for the construction of the axonometrical projection of an object, drawn in double orthogonal projection.

This apparatus may carry out also the construction of the parallel projection (orthogonal or oblique) of an object on a plane of vertical, terminal or profile representation.

The construction of this apparatus is based on a process, which is known in descriptive geometry, but used only on a small scale.

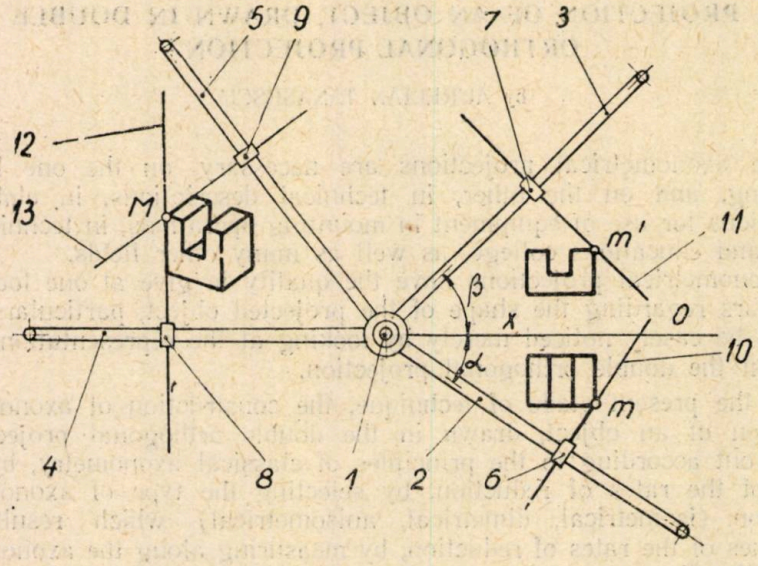


Fig. 1

The process is characterised mainly by the fact, that it takes into consideration a certain position of the axonometrical plane, in relation to the double orthogonal system, after which the axonometrical plane is rabated round its vertical trace on the vertical plane of projection. Then the rabate of the axonometrical plane is so rotated, that the axonometrical axis, on which the quota values of the object are transposed, becomes perpendicular to the ground line.

The following is a description of the above apparatus. It can be seen in figure 1, and is made up of a central unmovable part 1, from which leave foor movable roods : 2, 3, 4 and 5.

Rods 2 and 3 materialize the traces of the axonometric plane and rods 4 and 5 materialise the rabates, rotated according to the process of these traces.

On these rods slide the gliders 6, 7, 8 and 9. Each glider has attached to it a movable ruler 10, 11, 12 and 13.

Gliders 6 and 8 are so bound to an equally spaces from the axis of part 1, that to any gliding of approaching, or departing, in relation to axis of part 1, of glider 6 on rod 2, corresponds automatically a sliding of approaching of departing in relation to the axis of part 1 of glider 8 on rod 4, and reciprocally.

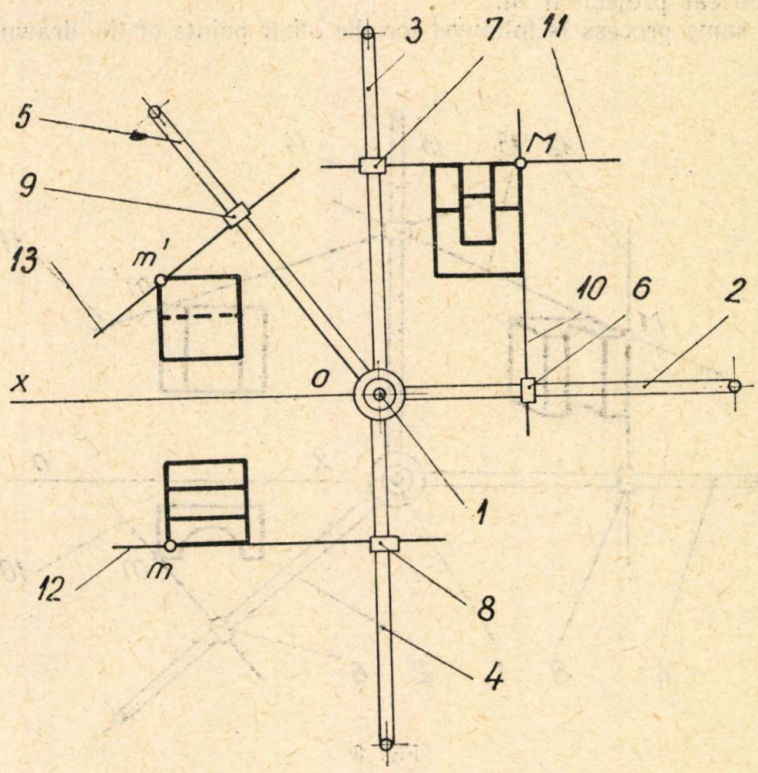


Fig. 2

The same occurs with gliders 7 and 9, which are boundod to the axis of part 1, in such a manner and equally spaced from the axis, that to any sliding of approaching or departing in relation to the axis of part 1, of glider 7 an rod 3 corresponds automatically a sliding of approaching or departing, in relation to the axis of part 1 of glider 9 on rod 5 and reciprocally.

Thus, the construction of the axonometrical projection of an object, drawn in double orthogonal projection, is effected as follows:

The apparatus is set on the double orthogonal drawing of the object, which has to be transposed to the axonometrical projection. Glider 6 is moved on a rod 2, in such a manner that ruler 10 shall pass through

the horizontal projection *m* of a point of the object, drawn in double orthogonal projection (fig. 1).

Glider 7 is moved similarly on rod 3 in such a manner that ruler 12 shall pass through the vertical projection *m'* or the same points of the object.

By this operation one obtains automatically the sliding of gliders 8 and 9, whose rulers 12 and 13 ar their intersection give the wanted axonometrical projection *M*.

The same process is followod for the other points of the drawn object.

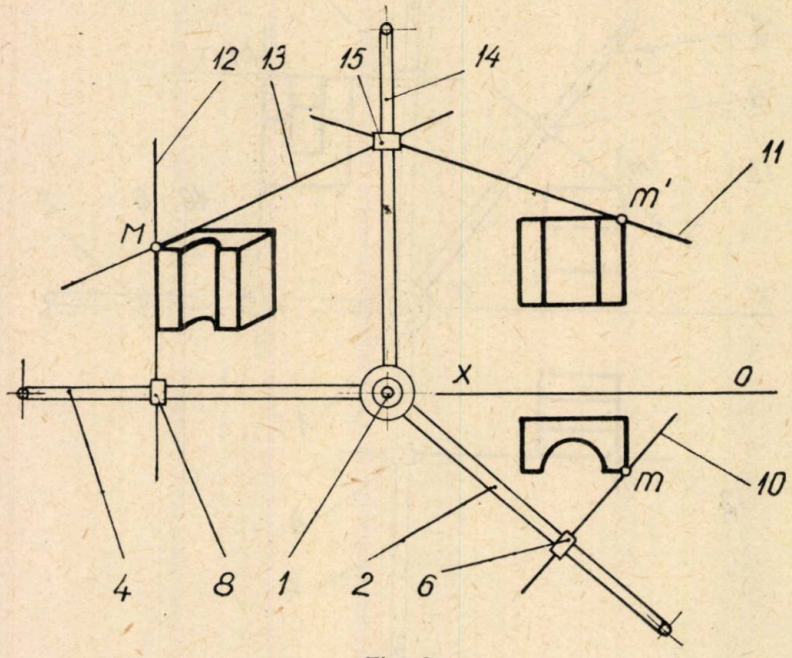


Fig. 3

The construction of the parallel projection of an object on a terminal plane is achieved with the same apparatus as described above, but the position of the rods of the apparatus is that indicated, in fig. 2.

The construction of the parallel projection of an object on a vertical plane (figure 3), or on a profile plane, (fig. 4) requires to dismount the assembly o rods 3 and 5 of the apparatus and the mounting in their place of rods 14, on which slides independently the glider 15, to which are bound rulers 11 and 13.

This apparatus designed for constructing the axonometrical projection of on object, drafted in the double orthogonal projection, presents the following important advantages :

— it is very simple and easy to handle ;

— it is easy to dismount and to carry on ;

— it mechanised completely the construction of the axonometrical projection of an object, drawn in the double orthogonal projection, which as a result, on the one hand, a substantial reduction of tedious work and on the other an appreciable increase of the working capacity of the draftsmen and projectors ;

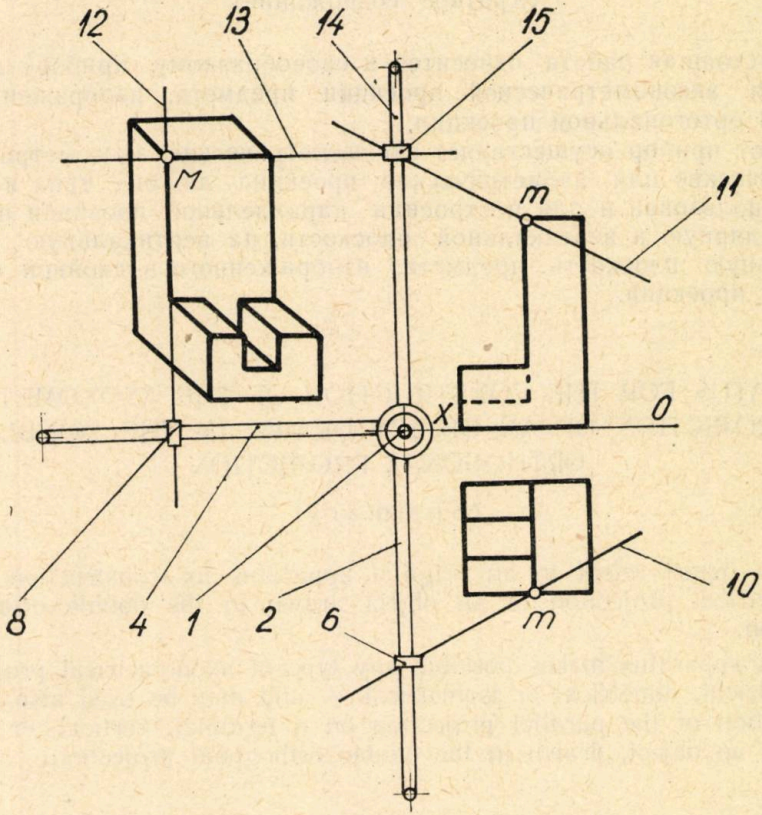


Fig. 4

— it makes unnecessary the calculation and repetition of similar transposing operations and the axonometrical drawing is completed in a short time, no matter how complicated it may be ;
— it can effect any type of axonometrical projection ;
— any ani sometrical, dimetrical or isometrical, only by adjusting the angles α and β and the direction of rulers 10 and 11 ;
— it achieves and mechanizes completely the construction of the parallel projection on a terminal, vertical or profile plane of an object drawn in double orthogonal projection, an advantage which no other apparatus of this type has.

The Polytechnical Institute of Bucharest
Descriptive Geometry Chair

ПРИБОР ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ПРЕДМЕТА, ИЗОБРАЖЕННОГО В ДВОЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

(Краткое содержание)

Настоящая работа относится к своеобразному прибору для построения аксонометрической проекции предмета, изображенного в двойной ортогональной проекции.

Этот прибор осуществляет аксонометрические, анизометрические, диметрические или изометрические проекции любого типа и может быть использован и для построения параллельной проекции на перпендикулярную к вертикальной плоскости, на вертикальную или на профильную плоскость предмета, изображенного в двойной ортогональной проекции.

APPARATUS FOR THE CONSTRUCTION OF THE AXONOMETRICAL PROJECTION OF AN OBJECT DRAWN IN THE DOUBLE ORTHOGONAL PROJECTION

(Summary)

This report refers to an original apparatus for construction of the axonometrical projection of an object drawn in the double orthogonal projection.

This apparatus makes possible any type of axonometrical projection-anisometrical, dimetrical or isometrical — and may be used also for the construction of the parallel projection on a terminal, vertical, or profile plane of an object, drawn in the double orthogonal projection.

APPAREIL POUR LA CONSTRUCTION DE LA PROJECTION AXONOMÉTRIQUE D'UN OBJET REPRÉSENTÉ PAR DOUBLE PROJECTION ORTHOGONALE

(Résumé)

Dans cet ouvrage est présenté un appareil original pour la construction de la projection axonométrique d'un objet représenté par double projection orthogonale.

Cet appareil peut réaliser la projection axonométrique anisométrique, dimétrique ou isométrique et peut être utilisée encore pour la construction de la projection parallele sur un plan de bout, vertical ou de profil d'un objet représenté par double projection orthogonale.

EIN APPARAT FÜR DIE KONSTRUKTION DER AXONOMETRISCHEN PROJEKTION EINES GEBILDES, DAS IN ZWEIFACH ORTHOGONALER PROJEKTION DARGESTELLT IST

(Zusammenfassung)

Diese Arbeit bezieht sich auf einen originellen Apparat für die Konstruktion der axonometrischen Projektion eines in zweifach orthogonaler Projektion dargestellten Gebildes.

Der Apparat realisiert jede Art von axonometrischer, anisometrischer, dimetrischer oder isometrischer Projektion, und kann für die Konstruktion paralleler Projektionen eines in doppelt orthogonaler Projektion dargestellten Gebildes auf Ebenen, welche zur Vertikalebene senkrecht sind, auf eine Vertikalebene oder Profilebene, verwendet werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

FIZICĂ

SPECTRUL DE VIBRAȚIE AL 2—4 DIIODANILINEI

de DUMITRU BIRCĂ-GALAȚEANU, LELIA ARCAN și LUCIA MĂNTOIU

S-a studiat absorbția diiodanilinei în domeniul spectral dintre 400 cm^{-1} și 5000 cm^{-1} cu scopul ca din explicarea bandelor de absorbție să se tragă concluzii asupra structurii moleculare a acestei substanțe.

Studiul experimental s-a făcut cu ajutorul unui spectrofotometru cu înregistrare automată UR10 și cu un spectrometru Paschen cu oglinzi argintate, acesta din urmă prevăzut cu prismă de cuarț Cornu sau cu prismă de sare, după regiunea spectrală corespunzătoare. Izomerul 2—4 al diiodanilinei de al cărui spectru se ocupă prezenta lucrare provine de la firma „Merk". Această substanță se prezintă în stare cristalină slab colorată violaceu, cu punctul de topire 95—96°C. În primul rînd s a obținut spectrul de absorbție al acestei substanțe în stare de soluție în sulfură de carbon. Acest spectru este redat în spectrograma din figura 1. S-a determinat apoi spectrul de absorbție al acestei substanțe în stare solidă sub formă de discuri obținute prin presare în amestec cu bromură de potasiu. Am folosit acest procedeu în mod deosebit pentru regiunea spectrală dintre 1,5 μ și 2,7 μ.

Molecula diiodanilinei cuprinde nucleul benzenic la care sînt substituiți trei atomi de hidrogen, unul cu grupul HN_2, iar doi dintre ei cu cîte un atom de iod în poziție orto și para în cazul izomerului de care ne-am ocupat noi.

După cum se observă din diagrama din figură, diiodanilina prezintă două bande foarte intense în regiunea 3400—3600 cm^{-1}, iar în domeniul dintre 500 cm^{-1} și 1700 cm^{-1} mai multe bande deosebit de intense; în afară de aceste bande, diiodanilina are în domeniul spectral studiat de noi și alte bande mai slabe.

Pentru explicarea bandelor de absorbție ale acestei substanțe, trebuie ținut seamă că este de așteptat ca în spectrul ei de absorbție să apară atît bande ce aparțin inelului benzenic, cu unele variații în ceea ce privește poziția lor spectrală și intensitatea lor, variații datorite substituenților. În cazul diiodanilinei, pentru a-i atribui bandele, comparăm spectrul ei de absorbție cu acel al benzenului și al anilinei în primul rînd, pre-

cum şi cu ale altor compuşi de substituţie ai benzenului în al doilea rînd, iar dintre aceştia din urmă, ne referim în special la aminele primare aromatice. Ca spectru de comparaţie al anilinei am folosit atît spectrograma obţinută de Mecke [1], cît şi cea obţinută de noi, dealtfel prima nu redă spectrul pentru frecvenţele mai mici de 690 cm^{-1}.

Ne referim întîi la bandele pe care le atribuim grupei NH_2. Cele două bande foarte intense din regiunea 2,9 μ, care apar în toate aminele primare, atît cele aromatice, cît şi cele alifatice în regiunea dintre 3300 cm^{-1} şi 3650 cm^{-1} aparţin desigur celor două vibraţii de valenţă ale grupei NH_2, şi anume cea de la 3415 cm^{-1}, vibraţiei ν_1' de întindere simetrică, iar cea de la 3510 cm^{-1}, celei de întindere antisimetrică ν_2'. In anilină aceste bande se găsesc la 3440 cm^{-1} şi 3520 cm^{-1} respectiv, deplasările lor la diiodanilină faţă de anilină, datorîndu-se substituţiei a încă doi atomi de hidrogen ai benzenului. Banda deasemenea foarte intensă de la 1625 cm^{-1}, care la anilină apare la 1635 cm^{-1}, iar la p-bromanilină [2] la 1598 cm^{-1}, o atribuim vibraţiei fundamentale de deformaţie ν_3' a aceleaşi grupe NH_2; vibraţie de deformaţie paralelă cu planul celor trei atomi ai grupei. Bandele de la 3195 cm^{-1} şi 4900 cm^{-1}, care se găsesc şi în spectrele p-bromanilinei şi în cele ale triclor- şi tribromanilinei [3], dar nu se găsesc în acel al benzenului se pot atribui primei $2\nu_3'$ şi celei de a doua armonice $3\nu_3'$ a vibraţiei de deformaţie ν_3'

La aminele primare aromatice sînt posibile şi vibraţii de deformaţie a grupei NH_2 în afara planului moleculei. Aşa cum arată Bellamy [4], astfel de vibraţii pot produce absorbţie în regiunea dintre 650 cm^{-1} şi 900 cm^{-1}. La compuşii disubstituiţi ai benzenului, la care unul dintre substituenţi este grupul amino, apare o bandă intensă între 800—850 cm^{-1}, pe cînd la acei ce nu cuprind acest grup, această bandă este mult mai slabă. Considerăm că banda intensă de la 810 cm^{-1} a diiodanilinei, şi care la anilină apare la 812 cm^{-1}, se poate atribui vibraţiei de deformaţie ν_3'' a grupei NH_2 în afara planului moleculei. Prima ei armonică se suprapune peste absorbţia datorită vibraţiei fundamentale de deformaţie ν_3' de la 1625 cm^{-1}; în ce priveşte banda de la 2310 cm^{-1}. se poate atribui celei de a doua armonice $3\ \nu_3''$ a vibraţiei ν_3''; la anilină această bandă se găseşte la 2300 cm^{-1}. In mod obişnuit grupul NH_2 are o singură vibraţie fundamentală de deformaţie. O a doua vibraţie de deformaţie a acestui grup poate avea loc numai în compuşii amino cu un număr mare de atomi în moleculă.

In aminele aromatice primare apare o bandă intensă între 1250—1340 cm^{-1} caracteristică vibraţiei de întindere C—N [3]. Atribuim acestei vibraţii banda de la 1260 cm^{-1}, care la triclor- şi tribromanilină [4] se află la 1279 cm^{-1} şi 1276 cm^{-1} respectiv, iar la anilină, la 1280 cm^{-1}. Această bandă nu apare în compuşii de substituţie ai benzenului ce nu conţin legătura C—N. Banda de absorbţie de la 2565 cm^{-1} în spectrul diiodanilinei poate fi considerată prima armonică a bandei de la 1260 cm^{-1}, iar banda de la 3880 cm^{-1} ca cea de a doua armonică (3 ν).

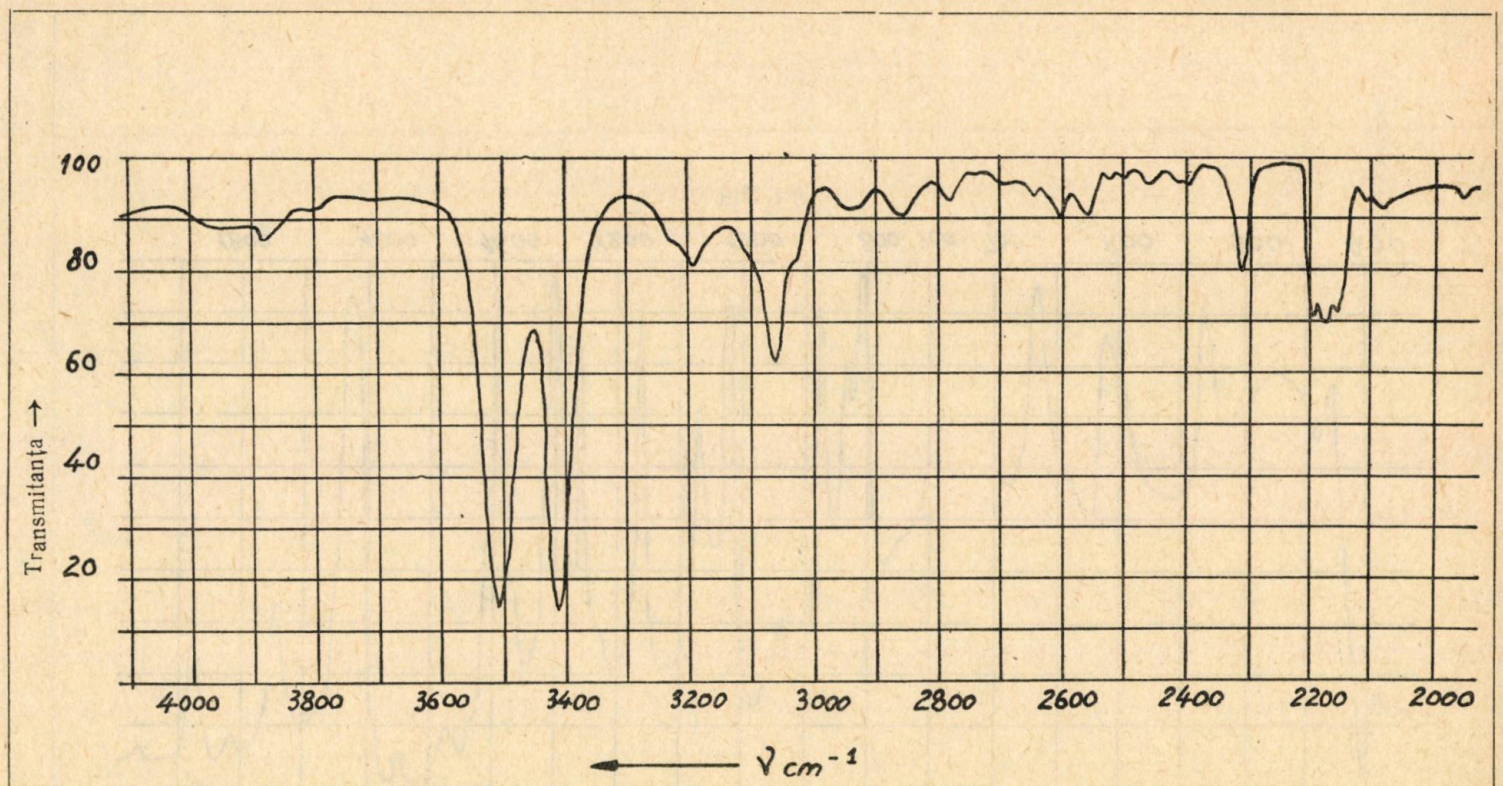

100
80
60
40
20
Transmitanța →
4000
3800
3600
3400
3200
3000
2800
2600
2400
2200
2000
ν cm⁻¹

Fig. 1-a

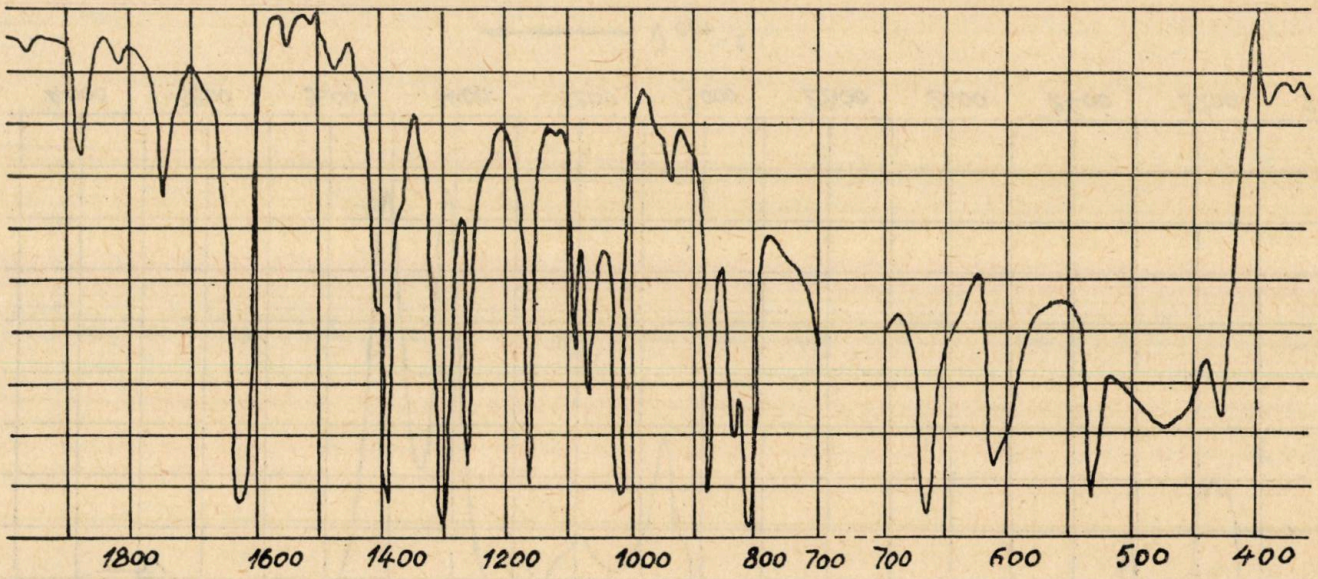


Fig. 1-b

Molecula de diiodanilină cuprinzînd două legături C—I, urmează ca în spectrul de absorbție al acestei substanțe să apară bandele caracteristice vibrației legăturii respective. În compușii alifatici, ca și în cei aromatici banda ce corespunde vibrației fundamentale de întindere a acestei legături apare între 500 și 550 cm^{-1} [5], astfel în C_2H_5I a fost găsită de Cross și Daniels [6] la 545 cm^{-1}, iar la compușii aromatici cercetați de Leconte, se găsește ca bandă intensă între 520—560 cm^{-1} [7]. În spectrul diiodanilinei se găsește o singură bandă de absorbție între 500 și 600 cm^{-1}, bandă foarte intensă situată la 530 cm^{-1}. Această bandă poate fi atribuită vibrației fundamentale de întindere ν'' a legăturii C—I. În atribuirea acestei bande ne bazăm și pe faptul că în compușii substituiți ai benzenului, frecvența vibrației C—X (X fiind un atom de halogen) scade în ordinea în care masa atomică a halogenului crește. Din spectrul tribromanilinei [3] rezultă că frecvența vibrației C—Br este cam 560 cm^{-1}, mai mare decît cea care rezultă pentru legătura C—I din spectrul diiodanilinei. Banda de la 1086 cm^{-1}, care lipsește în spectrul anilinei, dar este prezentă în acel al iodbenzenului [8], poate fi atribuită primei armonice $2\nu''$ a vibrației ν''. De asemeni bandele situate la 1585 cm^{-1} și 2150 cm^{-1} în spectrul diiodanilinei, dar lipsesc în acel al anilinei pot fi atribuite celei de a doua ($3\nu''$) respectiv celei de a treia ($4\nu''$) armonice a aceleiași vibrații ν''.

În ce privește celelalte bande intense ce apar în spectrul diiodanilinei, ele urmează să fie atribuite vibrațiilor nucleului benzenic. Admițînd că molecula de benzen are forma plană, cu simetrie de ordinul șase (D_{6h}) în care legăturile C—C sînt echivalente între ele, această moleculă are treizeci vibrații de ansamblu, dintre care numai zece sînt nedegenerate, iar zece, dublu degenerate. Din cele douăzeci vibrații fundamentale distincte patru sînt active în infraroșu. În cazul derivaților substituiți ai benzenului, degenerarea este înlăturată, așa că toate cele treizeci de vibrații sînt distincte la acești compuși. În afară de acest fapt, unele dintre vibrațiile care la benzen sînt inactive în infraroșu, devin active la derivații substituiți producînd bande de absorbție dintre care unele foarte intense, cum sînt cele de la 880 cm^{-1} (ν_{11}) și 1160 cm^{-1} (ν_{17}). În arătarea modului de vibrație al benzenului folosim indicațiile date de Wilson [9] și de Kohlrausch [10], dar adoptăm numerotarea dată de Herzberg [11].

Modurile de vibrație ale vibrațiilor fundamentale cărora le corespund bande de absorbție în spectrul diiodanilinei sînt indicate în figura 2. După cum se știe, frecvențele ce corespund diferitelor moduri de vibrație se obțin prin calcule făcute pe modele moleculare, pe baza unor anumite ipoteze asupra forțelor de legătură dintre atomii moleculei și asupra probabilității de formare a nucleului acesteia. Astfel de calcule au fost făcute de Wilson [1. c] și de Trenkler [12]. Desigur, aceste calcule dau numai ordinul de mărime al frecvenței unui anumit mod de vibrație, așa că atribuirea bandelor se face considerînd că cele mai intense dintre ele aparțin vibrațiilor fundamentale cu frecvențele cele mai apropiate de pozițiile spectrale ale acestor bande observate.

Ne vom referi întîi la cele patru vibrații fundamentale active în infraroșu la benzen, cărora le corespund bande de absorbție în spectrul diiodanilinei. Trei dintre aceste bande, atribuite vibrațiilor ν_4, ν_{13} și ν_{14} sînt foarte intense, iar a patra, atribuită vibrației ν_{12} este de intensitate mijlocie. Atribuirea bandelor ce corespund acestor patru vibrații o bazăm pe compararea spectrului diiodanilinei cu ale benzenului și anilinei, precum și cu spectrele aminelor cercetate anterior de unul dintre noi [2, 3]. Aceste patru bande sînt deplasate puțin spre frecvențe mai mici, la ν_{12} deplasarea fiind ceva mai mare. Atribuim vibrației ν_4 banda de la

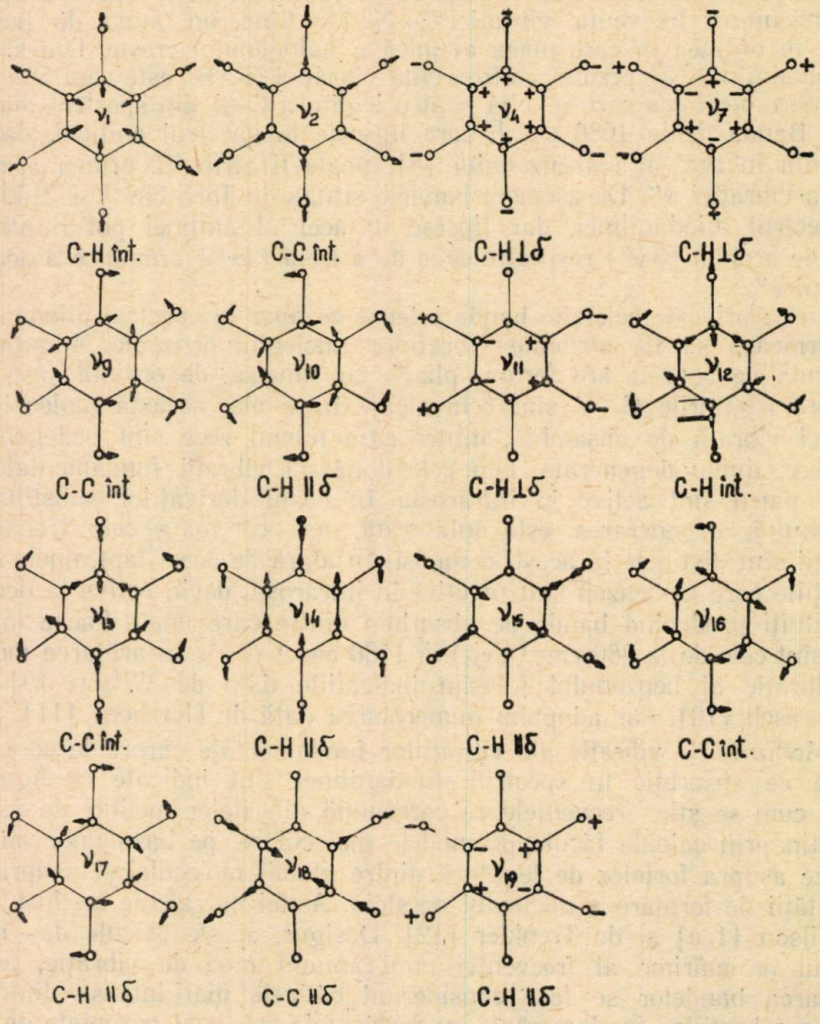


Fig. 2

665 cm^{-1}, iar banda intensă de la 1310 cm^{-1} o atribuim octavei $2\nu_4$ a vibrației ν_4; intensitatea mare a acestei bande se datorește apropierei ei de banda 1260 cm^{-1} (ν, C-N). Considerăm că pot fi atribuite armonicelor superioare $3\nu_4$ și $4\nu_4$ bandele de la 1875 cm^{-1} și 2607 cm^{-1} respectiv, bande ce se găsesc și în spectrul anilinei. Bandele de la 1020 cm^{-1} și 3060 cm^{-1} pot fi atribuite vibrațiilor ν_{14} și ν_{12}, iar vibrației ν_{13} se poate atribui banda de la 1390 cm^{-1}. Considerăm ca armonice ale acesteia bandele de la 2780 cm^{-1} ($2\ \nu_{13}$) și 4115 cm^{-1} ($3\ \nu_{13}$). Amintim că Sverblov [13] atribue banda intensă găsită în alții compuși ciclici la 1316 cm^{-1} tot unei vibrații C—C.

Urmează să ne referim la atribuirea celorlalte bande intense din spectrul de absorbție al diiodanilinei, bande ce corespund la moduri de vibrație inactive în molecula benzenului, dar care apar în spectrul infraroșu al derivaților săi substituiți. În acord cu cele ce rezultă din calculele teoretice din lucrările citate, precum și cu atribuțiile făcute în cazul altor compuși aromatici [7; 8; 3; 4], considerăm că se pot face următoarele atribuiri ale bandelor intense din diferitele regiuni spectrale luate în ordinea creșterii frecvențelor. Întrucît din calcule pe modele mecanice rezultă că între 400—500 cm^{-1} există o vibrație fundamentală ν_{20}, atribuim acestui mod de vibrație banda de la 427 cm^{-1}, cea de a doua bandă intensă ce se află la 470 cm^{-1} aparține probabil unei vibrații de combinație. Între 600—750 cm^{-1}, apar încă două bande, în afară de cea atribuită vibrației ν_4; banda intensă de la 610 cm^{-1}, care apare în spectrul de difuzie combinată al benzenului la 606 cm^{-1}, și în infraroșu ca bandă foarte slabă pe la 615 cm^{-1} la unii compuși disubstituiți cercetați de Leconte [7], care o atribue modului de vibrație de după numerotarea Wilson, noi o atribuim modului de vibrație ν_{18}, ce corespunde vibrației 6a. Cealaltă bandă situată la 695 cm^{-1} (în C_6H_5I la 685 cm^{-1}), considerăm că poate fi atribuită vibrației fundamentale ν_7 inactivă în infraroșu la benzen.

Cele două bande intense dela 830 cm^{-1} și 880 cm^{-1}, aceasta din urmă găsită și ca bandă slabă la unii derivați disubstituiți ai benzenului, dar intensă la cei monosubsituiți, pot fi atribuite modurilor de vibrație ν_{10} și ν_{11}, iar banda de la 1748 cm^{-1} poate fi considerată că e produsă de octava acesteia din urmă.

Între 940 și 1030 cm^{-1} se află o regiune ce a dat loc la multe comentarii. În spectrul de difuzie combinată al benzenului se găsește o bandă intensă, polarizată, la 991 cm^{-1}, atribuită de Angus [14] modului de vibrație ν_2, și una slabă la 1030 cm^{-1}, iar la spectrul infraroșu al vaporilor aceleași substanțe Bailey [15] a găsit o bandă intensă la 1037 cm^{-1} pe care a atribuit-o modului de vibrație ν_{14}; este vorba de banda de la 1020 cm^{-1} din spectrul diiodanilinei căreia noi îi dăm aceeași interpretare. În derivații substituiți ai benzenului apar în spectrul infraroșu amîndouă aceste bande între limitele indicate. Banda de la 940 cm^{-1} din spectrul diiodanilinei o atribuim, ca și Angus, modului de vibrație ν_2.

În intervalul spectral dintre 1100—1200 cm^{-1} se găsește în spectrul diiodanilinei o bandă foarte intensă la 1160 cm^{-1}. Banda de la 1178 cm^{-1} din spectrul de difuzie combinată al benzenului a fost atribuită de Angus

Tabelul nr. 1

Bandele de absorbţie ale diiodanilinei

Diiodanilina		Intensitatea relativă %	Anilină cm^{-1}	Modul de vibraţie	Grupa căreia aparţine
ν cm^{-1}	λ μ				
427	23,419	77		ν_{20}	C—C, $\delta \perp$
470	21,276	79			
530	18,868	93	530	ν'' + 6b Wilson	C—I, C—H
610	16,393	86	615	ν_{18}	C—C, $\delta \parallel$
665	15,037	96		ν_4	C—H, $\delta \perp$
695	14,388	59	695	ν_7	C—H, $\delta \perp$
810	12,345	98	812	ν_{10}	NH_2, $\delta' \perp$
830	12,046	82	826	ν_8''	C—H, $\delta \parallel$
880	11,363	91	880	ν_{11}	C—H, $\delta \perp$
940	10,638	32	955	ν_2	
1020	9,803	92	1028	ν_{14}	C—H, $\delta \parallel$
1070	9,345	74	1062	ν_1 ; combinaţie	
1086	9,174	64		2 ν''	C—I intindere
1160	8,620	91	1175	ν_{17}	C—H, $\delta \parallel$
1260	7,936	86	1280	ν	C—N intindere
1310	7,633	98	1311	2 ν_4	C—H, $\delta \perp$
1335	7,490	25	1330		
1365	7,326	39			
1390	7,194	94	1385	ν_{13}	C—C intindere
1475	6,779	10	1465		
1550	6,451	6	1558		
1585	6,309	9		ν_{16} şi 3 ν''	C—C intind.; C—I
1625	6,153	94	1635	ν_s' şi 3 ν''	NH_2, $\delta \parallel$ şi $\delta \perp$
1748	5,720	35	1700	2 ν_{11}	C—H, $\delta \perp$
1818	5,500	10	1835	ν_9	C—C intindere
1875	5,333	27	1880	3 ν_4	C—H, $\delta \perp$
2080	4,807	8			
2150	4,651	29		4 ν^{11}	C—I intindere
2180	4,587	30	2210		
2310	4,327	20	2309	3 ν_s^{11}	NH_2, $\delta \perp$
2565	3,960	10	2575	2 ν	C—N intindere
2607	3,835	10	2618	4 ν_4	C—H, $\delta \perp$
2780	3,597	6	2750	2 ν_{13}	C—C intindere
2855	3,502	10	2841		
2945	3,395	9	2750		
3025	3,305	19	3021	ν_{15}	C—H, $\delta \parallel$
3060	3,267	39	3080	ν_{12}	C—H intindere
3195	3,129	20	3195	2 ν_s'	NH_2, $\delta \parallel$
3415	2,928	86	3440	ν_1' simetric	NH_2 intindere
3510	2,840	87	3520	ν_s' antisim.	NH_2 intineere
3880	2,577	14		3 ν	C—N intindere
3960	2,525	12			
4115	2,430	9,5	4160	3 ν_{13}	C—C intindere
4585	2,181	13			
4825	2,072	10			
4900	2,040	9	4905	3 ν_s'	NH_2, $\delta \parallel$
5010	1,996	12			

modului de vibrație ν_{17}, vibrație inactivă în infraroșu pentru benzen. În același interval spectral se găsește o bandă intensă la toți derivații aromatici substituiți, atît în spectrul de difuzie combinată, cît și infraroșu. Pentru aceste motive atribuim banda de la 1160 cm^{-1} a diiodanilinei vibrații ν_{17} de deformație C—H în plan a nucleului benzenic.

Bandele cărora nu li s-a indicat o atribuție în tabelul nr. 1 sînt în general bande slabe, cu excepția bandei 1070 cm^{-1}, așa cum se observă în coloana a treia a tabelului. Aceste bande se datoresc foarte probabil, unei vibrații de combinație. În coloana a patra a aceluiaș tabel sînt date, cu scopul de comparație, bandele de absorbție ale anilinei. În ce privește banda destul de intensă de la 1070 cm^{-1}, prezentă la 1062 cm^{-1} în cazul anilinei, menționăm că unii autori [7, 10], ce au găsit-o și la alți derivați aromatici, consideră că ar putea fi atribuită modului de vibrație ν_2 după numerotarea Wilson, căreia îi corespunde numerotarea ν_1 dată de Herzberg. Angus [1.c] atribuie însă acestui mod de vibrație banda intensă de la 3060 cm^{-1} găsită în spectrul de difuzie combinată al benzenului. După cum se vede, părerile asupra frecvenței vibrației ν_1 sînt împărțite. Este mai probabil ca banda de la 1070 cm^{-1} să se datorească unei vibrații de combinație.

Din interpretarea dată spectrului de vibrație al o.p. diiodanilinei se pot trage concluzii asupra structurii ei moleculare. Prezența în spectrul de absorbție al acestei substanțe a bandelor caracteristice celor patru vibrații fundamentale active în infraroșu pentru benzen ν_4, ν_{12}, ν_{13}, ν_{14} arată că molecula ei conține nucleul benzenic. Din faptul că în spectrul infraroșu al diiodanilinei apar și bande permise numai în spectrul de difuzie combinată al benzenului, cum sînt cele corespunzătoare vibrațiilor, ν_{18}, ν_{11} ν_2, ν_{17}, ν_{16}, ν_{15} rezultă că interdicția din spectrul benzenului este înlăturată datorită substituenților. Iar faptul că în absorbția substanței cercetate de noi apar bande cum sînt cele corespunzătoare vibrațiilor ν_7, ν_{10}, ν_9, ν_{20} dovedește de asemenea că tot datorită substituenților apar distincte vibrații degenerate la benzen. Spectrul de absorbție obținut experimental dă indicații și asupra naturii substituenților. Bandele corespunzătoare vibrațiilor ν_1', ν_2', ν_3', dovedesc prezența în molecula acestei substanțe a grupului NH_2 legat de un carbon al inelului benzenic, legătura C—N fiind pusă în evidență de banda intensă de la 1260 cm^{-1}, iar banda intensă ν''=530 cm^{-1} pune în evidență legătura C—I.

Aducem pe această cale mulțumirile noastre Acad. Prof. H. Hulubei cît și conducerii Institutului de Cercetări Chimice pentru bunăvoința cu care ne-au ajutat să efecuăm această lucrare.

Catedra de Fizică din Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *R. Mecke* — Colec. of. Inst. Phys. Chem. Univ. Freiburg.
[2] *D. Bîrcă Gălățeanu* — Bul. St. (Mat.-Fiz.(al Acad. R.P.R., T. VIII, p. 405, 1956.

[3] *D. Bîrcă Gălăţeanu* — Rev. de Phys. Acad. R.P.R. T. IV, p. 25, 1959.

[4] *L. J. Bellamy* — The Infrared Spectra of Complex molecules, London 1956.

[5] *H. C. Cheng.* et. *J. Leconte* — J. de Phys,, 6, p. 477, 1935.

[6] *P. C. Cross* and *F. Daniles* — J. Chem. Phys. 1, ps 48, 1933.

[7] *J. Leconte* — J. de Phys., 9, p. 13, ţ938.

[8] *J. Leconte* — J. de Phys., 8, p. 489, 1937.

[9] *E. B. Wilson* — Phys. Rev. 45, p. 706 şi 46, p. 146, 1934.

[10] *K. W. F. Kohlrausch* — Phys. Z. 37, p. 58, 1936.

[11] *G. Herzberg* — Molecular, Spectra and Molecular Structure II, p. 118, 362—365 ; New York, 1959.

[12] *F. Trenkler* — Phys. Z. 37, p. 338, 1936.

[13] *L. M. Sverblov, N. I. Prokofieva* — Optika i Spektroskopia, 7, p. 588, 1959.

[14] *W. R. Angus, C. K. Ingold* and *A. H. Leckie* — J. Chem. Soc. p. 925, ţ936.

[15] *C. R. Bailey, J. B. Hale, C. K. Ingold* and *J. W. Thompson* — J. Chem. Soc. p. 931, 1936.

СПЕКТР ВИБРАЦИИ 2—4— ДИИОДАНИЛИНА

(Краткое содержание)

В этой работе изучен спектр абсорбции 3—4— диноданилина ($C_6 H_3 NH_2 I_2$) в спектральной области от 1, 5 μ до 20 μ при поноши спектрометра имеющего зеркала покрытого серебром и при помощи саморегистрирующего спектрометра.

Из присутствия в спектре абсорбции, полос характерных для бензеновского кольца, группы NH_2 и связи C—I являютется заключениеи относительно молекулярной структуры вещества.

Отмечается присутствие интенсивной полосы при 530 $см^{-1}$, которая присисывается группе C—I, что свидетельствуем присутствии этой группы в молекуле изученного вещества.

В изученнои спектре появляются некоторые полосы допустиные только в конбинированной диффузии, а также полосы соответствующие неких вырожденных колебаний, что свидетельствует в том, что благодаря заменителям устраняется запрет из спектра бензена для большого число полос.

THE VIBRATION OF 2—4 DIIODANILIN

(Summary)

The authors examine in this work the absorption of the spectrum of 2—4 diiodanilin within the spectral region from 1,5 μ to 20 μ, by means of a spectrometre having silvery mirrors and with a spectrophotometre having automatic registration.

On may conclude about the molecular structure of the substance, from the presence within the absorption spectrum of bandes characteristic of the benzenic cycle of the NH_2 group and of the C—I join.

On must notice the presence of on intens band at 530 cm^{-1} which is attributed to the group C—I, a proof of the presence of this group within the molecule of the studied substance.

Within the studied spectrum there appear a few bands allowed only in Raman spectrum, as well as bands connected with the degenerated vibrations of the benzen and this prooves that thanks to substitutions, the interdiction by the specrum of the benzen is beeing abolished for several bands.

LE SPECTRE DE VIBRATION DE 2—4 DIIODANILINE

(Résumé)

On o étudié dans cet ouvrage l'absorption du spectre de la 2—4 diiodaniline ($C_6H_3NH_2I_2$) dans la région spectrale de 1,5 μ jusqu'au 20 μ à l'aide d'un spectrometre aux miroirs argentés ainsi que d'un spectrophotometre à enrégistrement automat.

On tire des conclusions au sujet de la structure moleculaire de la substance, grace a la presence du spectre d'absorption des bandes qui caracterisent le cycle benzenique, le grupe NH_2 et la liaison C—I.

On remarque la presence d'une bande intense a 530 cm^{-1} qui est due au groupe C—I celui-ci constituant une preuve de la presence de ce groupe dans la molecule de la substance studiée.

Dans ce spectre etudié apparaissent certaines bandes permises seulement dans la diffusion combinée, ainsi que des bandes qui correspondent aux vibrations degenerées du benzen, ce qui prouve que grace aux substitutions l'interdiction dans le spectre du benzen est supprimé pour plusieurs bandes.

DAS SCHWINGUNGSSPECTRUM DES 2—4 DIIODANILINS

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird das Absorptionsspektrum des 2—4 Diiodanilins [$C_6H_3NH_2I_2$] in der spektralen Region zwischen 1,5μ und 20μ, mit Hilfe einer Spektrometers mit versilberten Spiegeln und eines Spektrophotometers mit automatischer Registrierung untersucht. Aus dem Vorhandensein im Absorptionsspektrum der charakteristischen Banden des benzenischen Ringes, der Gruppe NH_2 und der Verbindung C—I kann man über die molekular Struktur der Substanz urteilen.

Es ist hervorzuheben das Vorhandesein eines intensiven Bandes bei 530 cm^{-1} das der Gruppe C—I zugeornet ist und das einen Beweis für Existenz dieser Gruppe in der Moleküle der untersuchten Substanz darstellt.

In untersuchten Spektrum erscheinen auch Banden die nur in Raman Spektrum erlaubt sind und Bande die einer degenerierten Schwingung des Benzens entschprechen ; dies beweist dass infolge der Substituenten die Interdiktion aus dem Spektrum des Benzols für mebrere Banden aufgehoben ist.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

COROZIUNEA FIERULUI ȘI ALIAJELOR SALE ÎN MEDII OXIDANTE ALCALINE *

Nota 1. Determinări experimentale asupra coroziunii în soluții de NaOCl

de ION ATANASIU și LYA BLUM LAZĂR

Coroziunea fierului în medii oxidante a format în ultimul timp obiectul a numeroase studii ; cercetările s-au îndreptat în special asupra coroziunii în medii acide, domeniu în care predomină activitatea cercetătorilor sovietici. Astfel L. I. Gurvici și G. V. Achimov [1] studiază potențialul de electrod al fierului în soluții de HNO_3 de diferite concentrații precum și în soluții acide de cromați, permanganați și persulfați. I. L. Rozenfeld [2] studiază potențialul de electrod al fierului în funcție de pH-ul soluției. Deosebit de interesante sînt lucrările lui V. P. Batrakov și G. V. Achimov [3] și V. P. Batrakov [4, 5, 6] în care acest autor aprofundează fenomenul pasivării catodice a fierului în medii puternic oxidante prin formarea peliculelor de protecție la polarizarea catodică a metalelor în oxidanți puternici. Aceasta aduce o scădere bruscă a potențialului datorită peliculei formate, care frînează puternic procesul catodic și determină starea pasivă. După Batrakov frînarea proceselor catodice prin pelicula pasivantă este determinată de blocarea suprafeței electrozilor datorită creerii unei supratensiuni față de procesul catodic.

Tot în domeniul coroziunii în medii oxidante acide se pot menționa si cercetările făcute de J. Jamamoto [7] și N. Kaplan — R. Andrus [8].

Mai puțin numeroase sînt lucrările privind coroziunea fierului în mediu alcalin de hipoclorit de sodiu și ele se referă în special la observații experimentale cu caracter practic. Astfel G. N. Quam [9, 10] studiind acțiunea hipocloritului de sodiu comercial asupra coroziunii oțelului și altor metale, găsește că aceasta variază cu substanțele adăugate pentru a mări stabilitatea soluției de hipoclorit ; adeseori aceste adaosuri sînt agenți de coroziune. Rezultate bune pentru inhibarea coroziunii se pot obține prin

* Comunicare prezentată la a VI-a sesiune științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 17—18 decembrie 1960.

slabe adaosuri de Na_3PO_4, Na_2CO_3, $Ca(OH)_2$ precum și mici adaosuri de detergenți. F.M. Grant [11] prezintă observații calitative asupra coroziunii oțelului nealiat în soluții de hipoclorit. Observări calitative asupra coroziunii oțelurilor 832 SV și 832 SK sub acțiunea soluțiilor de hipoclorit 3—15 g clor activ/litru dă și P. Fink [12].

G. H. Botham [13, 14] studiind activitatea corozivă a soluțiilor de hipoclorit pe diferite metale și pe oțel inoxidabil arată că acesta din urmă este corodat prin pittinguri cînd soluția conține și $KMnO_4$; influențează coroziunea temperatura, concentrația în ioni H^+ și în hipoclorit. Vaporii de apă conținînd hipoclorit produc ruginirea pieselor.

Din puținele lucrări executate în acest domeniu rezultă că, coroziunea fierului și aliajelor sale în mediu alcalin de hipoclorit de sodiu este un proces legat de factori multipli. Cum aceste cercetări au urmărit în primul rînd un scop practic, găsirea unui anumit metal care să poată rezista mai bine la acțiunea corosivă a soluțiilor de hipoclorit în industria textilă sau pentru utilizări sanitare, lucrările acestea au un caracter sporadic și necomplet.

Ne propunem a studia în cele ce urmează coroziunea unor oțeluri simple și a unor aliaje (oțeluri inoxidabile) sub acțiunea hipocloritului de sodiu, insistînd în special asupra laturii cantitative a procesului de coroziune în soluțiile de hipoclorit de sodiu. Mijloacele de frînare a coroziunii prin inhibitori vor face obiectul unei note viitoare.

Partea experimentală.

S-au luat spre cercetare aliaje simple fier-carbon precum și oțeluri inoxidabile Fe-C-Cr, Fe-C-Cr-W, Fe-C-Cr-W-V, Fe-C-Cr-Ni-W-V-Mo. Compoziția acestor aliaje precum și indicii lor, respectivi se pot vedea în tabela 1.

Tabela 1

Denumirea oțelului	Compoziția %									
	C	Mn	Si	S	P	Cr	Ni	W	V	Mo
OL 38	0,12-0,22	0,36-0,6	0,12-0,35	0,06	0,06					
OL 00	0,23			0,06	0,07					
RA_1	0,76	0,35	0,45			4,40	0,16	16	1,20	0,05
SUM	0,98	0,67	0,22	0,004	0,026	1,75		0,93		
SNT_1	0,3-0,4-	0,3				2,2-2,7		7,5-9	0,2-0,5	
SNL_3	1,8 2,2	>0,3	>0,3	0,03	0,03	11-13				

Acțiunea corosivă s-a studiat urmărind pe deoparte viteza de coroziune prin pierderea în greutate în timp (funcție de factorii concentrație, pH, etc.) cît și prin variația potențialului de electrod.

Ca mediu de coroziune s-au folosit soluții pure de hipoclorit de sodiu de concentrații variind între 4,7 g clor activ/litru pînă la concentrația maximă de 18,9 g clor activ/litru. PH-ul soluțiilor a variat între 10,9—11,4. Temperatura medie de lucru 25°C.

Ca epruvete de cercetare s-au folosit lame de oțel. Piesele au fost mai întîi șlefuite cu șmirghel cu granulație mare apoi cu granulație din ce în ce mai fină pînă la 000; piesele șlefuite au fost spălate cu apă apoi degresate cu alcool și acetonă.

Probele uscate au fost păstrate în exicator timp de 24 ore înainte de încercare. Condițiile de pregătire au fost în toate cazurile absolut identice.

Imersiunea totală în soluția de hipoclorit a fost asigurată prin fire nylon pentru a evita impurificarea soluțiilor de hipoclorit.

Piesele scoase din baia de hipoclorit de sodiu după coroziune au fost introduse într-o soluție de citrat de amoniu 10% și NH_4OH pentru a ușura separarea produselor de coroziune aderente, șterse cu o perie foarte fină, spălate cu apă și acetonă, păstrate în exicator 24 ore și apoi cîntărite. Rezultatele consemnate reprezintă media cîtorva determinări făcute în paralel.

Cele 6 probe de oțeluri au fost supuse la acțiunea corodantă a soluțiilor de hipoclorit de sodiu de concentrații 18,9, 12,6, 9,5 și 4,7 g clor activ la litru timp de 384 ore, urmărind viteza de coroziune și penetrația prin pierderea în greutate a epruvetelor. Rezultatele obținute sînt arătate în tabelele alăturate.

Tabelele 2 și 3 arată coroziunea a 2 oțeluri simple OL 38 și OL 00 cu procente de carbon mici sensibil egale. Ambele oțeluri sînt corodate aproape în aceeași măsură în timp. Viteza și gradul de coroziune precum și forma de coroziune sînt strîns legate de concentrația soluției de hipoclorit, respectiv de concentrația în clor activ a soluțiilor.

La concentrațiile industriale maxime de aproximativ 19 g/l clor activ se observă o coroziune foarte slabă prin pittinguri care apar mai numeroase la extremitățile plăcilor. Suprafața probelor apare, la observația cu ochiul liber, neschimbată.

Cu cît concentrația soluțiilor de hipoclorit scade, viteza de coroziune se mărește, oțelul OL 38 fiind corodat într-o măsură mai mică decît OL 00. Viteza de coroziune crește cu diluarea pînă la o anumită concentrație (9,5 g Cl activ/litru) după care începe să scadă pentru ambele oțeluri.

Aspectul suprafeței corodate se schimbă; apare o coroziune sub formă de pete și plăgi mai mult sau mai puțin profunde în funcție de timpul de coroziune și concentrația soluției. Produsele de coroziune foarte voluminoase cad treptat în soluție ca Fe_2O_3 insolubil.

Coroziunea în timp a oțelului OL 38 la diferite concentrații de hipoclorit de sodiu *Tabela 2*

Timp ore	Clor activ 18,9 g/litru			Clor activ 12,6 g/litru			Clor activ 9,5 g/litru			Clor activ 4,7 g/litru		
	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an
24	16,0	0,66	0,726	16	0,66	0,726	145,2	6,05	6,655	124,1	5,17	5,687
48	32,0	0,66	0,726	108	2,25	2,475	387,8	8,07	8,877	370,7	7,72	8,492
72	46,6	0,64	0,704	228	3,16	3,476	593,4	8,31	9,141	573,8	7,96	7,756
120	81,0	0,67	0,737	569	4,74	5,210	695,6	5,79	6,369	628,6	5,23	5,753
240	144,1	0,60	0,660	588	2,45	2,695	759,9	3,16	3,476	621,0	2,58	2,838
384	195,0	0,50	0,550	606	1,57	1,727	774,2	2,01	2,21	614,1	1,60	1,760

Coroziunea în timp a oțelului OL 00 la diferite concentrații de hipoclorit de sodiu *Tabela 3*

Timp ore	Clor activ 18,9 g/litru			Clor activ 12,6 g/litru			Clor activ 9,5 g/litru			Clor activ 4,7 g/litru		
	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an
24	34,1	1,42	1,562	51	2,12	2,330	163,4	6,80	7,480	121,2	5,05	5,555
48	73,6	1,53	1,683	122	2,54	2,750	415,6	8,65	9,510	381,4	7,94	8,734
72	74,6	1,03	1,133	287	3,98	4,370	640,8	8,90	9,790	622,2	8,64	9,504
120	94,2	0,78	0,858	584	4,86	5,340	695,6	5,80	6,369	624,7	5,20	5,720
240	173,5	0,72	0,792	608	2,53	2,783	764,0	3,18	3,498	631,7	2,63	2,893
384	213,7	0,55	0,605	626	1,63	1,793	790,4	2,05	2,255	625,3	1,62	1,782

Comportarea acestor oțeluri la coroziune se poate explica prin apariția unui film pasivant care se formează la suprafața oțelului prin imersiune în soluția de hipoclorit de sodiu.

Coroziunea în soluții de hipoclorit de sodiu poate fi considerată ca o coroziune prin depolarizare cu oxigen, în mediu alcalin, după schema:

$$O_2 + 2H_2O + 4\varepsilon \longrightarrow 4OH^- \quad \text{cu } e_0 = +0{,}402\ V$$

provenit prin descompunerea soluției de hipoclorit de sodiu.

$$NaOCl \longrightarrow NaCl + \tfrac{1}{2}O_2$$

la care s-ar putea adăuga și acțiunea corodantă a NaCl. Prezența NaCl nu aduce variațiuni importante vitezei de coroziune comparativ cu valorile obținute datorită acțiunii NaOCl.

Prin urmare, în prezența oxigenului, porțiunile catodice vor funcționa ca electrozi de oxigen, de un tip special.

În soluțiile foarte oxidante de hipoclorit de sodiu se formează un film pasivant, care poate frîna viteza de coroziune, fenomen observat și de Batrakov la coroziunea în mediile oxidante acide. Viteza de formare a acestui film este cu atît mai mare cu cît soluția este mai concentrată și în acest caz frînarea coroziunii va fi mai puternică.

La soluțiile mai diluate formarea filmului protector are o importanță din ce în ce mai mică, coroziunea începe imediat și în condițiile maxime se atinge o viteză de 8—10 ori mai mare decît la soluțiile concentrate.

Faptul că viteza de coroziune după ce depășește un maximum începe să scadă se poate interpreta din mai multe puncte de vedere.

La depolarizarea cu oxigen factorul hotărîtor este acumularea sa continuă în imediata vecinătate a catodului. Dacă difuziunea oxigenului la catod este lentă ea va influența procesul de coroziune, respectiv viteza de coroziune va scade, ceea ce se poate întîmpla desigur în soluțiile diluate.

Stratul de oxid de fier format la suprafață poate micșora în oarecare măsură viteza de coroziune; astfel în tabelele 2 și 3 se observă că viteza

Tabela 4. **Coroziunea în timp a oțelului SUM. la diferite concentrații de hipoclorit**

Timp ore	Clor activ 18,9 g/litru			Clor activ 9,5 g/litru		
	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an
48	26,1	0,54	0,594	31,0	0,64	0,708
120	144,4	1,20	1,320	505,8	4,21	4,631
240	273,1	1,13	1,243	1253,0	5,22	5,740
384	330,1	0,85	0,935	1454,0	3,78	4,150

de coroziune scade în timp datorită probabil protecției nepermanente pe care o dau păturile de oxid de fier pînă se desprind după suprafața piesei corodate.

Tabelele 4, 5, 6, 7 arată rezultatele obținute, lucrînd în aceleași condiții asupra unor oțeluri aliate. Calitativ mersul coroziunii este același ca și la oțelurile simple însă viteza de coroziune diferă.

Tabela 5. Coroziunea în timp a oțelului SNT_1 la diferite concentrații de hipoclorit

Timp ore	Clor activ 18,9 g/litru			Clor activ 9,5 g/litru		
	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an
48	13,9	0,29	0,312	16,1	0,33	0,363
120	38,7	0,32	0,352	105,0	0,87	0,957
240	101,2	0,42	0,462	481,6	2,00	2,200
384	166,2	0,43	0,473	521,0	1,35	1,485

Tabela 6. Coroziunea în timp a oțelului RA_1 la diferite concentrații de hipoclorit

Timp ore	Clor activ 18,9 g/litru			Clor activ 9,5 g/litru		
	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an
48	8,0	0,16	0,176	9,1	0,19	0,209
120	30,1	0,25	0,275	160,0	1,33	1,463
240	106,0	0,44	0,484	412,0	1,71	1,881
384	176,0	0,45	0,495	505,0	1,31	1,441

Tabela 7. Coroziunea în timp a oțelului SNL_3 la diferitele concentrații de hipoclorit

Timp ore	Clor activ 18,9 g/litru			Clor activ 9,5 g/litru		
	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an	Pierderea în greutate g/m²	Viteza de coroziune g/m² oră	Penetrația mm/an
48	21,8	0,45	0,495	26,8	0,55	0,605
120	107,2	0,89	0,979	178,8	1,49	1,639
240	400,6	1,66	1,826	711,8	2,90	3,190
384	665,0	1,73	1,903	1083,0	2,80	3,080

Oțelurile SUM și SNL_3 deși oțeluri aliate cu Cr suferă o coroziune mai mare decît oțelurile simple; la aceste oțeluri procentul în carbon este mai ridicat decît la toate oțelurile studiate. Coroziunea cea mai puternică o suferă oțelul SUM.

Mult mai bine se comportă oțelurile SNT_1 și RA_1, oțeluri cu wolfram; oțelul RA_1, deși are un conținut de carbon mai ridicat 0,76% dar și un procent foarte ridicat în wolfram, este cel mai puțin influențat de acțiunea corodantă a soluțiilor de hipoclorit chiar la concentrația de

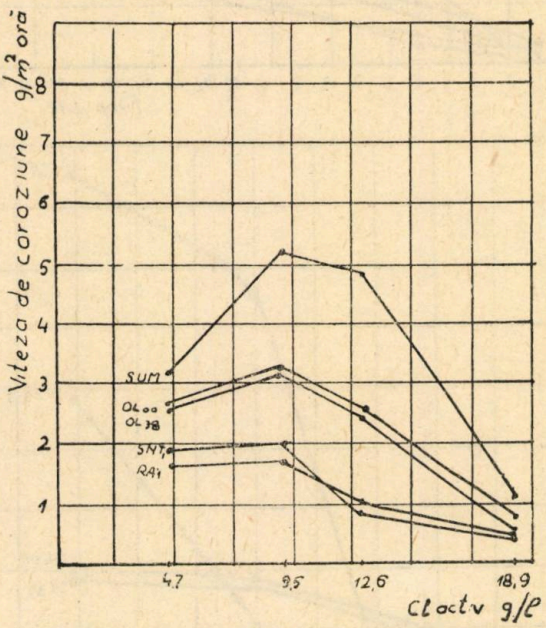


Fig. 1

9,5 g clor activ/litru care ar fi concentrația critică de coroziune a soluțiilor de hipoclorit (Fig. 1).

Fig. 2 arată pierderea în greutate a oțelurilor SUM, OL 00, OL 38, RA_1 și SNT_1 la concentrația maximă de 18,9 g clor activ/litru, iar Fig. 3 pierderea în greutate a acelorași oțeluri în soluția de hipoclorit 9,5 g Cl activ/litru.

Se observă în Fig. 2 coroziunea slabă a tuturor oțelurilor în soluția concentrată de hipoclorit și în special a oțelurilor aliate RA_1 și SNT_1 care se comportă aproape identic, iar în Fig. 3 coroziunea puternică pe care o suferă oțelul SUM slab aliat și cu conținut ridicat în carbon.

Determinările noastre confimă afirmațiile lui G. H. Botham [13, 14], după care coroziunea crește cu concentrația soluțiilor de hipoclorit, numai în limita concentrațiilor mici. Deasemeni coroziunea sub forma de pitting nu se observă decît la concentrații ridicate de hipoclorit.

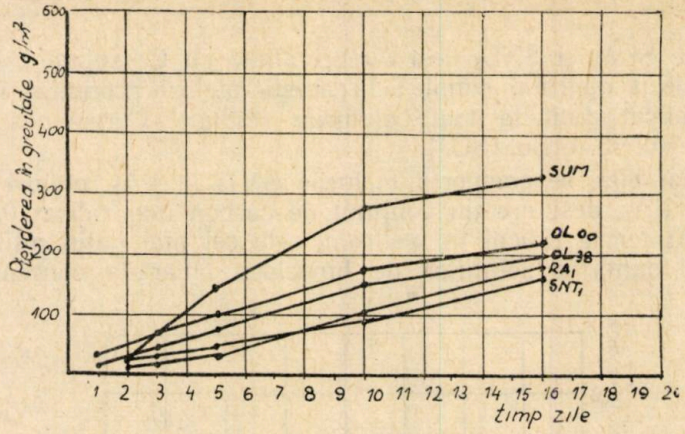

Pierderea în greutate g/m²
600
500
400
300
200
100
SUM
OL00
OL38
RA1
SNT1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
timp zile

Fig. 2

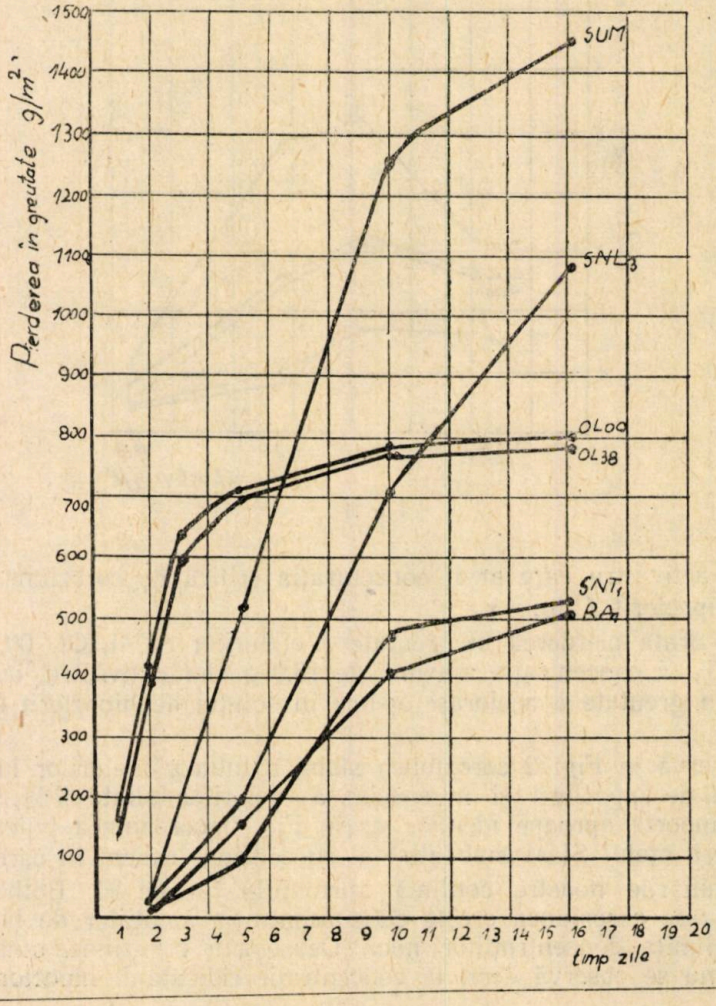

Pierderea în greutate g/m²
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
SUM
SNL3
OL00
OL38
SNT1
RA1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
timp zile

Fig. 3

Potențialul de electrod în funcție de coroziune.

Potențialele de electrod au fost determinate prin metoda compensației față de electrodul de calomel saturat ca electrod de comparație.

In Fig. 4 și Fig. 5 se reprezintă variația potențialului de electrod în timp la oțelurile simple OL 00 și OL 38 în soluții de diferite concentrații de hipoclorit de sodiu.

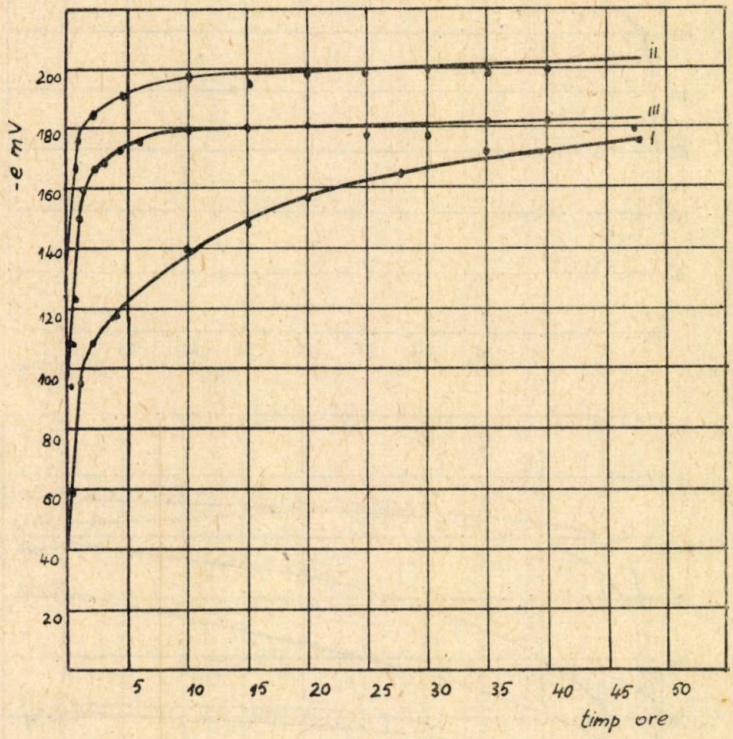


Fig. 4

Se constată în soluția concentrată (curba I) o deplasare bruscă în timp a potențialului spre valori mai negative, apoi curba urmează o pantă ascendentă lină tinzînd spre o valoare limită. La concentrația critică (curba II) deplasarea spre valori mai negative a potențialului este și mai pronunțată cu aproximativ 75 mV față de curba I. Potențialul se stabilește repede și păstrează o valoare constantă în timp.

La concentrațiii mici 4,7 g Cl activ/litru potențialul se stabilește tot atît de repede la o valoare constantă, însă inferioară potențialului observat la soluția de concentrație 9,5 g Cl activ/litru.

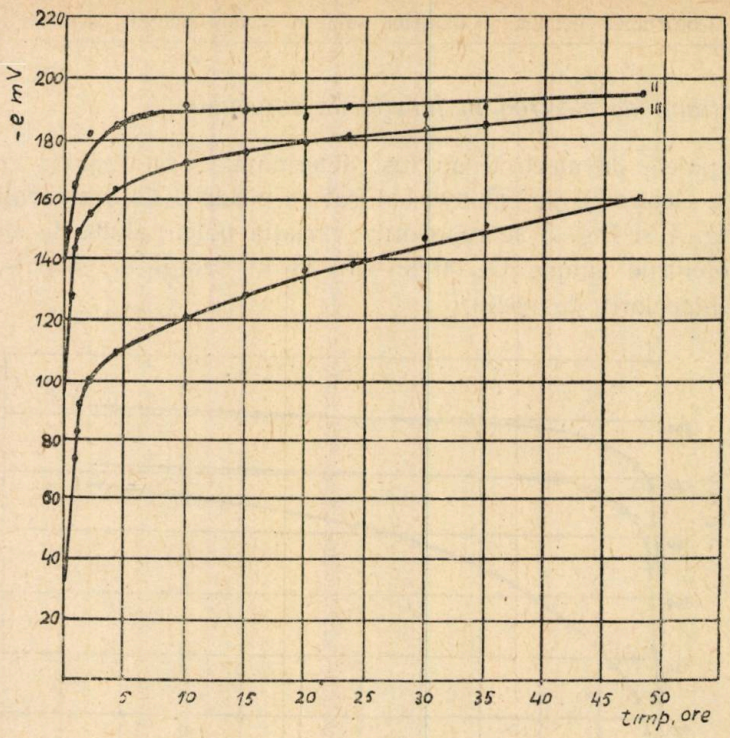

-e mV
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
II
III
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
timp, ore

Fig. 5

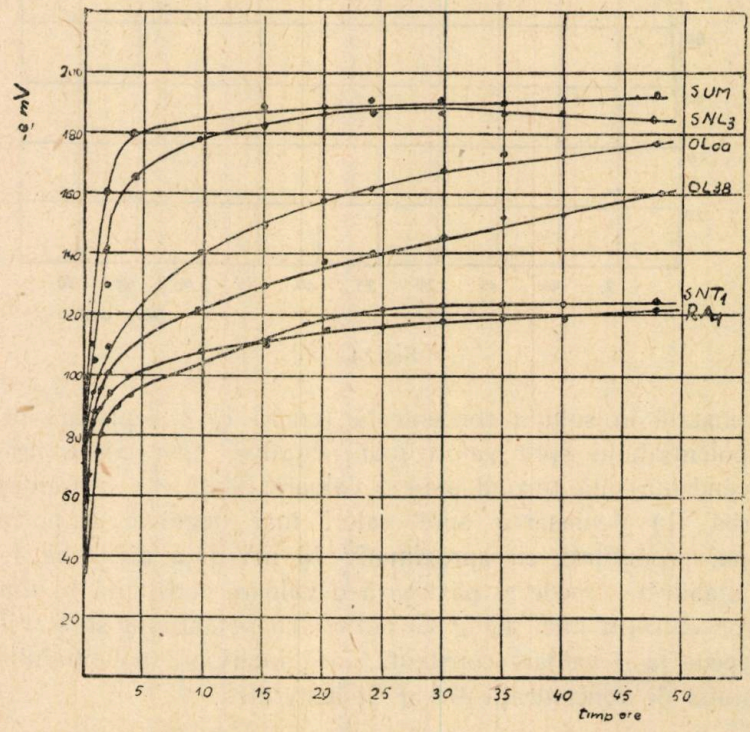
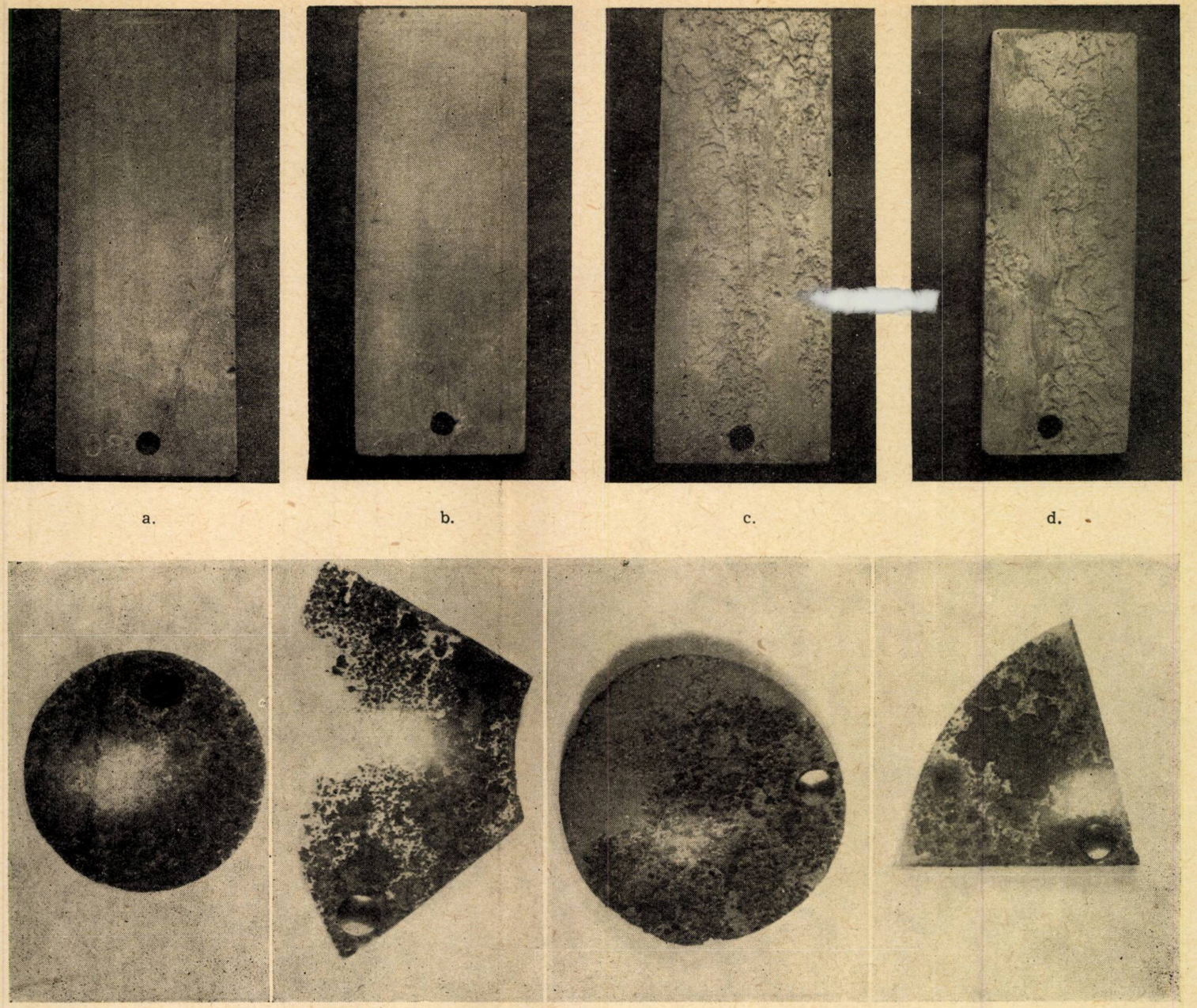

-e mV
SUM
SNL3
OLca
OL38
SNT1
RA1
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
timp ore

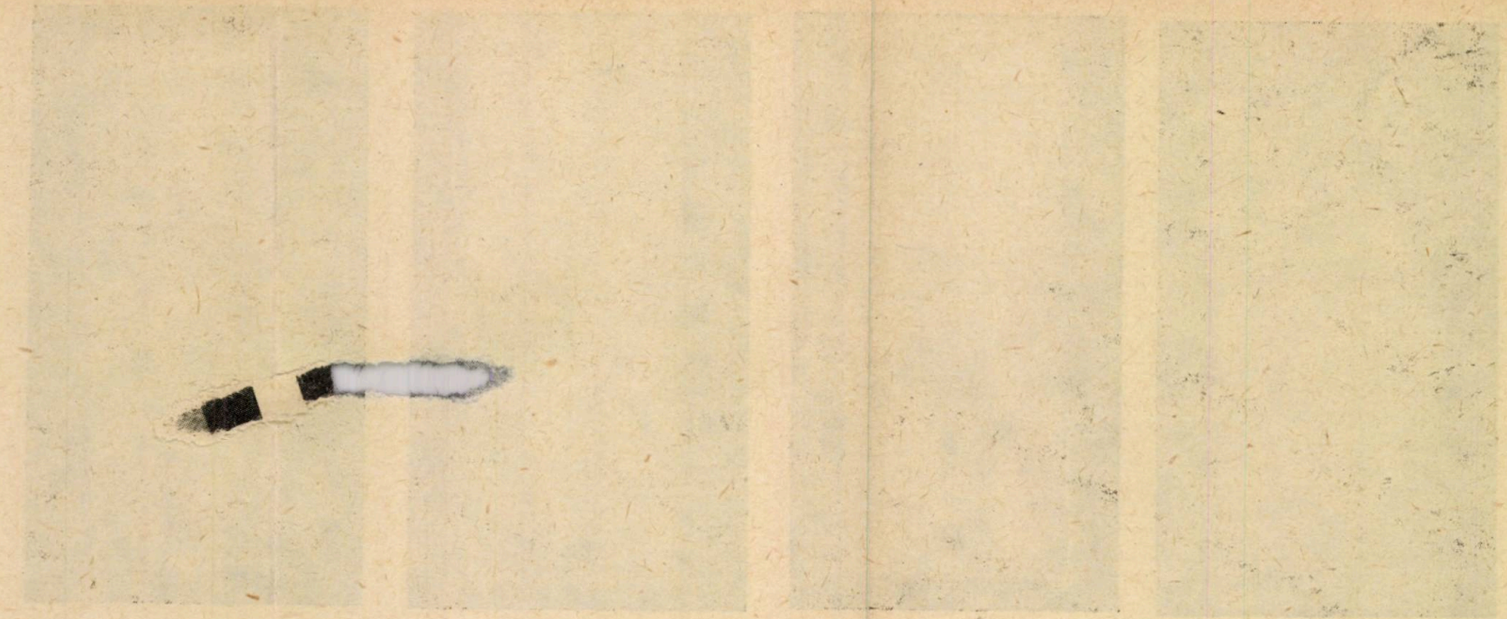
Fig. 6



a. b. c. d.

e. f. g. h.

Fig. 8. Aspectul probelor corodate în soluție de hipoclorit de sodiu timp de 10 zile.
Soluție de concentrație 18,9 g Cl activ/l : a. OL 38 ; b. OL00. Soluție de concentrație 9,5 g Cl activ/l: c. OL 38; d. OL00 e. RA1; f. SNT1; g. SUM; h. SNL3



În toate cazurile variația cea mai mare se observă în primele 2—3 ore de la imersiune, dar pe cînd în soluțiile mai diluate potențialul se stabilește la o valoare constantă, în soluțiile concentrate potențialul continuă să crească treptat datorită pasivării mai puternice a suprafeței. Pentru OL 00 valorile potențialului de electrod sînt mai electronegative în comparație cu cele obținute cu OL 38 la toate concentrațiile studiate.

Figurile 6 și 7 reprezintă variația potențialului de electrod în timp în soluții de concentrații 18,9 g Cl/litru și 9,5 g Cl activ/litru la oțelurile

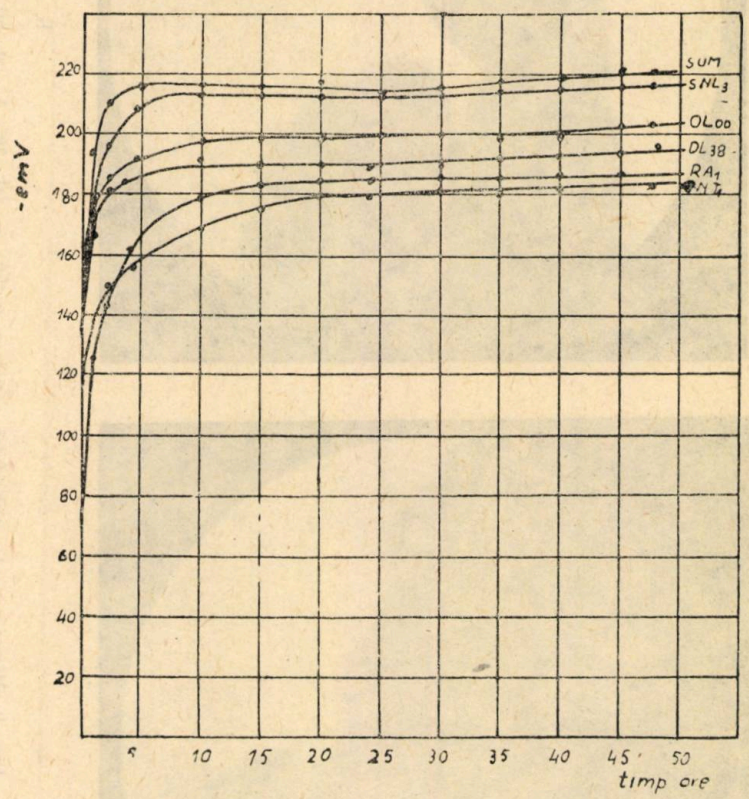
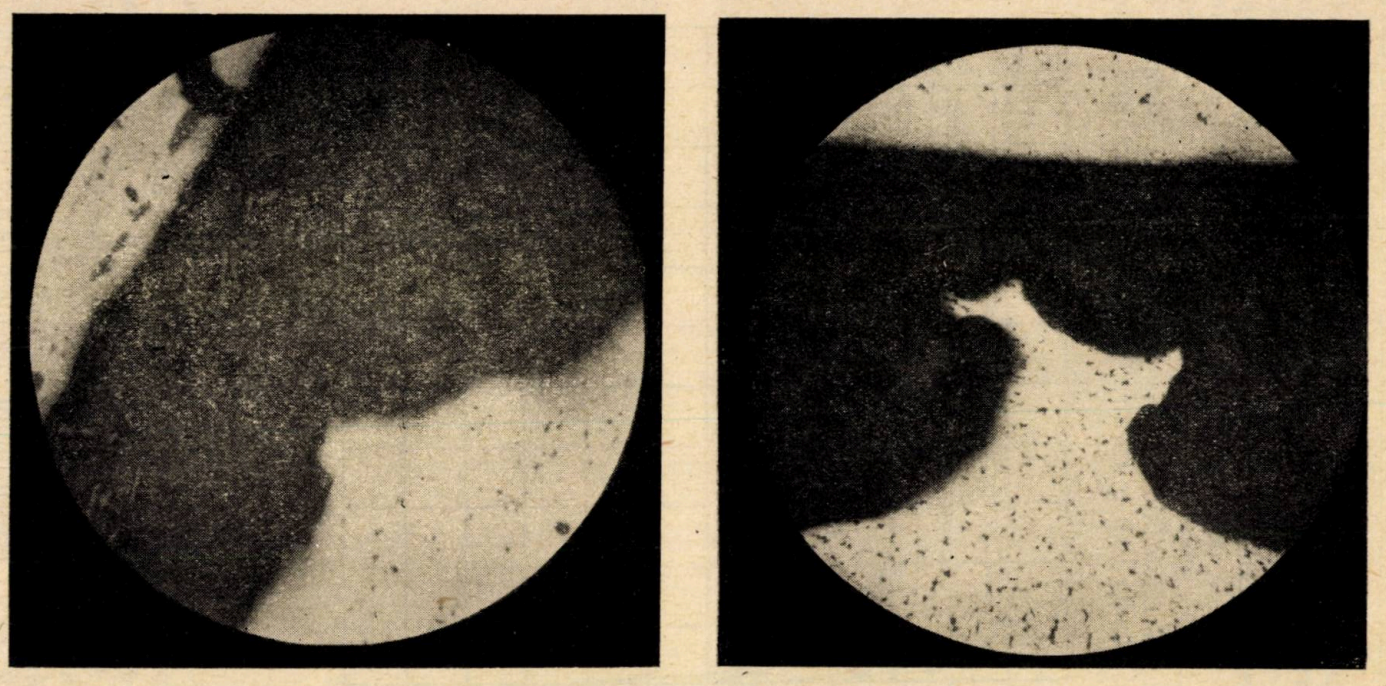


Fig. 7

OL 38, OL 00 și oțelurile aliate RA_1, SNT_1, SUM și SNL_3. Potențialele cele mai electropozitive se obțin pentru oțelurile aliate RA_1 și SNT_1; urmează apoi oțelurile OL 38 și OL 00, ultimul cu potențiale mai electronegative ca OL 38, iar oțelurile SUM și SNL_3 deși oțeluri aliate au potențialele cele mai electronegative.

Această ordine se menține și la concentrația maximă și la concentrația de 9,5 g Cl activ/litru; pentru diluții mai mari (4,5 g Cl/litru) deplasarea spre valori mai negative este mai slabă.



a. b.

Fig. 9. Microfotografia suprafeței corodate (×50) a. OL 38; b. OL 00

Concluzii.

1. Toate cele 6 tipuri de oțeluri studiate suferă acțiunea corodantă a soluțiilor de hipocorit de sodiu.

2. Viteza de coroziune este funcție de concentrația soluției, conform cu previziunile teoretice.

La concentrații mari coroziunea este slabă datorită formării probabile a unui film pasivant, format instantaneu care frînează atacul oțelului.

Viteza de coroziune crește cu diluarea și atinge un maximum pentru o concentrație critică de 10 g Cl/litru, după care scade cu diluția, la toate oțelurile ; la această concentrație se obțin valorile cele mai elecronegative ale potențialului de electrod.

3. La concentrații mari se observă o coroziune prin pittinguri, în soluții diluate se observă o coroziune prin pete.

4. Rezistența cea mai mare la coroziune și potențialele cele mai electropozitive au oțelurile aliate RA_1 și SNT_1.

5. Coroziunea pare a fi influențată pozitiv de creșterea procentului de carbon, în oțel.

Laboratorul de Electrochimie
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1.] *L. I. Gurvici-G. V. Achimov* : Izvestia ANSSSR otdelenie himicheschih nauc nr. 5, 1950
[2.] *I.L. Rozenfeld* : Jurnal fizicescoi himii nr. 6, 1951
[3.] *V. P. Batrakov-G. V. Achimov* : Docladi ANSSSR Vol. 89, nr. 2, 1953
[4.] *V. P. Batrakov* : Docladî ANSSSR 107, 2, 269—72, 1956
[5.] *V. P. Batrakov* : Docladî ANSSSR 111, 4, 845—47, 1956
[6.] *V. P. Batrakov* : Docladî ANSSSR 117, 2, 252—55, 1957
[7.] *J. Jamamoto* : Bull. Inst. Phys. Chem. Res. 19, 281, 1940
[8.] *N. Kaplan-R. Andrus* : Ind. Eng. Chem. Nr. 10, 1946
[9.] *G. N. Quam* : Food Ind. 2, 121—2, 1930
[10.] *G. N. Quam* : Food Ind. 2, 366—7, 1930
[11.] *F. M. Grant* : Ann. Rept. Intern. Assoc. Milk Sanitarians 25, 9—14, 1937
[12.] *P. Fink* : Tids. Textiltek 6, 146—47, 1948
[13.] *G. H. Botham-G. A. Dummett* : J. Dairy Research. 16, 23—38, 1949
[14.] *G. H. Botham* : Proc. 12 th Intern. Dairy Congr. (Stokholm), 3, 310—18, 1949
[15.] *L. B. Golden-J. Roy Lane Jr.-W. L. Acherman* : Ind. Eng. Chem. 44, 1930—9, 1952

КОРРОЗИЯ ЖЕЛЕЗА И ЕГО СПЛАВОВ В ОКИСЛИТЕЛЬНЫХ ОСНОВНЫХ СРЕДАХ 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВЯЗАННЫЕ С КОРРОЗИЕЙ В РАСТВОРАХ NaOCl

(Краткое содержание)

Была исследованна коррозия сталей OL 38 и OLOO и легированных сталей RA_1, SNT_1, SUM, SNL_3 под действием NaOCl, по изменению скорости коррозии, выраженной потерей веса во времени, а также по изменению во времени потенциала электрода.

Концентрация активного хлора в растворе влияет на вид коррозии и ее скорость, достигающую максимум для критической концентрации около 10 г активного клора на 1 л раствора; для этого значения получаются также и наиболее электроотрицательные потенциалы.

Наибольшее сопротивление коррозии представляют стали RA_1 и SNT_1.

THE CORROSION OF IRON AND ITS ALLOYS IN ALKALINE OXIDIZING SOLUTIONS. I. EXPERIMENTAL TESTS ON CORROSION OF NaOCl SOLUTION

(Summary)

The corrosion of OL 38 and OL 00 steels and of RA_1, SNT_1, SUM and SNL_3 alloyed steels under the action of NaOCl has been studied by the variation of the rate of corrosion by the loss of weight in time as well as the variation of electrochemical potentials as a function of time. The concentration of active chlorine of the solution influences the shape and the rate of corrosion reaching a maximum at the critical concentration of almost 10 g active Cl/l; at this value, the most negative electrochemical potentials are also obtained.

The greatest resistance to corrosion is encountered at the RA_1 and SNT_1 steels.

LA CORROSION DU FER ET DE SES ALLIAGES DANS DES MILIEUX OXYDANTS ALCALINS. I. ESSAIS EXPÉRIMENTAUX SUR LA CORROSION DANS LES SOLUTIONS DE NaOCl

(Résumé)

On étudie la corrosion des aciers OL 38, OL 00 et des aciers alliés RA_1, SNT_1, SUM et SNL_3 sous l'action de NaOCl par la variation de la vitesse de corrosion par la perte du poids en temps ainsi que la variation des potentiels d'électrode en fonction du temps.

La concentration du chlore activ de la solution a une influence sur la forme et la vitesse de corrosion, qui atteint un maximum pour la concentration critique d'environ 10 g Cl actif/l ; à cette valeur on obtient aussi les potentiels d'électrode les plus negatifs. Les aciers RA_1 et SNT_1 présentet la plus grande résistance à la corrosion.

DIE KORROSION DES EISENS UND SEINER LEGIERUNGEN IN ALKALISCHOXYDIERENDEN MITTELN. I. KORROSIONSBESTIMMUNGEN IN NaOCl - LÖSUNGEN

(Zusammenfassung)

Es wird die Korrosion der Stähle OL 38, OL 00 und Stahllegierungen RA_1, SNT_1, SUM und SNL_3 untersucht unter Einfluss von NaOCl durch Veränderung der Korrosionsgeschwindigkeit durch zeitlichen Gewichsverlust, wie auch die zeitliche Veränderung des Elektroden-Potentials.

Die Konzentration der Lösung in aktiven Chlor beeinflusst die Form und Korrosionsgeschwindigkeit, welche ein Maximum für die kritische Konzentration von zirka 10 g/l aktives Chlor erreicht ; bei diesem Wert werden auch die elektro-negativsten Potentiale erzielt.

Die besten Korrosionfestigkeiten weisen die Stähle RA_1, und SNT_1 auf.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

A PHYSICAL MODEL FOR NUCLEATE BOILING HEAT TRANSFER FROM A HORIZONTAL SURFACE

by É. RUCKENSTEIN

In several recently published paper [1--5] it has been shown that in nucleate boiling the heat transfer is determined by the microconvection process taking place in the immediate vicinity of the heating surface. This process is due to the appearance of bubbles and their growing in the „active centres" of the surface.

Based on such representations Forster and Zuber [2, 3] have obtained quasi-empirical equations for the heat transfer coefficient at maximum heat flux and Ruckenstein [5] has established the dimensionless groups which appear in the correlation of experimental results for the entire range of nucleate boiling.

The aim of this paper is to establish an equation for the heat transfer coefficient, based on a simplified model of the hydrodynamical process.

1. In the immediate vicinity of the heating surface the hydrodynamical process depends essentially on the number of active centres and on the growing of the bubbles in these active centres. Let us consider a group of active centres, with an average distance L between neighbouring centres and let us assume that simultaneously in each centre there appears a bubble nucleus. By the growth of these bubbles the liquid between them is put into motion. It is plausible to assume, that in the immediate vicinity of the heating surface the liquid flow is nearly parallel to this surface up to a distance $l \approx \frac{L}{2}$ from the active centres, wherefrom it becomes practically normal to the heating surface and is mixed up with the bulk of the liquid.

We shall assume that at each instant along the distance $\frac{2}{L} - R$ one may use for the heat transfer coefficient the equation which is valid in the stationary case for a semi-infinite fluid in laminary flow along a plate, the liquid velocity in the initial point being equal to the growth

velocity $\frac{dR}{dt}$ of the bubbles. A model somehow nearer to reality would correspond to the radial motion, on a plate, of a liquid which has its sources distributed on the lateral surface of a semi-infinite cylinder normal to the plate. Such a model is at present under investigation; it will be published later on. The simple representation used in this paper is a good approximation of the above model for all times for which $\frac{L}{2}$ is not too large as compared with R.

With the assumptions mentioned above the following expression is obtained for the average of the heat transfer coefficient over the distance $\frac{L}{2} - R$:

$$\alpha_t' = 0.68\,\lambda \left(\frac{\frac{dR}{dt}}{\nu\left(\frac{L}{2} - R\right)} \right)^{1/2} Pr^{1/3} \tag{1}$$

Since only a fraction of the heating surface is in contact with the liquid, the remainder being covered with vapour bubbles, we may write, in first approximation, the following expression for the heat transfer coefficient:

$$\alpha_t = 0.68\,\lambda \left(\frac{\frac{dR}{dt}}{\nu\left(\frac{L}{2} - R\right)} \right)^{1/2} Pr^{1/3} \left[1 - \pi \left(\frac{R}{L} \right)^2 \right] \tag{2}$$

A bubble which grows on an active centre breaks loose when its radius reaches a value R_0. The time necessary for the formation of a bubble with radius R_0 shall be denoted by τ. From the moment at which a bubble gets loose, it takes a certain time τ' until a new bubble begins to grow on the same active centre. The experimental results of Westwater and Santagelo [6] show however that for sufficiently large heat fluxes $\tau' \ll \tau$.

Since the process of heat transfer repeats itself at time interval τ it seems reasonable to define the heat transfer coefficient as an average over the time interval τ. Thus

$$\alpha = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} 0.68\,\lambda \left[1 - \pi \left(\frac{R}{L} \right)^2 \right] \left(\frac{\frac{dR}{dt}}{\nu\left(\frac{L}{2} - R\right)} \right)^{1/2} Pr^{1/3}\, dt. \tag{3}$$

In a first approximation we use for the radius R, the equation given by Forster and Zuber [7]

$$R = \frac{c\gamma' (\pi a)^{1/2} t^{1/2} \Delta T}{r\gamma''}. \tag{4}$$

With the aid of equation (4) it is easy to show that $R\frac{dR}{dt}$ is time independent, having the value

$$R\frac{dR}{dt}=\frac{1}{2}\left[\frac{c\gamma'(\pi a)^{1/2}\Delta T}{r\gamma''}\right]^2. \tag{5}$$

If we replace dt in equation (3) by $\frac{dt}{dR}dR$, we obtain, after some transformations, the following final equation

$$\frac{\alpha R_o}{\lambda}=1.36\frac{L}{R_o}\left(\frac{R\frac{dR}{dt}}{\nu}\right)^{1/2}Pr^{1/3}\int_0^{\frac{R_o}{L}}\frac{(1-\pi x^2)x^{1/2}}{\left(\frac{1}{2}-x\right)^{1/2}}dx\equiv$$

$$\equiv 1.36\frac{L}{R_o}\left(\frac{R\frac{dR}{dt}}{\nu}\right)^{1/2}Pr^{1/3}F\left(\frac{R_o}{L}\right), \tag{6}$$

where

$$F\left(\frac{R_o}{L}\right)\equiv 0.399-0.127\,u-0.05\sin u+0.036\sin 2u-$$

$$-0.016\sin^3 u\approx 0{,}399-0.127\,u$$

and

$$u\equiv \arccos\left(4\frac{R_o}{L}-1\right).$$

2. In the equations established above there appear two quantities, R_0 and L, with respect to which the following remarks seem necessary. For the radius R_0 of a bubble which breaks loose from an active centre the equation generally used is:

$$R_o=0.01\,\theta\left(\frac{\sigma}{\gamma'-\gamma''}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Equation (7) has been established under the assumption that the bubble gets loose when the buoyant force and the force due to surface tension become equal. Cole [8] has pointed out that at large heat fluxes the resistance force of the liquid must be taken into account, too. For D_0 he proposes the equation:

$$(\gamma'-\gamma'')\frac{\pi D_0^3}{6}=\pi D_0\sigma f(\theta)+C_D\frac{\pi D_0^2}{8}\gamma' u_b^2, \tag{8}$$

where the first term on the right hand side represents the force due to surface tension, while the second one represents the resistance force.

At least in a first approximation we may consider $u_b \approx 2\frac{dR}{dt}$

Using this approximation and equation (5), equation (8) becomes

$$(\gamma' - \gamma'')\frac{\pi D_0^3}{6} = \pi D_0 \sigma f(\theta) + C_D \frac{\pi}{2}\frac{\gamma'}{g}\left[\frac{(\Delta T)\, c\gamma' (\pi a)^{1/2}}{r\gamma''}\right]^4. \qquad (9)$$

The resistance coefficient C_D is practically unity in the domain of Reynolds numbers met with in the boiling process.

For sufficiently high values of ΔT the first term on the right hand side may be neglected; so we obtain

$$D_0 = \left[\frac{3\pi^2\gamma'}{g(\gamma' - \gamma'')}\right]^{1/3}\left[\frac{c\gamma' a^{1/2}(\Delta T)}{r\gamma''}\right]^{4/3}. \qquad (10)$$

In the alternative extreme case (ΔT small enough) the radius R_0 is given by equation (7). A more detailed discussion concerning the radius R_0 of the bubble is given elsewhere [9].

3. The average distance between neighbouring active centres may be estimated as follows [5]:

$$\frac{L}{R_0} \approx \frac{L_0}{R_0}\Phi\left(\frac{\sigma T_l}{l_0 r\gamma'' J\Delta T}\right), \qquad (11)$$

where L_0 is the average distance between the cavities of the heating surface, l_0 the average cavity depth, while Φ is a function of the dimensionless group

$$\frac{\sigma T_l}{l_0 r\gamma'' J(\Delta T)}.$$

The function Φ may be computed if the distribution of cavity depths is known. For further details see [5].

4. Discussion. The results obtained with the extremely rough model of this paper permit in a certain measure to justify from a theoretical point of view the following empirical equation, (12), proposed by Forster and Zuber for maximum heat flux *):

$$Nu = 0.0015\, Re^{0.62}\, Pr^{1/3}. \qquad (12)$$

Since at maximum heat flux $L \approx 2\, R_0$, our equation (6) leads to

$$Nu' \equiv \frac{\alpha R_0}{\lambda} \sim Re^{1/2}\, Pr^{1/3}.$$

*) As characteristic length in Nusselt's number, Forster and Zuber use toe expression (4), in which $t^{1/2}$ is replaced by

$$(2\sigma)^{1/2}\gamma'^{1/4} g^{-1/4}\left[\frac{Jr\gamma'\gamma''(\Delta T)}{T_i(\gamma' - \gamma'')}\right]^{-3/4}.$$

Using for R_0 the expression (8), equation (13) takes a form similar to the equation (12). The power of Reynolds'number has a value near to 0,62, while in the characteristic length from Nusselt's number the appear the same quantities.

From our equations the conclusion may also be drawn that the dimmensionless groups used for the case of maximum flux are insufficient for correlating the experimental results in the whole domain of nucleate boiling. The supplementary dimensionless group $\frac{L}{R_0}$ depends, however, on a series of characteristics of the heating surface, as average depth of the cavities, average distance between cavities, distribution of cavity depths, — characteristics, for which there is, at present, no information available.

NOTATIONS

a = thermal diffusivity
c = specific heat of the liquid
D = diameter of a bubble
g = gravitational acceleration
J = mechanical equivalent of heat
r = latent heat of vaporation
R = radius of the bubble
R_0 = radius of the bubble at the moment when the bubble kreaks loose
t = time
T_l = temperature in the bulk of the liquid ($_0$K)
ΔT = superheating of the liquid
u_b = velocity in the resistance terme of equation (8)
α = heat transfer coefficient
θ = angle of contact between the bubble and the wall at the moment when the bubble breaks loose
σ = surface tension liquid-vapour
γ' = specific gravity of the liquid
γ'' = specific gravity of the vapour
ν = kinematic viscosity of the liquid
λ = thermal conductivity

$$Pr = \frac{\nu}{a}$$

$$Re = \frac{2R\frac{dR}{dt}}{\nu}$$

REFERENCES

1. *M. E. Ellion, Ph. D.* thesis, California Inst. Technol. 1953 (quoted in [2] and [4]).
2. *N. K. Forster* and *N. Zuber, A. I. Ch. E.* Journal 1, 531 (1955).
3. *N. Zuber, A. I. Ch. E.* Journal 3, 95 (1957).
4. *J. W. Westwater,* paper in „Advances in Chemical engineering"" edited by T. B. Drew and J. W. Hoopes, vol. I, Academic Press, 1956.
5. *E. Ruckenstein.* Buletinul Inst. Politehnic Bucureşti, XII, 113 (1959).
6. *J. W. Westwater* and *J. G. Santangelo* Ind. Eng. Chem *47,* 1605 (1955).
7. *N. K. Forster* and *N. Zuber, J. Appl.* Phys. *25,* 474 (1954).
8. *R. Cole, A. I. Ch.* E. Journal *6,* 533 (1960).
9. *E. Ruckenstein* and *G. Singer* (to be published).

ФИЗИЧЕСКИЙ МОДЕЛЬ ДЛЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ ДЛЯ КИПЕНИЯ С НУКЛЕАЦИЕЙ ОТ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Резюме)

В настоящей работе устанавливается на основе физического моделя для гидродинамического и нуклеационного процессов, теоретическое уравненне для коэффициента тёплопередачи.

A PHYSICAL MODEL FOR NUCLEATE BOILING HEAT TRANSFER FROM A HORIZONTAL SURFACE

(Summary)

In this paper an equation for the heat transfer coefficient from a horizontal surface is established on the bassis of a phlsical model for the nucleation and hydrodynamical processes.

UN MODÈLE PHYSIQUE POUR LE TRANSFERT DE CHALEUR DANS LE CAS DE L'ÉBULLITION NUCLEATE POUR UNE SURFACE HORRIZONTALE DE CHAUFFAGE

(Résumé)

Dans cet article on établit, en utilisant un modèle physique pour le processus hidrodynamique et celui de nucleation, une équation théorique pour le coefficient de transfer de chaleur.

EIN PHYSIKALISCHES MODELL FÜR DEN WÄRMEÜBERGANG AN EINER HORIZONTALEN FLÄCHE, BEIM SIEDEN MIT KEIMBILDUNG

(Zusammenfassung)

Auf Grund eines physikalischen Modells, wird eine theoretische Beziehung für die Wärmeübergangszahl aufgestellt, unter Berückisichtigung des hydrodinamischen wie auch des Keimbildungsvorganges.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

CHIMIE

ADSORBȚIA FIERULUI TRIVALENT PE CATIONIȚI POLISTIREN SULFONICI*

V. PĂRĂUȘANU, F. DANEȘ, O. LANDAUER și C. MATEESCU

Faptul că ionii trivalenți ai fierului se pot separa ușor prin metode chimice comune, a făcut ca adsorbția acestor ioni pe cationiți să fie puțin studiată.

Dar dacă purificarea grosieră de fier a soluțiilor este o operație simplă în general, separarea ultimelor cantități de fier, separarea fină cu alte cuvinte, este un proces foarte dificil de realizat.

Fierul trivalent rămîne aproape totdeauna în soluție, dizolvat sau sub formă de hidroxid coloidal, în cantități apreciabile pentru a împiedica mersul normal al unei separări analitice sau pentru a impurifica produsul final. Majoritatea produselor chimice industriale, chiar și cele de calitate, „pur" sau „pro analysi" conțin fier trivalent hidrolizat provenit din corodarea utilajelor, fier pe care nici filtrarea cu cărbune activ, operație folosită în mod obligatoriu în fabricarea reactivilor, nu reușește să-l îndepărteze complet.

Neajunsuri deosebite sînt provocate de fier și la dedurizarea industrială a apei cu schimbători de ioni. Micile cantități de fier din apa brută sînt reținute pe coloană foarte bine, așa încît regenerarea filtrelor, care se face de obicei cu NaCl, nu reușește decît cu greu să le scoată. Capacitatea de lucru, și deci randamentul coloanei, scade cu timpul foarte mult și fierul trivalent poate fi considerat, folosind o expresie analogă cu cea din cataliză, o „otravă" a schimbătorilor de ioni.

Pentru a cunoaște particularitățile adsorbției acestor ioni și spre a putea evita aceste inconveniente întîlnite în practică ne-am propus să studiem adsorbția la echilibru a ionilor trivalenți de fier pe schimbătorii de ioni cei mai frecvenți întrebuințați în practică, pe cationiți polistiren sulfonici.

Printre lucrările din literatură ce tratează această temă se remarcă lucrările lui Kraus și Moore [1], [2]. În cadrul unei metode cromato-

* Lucrare prezentată la cea de-a 6-a sesiune a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 17—18 decembrie 1960.

grafice autorii au arătat că în soluții clorhidrice fierul trivalent este relativ bine reținut de anioniți, cu condiția ca concentrația HCl să fie mai mare decît 0,5 N. Carleson [3] a arătat că totuși, chiar și din aceste medii clorhidrice fierul trivalent nu este total reținut de anionit, el apărînd și în fracțiunile ulterioare din eluat ce conțin alte elemente.

Vasisth și David [4] au studiat echilibrul Fe^{3+}—H^+ în medii azotice și perclorice. Ei au arătat că în soluții azotice cantitatea de fier trivalent adsorbită depășește capacitatea coloanei cu valori pînă la 10—15%. Interpretarea pe care acești autori au dat-o acestei particularități se baza pe ipoteza formării unor ioni complecși ai fierului de forma $[Fe(NO_3)]^{2+}$, sau reținerii pe coloană a $Fe(OH)_3$ coloidal. În condițiile lor de lucru, azotatul feric hidroliza, ceea ce se putea constata prin colorația coloanei în roșu.

Corelarea rezultatelor obținute de autori a fost făcută cu ajutorul relației obișnuite a legii maselor pentru schimbul triunivalent:

$$K = \frac{q_{Fe}}{q_H^3} \cdot \frac{C_H^3}{C_{Fe}} \qquad (1)$$

unde q și C reprezintă concentrațiile ionilor în fața solidă, respectiv lichidă.

Autorii obțin însă pe această cale constante de echilibru în mediul azotic ce variază între 2—20 iar în mediul percloric între 1,5—3. Acest lucru arată că relația (1) are aplicabilitate îndoielnică în cazurile studiate de acești autori.

Determinări experimentale. Pentru a analiza particularitățile schimbului ionic al fierului am studiat echilibrul Fe^{3+}—Na^+ în soluții de cloruri, la o concentrație globală a soluției cuprinsă între 0,05 și 0,8 N și la procente de Fe în soluție (echivalenți ion feric raportați la echivalenți totali) între 10—95%.

S-a lucrat cu $FeCl_3$ și NaCl p.a. Schimbătorii de ioni folosiți au fost Dowex 50, cationit poli-stiren sulfonic și anionit fenol-formaldehidic cu grupe active-amine terțiare-, de bazicitate medie. Soluțiile de $FeCl_3$+NaCl au fost acidulate cu HCl (0,001 N) pentru a evita hidroliza.

Schimbătorul, în cantitate de 10 g, a fost trecut într-o coloană de secțiune 0,95 cm^2. Capacitatea schimbătorului a fost determinată prin saturare cu o soluție de NaCl 5% și apoi s-a făcut eluarea cu HCl pentru cationit, și cu NaOH pentru anionit.

Soluțiile de $FeCl_3$ + NaCl au fost trecute prin coloana de schimb în forma Na cu o viteză de 5—10 cm^3/min., pînă la stabilirea echilibrului. Coloana s-a spălat apoi cu apă distilată. După aceea s-a trecut prin coloană ~ 2 litri acid sulfuric 10%, pentru a scoate fierul și sodiul. În eluatul sulfuric s-a determinat cantitatea de fier și de sodiu reținută de coloană. După eluare, s-a regenerat coloana cu ajutorul unei soluții de NaCl 5%.

Dozarea Fe s-a făcut iodometric cu tiosulfat de sodiu, iar a sodiului s-a determinat flam-fotometric.

În cîteva cazuri, coloana a fost spălată cu eter în loc de apă, pentru a evita hidroliza unor eventuali compuși ai fierului cu clorul fixați pe coloană, iar în eluatul sulfuric s-a căutat clorul care n-a fost detectat în nici una din probe.

În alte cazuri, după spălarea coloanei cu apă pentru îndepărtarea soluției rămase între granule, s-a trecut prin coloană eter pentru a extrage eventualii compuși ferici solubili care s-ar fi fixat pe schimbător prin sorbție moleculară. În eterul trecut prin coloană s-a căutat fierul, care de asemenea n-a fost niciodată prezent.

Soluțiile de $FeCl_3$ + NaCl, acidulate cu HCl N/1000 nu hidrolizează nici înainte și nici după trecerea prin coloană. Acest lucru a fost constatat colorimetric, filtrînd aceste soluții cu cărbune activ și comparînd intensitatea colorațiilor soluțiilor înainte și după filtrare.

În cîteva probe s-a căutat în eluat fierul bivalent care de asemenea n-a fost detectat.

Cationitul poli-stiren sulfonic în forma Fe^{3+} are o culoare neagră, fără nuanțe roșii-gălbui care ar indica prezența $Fe(OH)_3$. Pentru siguranță, cationitul în forma Fe^{3+} a fost scos din coloană la unele determinări și spălat cu apă. Nu s-a constatat în apă prezența Fe, nici prin apariția unei colorații gălbui și nici prin dozarea analitică.

Trecerea soluțiilor peste anionit s-a făcut în același mod. Prin coloana de anionit în forma Cl s-a trecut o soluție de $FeCl_3$ 0,05 N, ușor acidulată cu HCl N/1000. După spălare și eluare cu NaOH 2% s-a căutat fierul în eluat, dar nu s-a găsit. Aceleași rezultate s-au obținut și în cazul în care s-a trecut pe coloană o soluție de concentrație 0,5 N, ce conținea 10% Fe^{3+} și 90% Na^+.

Discuția rezultatelor. În tabelul 1 sînt prezentate datele care reprezintă variația cantității de fier adsorbită (Y_{Fe}) în funcție de concentrația totală a soluției (C_0) și fracția echivalentă a fierului din soluție (X_{Fe}). În tabelul 2 sînt prezentate datele referitoare la adsorbția sodiului din soluție (Y_{Na}) în funcție de C_0 și X_{Na}.

Tabelul 1

$$Y_{Fe} = q_{Fe}/q_0$$

$\frac{C_0}{X_{Fe}}$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8
0,1	—	1,73	1,725	1,725	1,72	1.70
0,25	1,725	1,725	1,713	1,695	1,65	1,56
0,5	1,72	1,705	1,650	1,58	1,39	1,085
0,75	1,71	1,66	1,525	1,33	0,96	0,53
0,9	1,685	1,595	1,330	1,05	0,59	0,26
0,95	1,67	1,54	1,205	0,66	0,425	0,18

Tabelul 2

q_{Na}/q_0

C_0 / X_{Na}	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8
0,1	—	$5,3\cdot10^{-4}$	$1,68\cdot10^{-3}$	$3,4\cdot10^{-3}$	$7,8\cdot10^{-3}$	$1,68\cdot10$
0,25	$1,1\cdot10^{-3}$	$3,8\cdot10^{-3}$	$1,1\cdot10^{-2}$	$2,2\cdot10^{-2}$	$5,6\cdot10^{-2}$	0,106
0,5	$5,1\cdot10^{-3}$	$1,6\cdot10^{-2}$	$5\cdot10^{-2}$	$9,5\cdot19^{-2}$	0,22	0,395
0,75	$1,43\cdot10^{-2}$	$4,5\cdot10^{-2}$	0,135	0,245	0,47	0,72
0,9	$2,8\cdot10^{-2}$	$8,5\cdot10^{-2}$	0,245	0,42	0,68	0,875
0,95	$3,9\cdot10^{-2}$	0,117	0,31	0,52	0,78	0,915

Aceleași rezultate sînt reprezentate grafic în fig. 1 și 2.

Din analiza acestor date se observă că adsorbția fierului este defavorizată de creșterea concentrației globale a soluției. La concentrații mai mari (0,8 N) $Y_{Fe} \sim X_{Fe}$, excepție făcînd numai domeniile extreme pentru care $X_{Fe} < 0,1$ sau $> 0,9$.

Adsorbția fierului crește de măsură ce crește X_{Fe}, dar variațiile sînt foarte mici la concentrații globale scăzute.

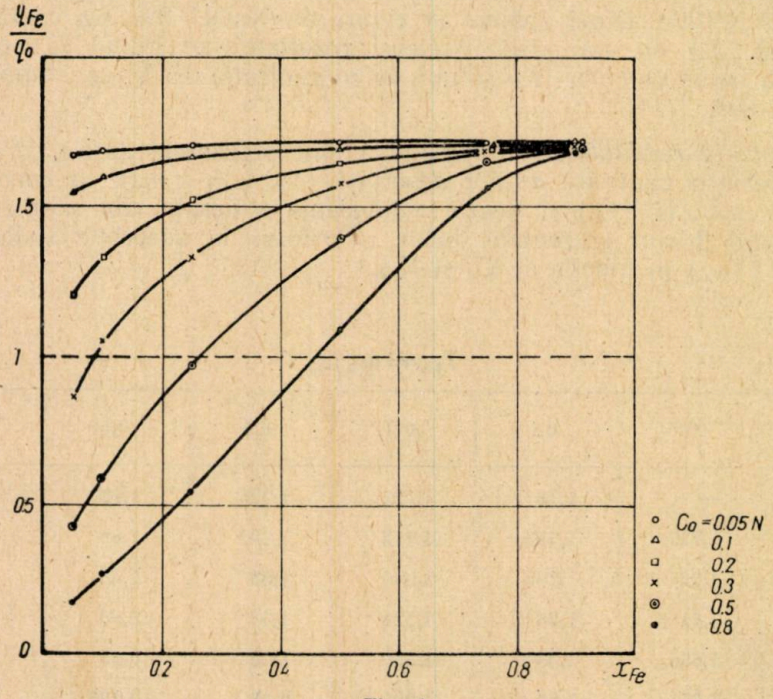


Fig. 1

Se observă în toate cazurile că pe coloană se adsoarbe mai mult fier și sodiu decît ar corespunde capacității de schimb a coloanei $q_{Na} + q_{Fe}$ este apreciabil mai mare decît q_0, iar uneori numai q_{Fe} depășește valoarea lui q_0.

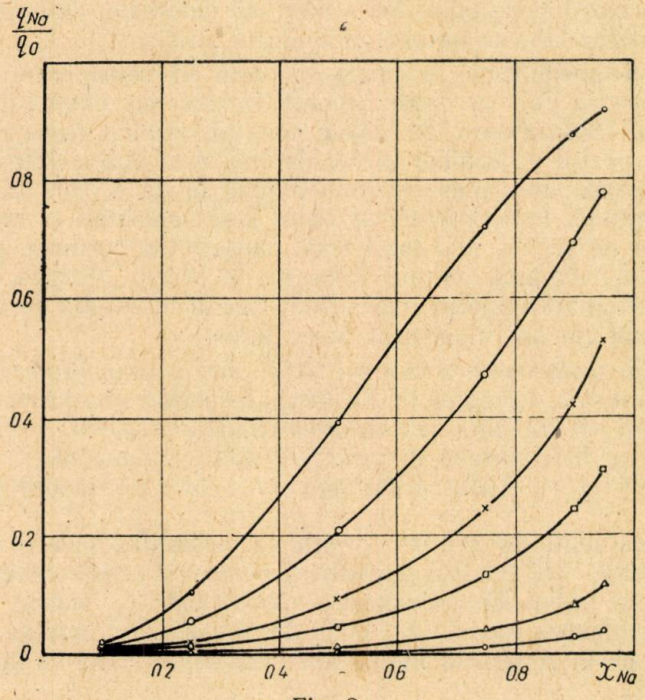


Fig. 2

Din datele expuse în tabelul 3 se observă că prin intermediul legii acțiunii maselor aplicabilă pentru schimbul tri-univalent (1) nu se poate face corelarea datelor de echilibru decît cel mult pentru porțiunile ce corespund unor valori pentru $X_{Na} \geq 0{,}9$.

Tabelul 3

X_{Na}	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95
$\frac{q_{Fe}}{q_{Na}} \cdot \frac{C_{Na}^3}{C_{Fe}}$	1180	820	95	3,1	1,9	2,0
$\frac{1-q_{Na}}{q_{Na}^3} \cdot \frac{C_{Na}^3}{C_{Fe}}$	680	47	5,5	1,75	1,06	1,13
$\frac{\left(\frac{2}{3} q_{Fe} + q_{Na} - q_0\right) q_{(Na)}^3}{\left(q_0 - q_{Na} - \frac{1}{2} q_{Fe}\right)^2} \cdot \frac{(C_{Fe})}{(C_{Na})^6}$	2,50	2,31	2,46	2,51	2,40	2,97

Capacitatea de schimb a unui ionit nu este o mărime variabilă deoarece această mărime depinde numai de concentrația în rășină a grupelor active. Constanța capacității de schimb a ionitului folosit a fost verificată pentru ionii Fe^{2+}, Cd^{2+}, Zn^{2+}, Co^{2+}, Ni^{2+}, Cu^{2+}, Na^{+}. Comportarea aparent anormală în cazul schimbului $Na - Fe^{3+}$ se datorește, desigur, unor particularități determinate de natura cationitului feric.

O primă posibilitate ce poate fi luată în considerare o constituie reducerea Fe^{3+} la Fe^{2+} de către cationit deoarece se știe că mulți cationiți au proprietăți reducătoare. În aceste condiții, un ion feros putînd satura numai două poziții de schimb în loc de trei, s-ar obține într-adevăr capacități ale coloanei mai mari, și anume pînă la de 1,5 ori mai mari decît valoarea normală. Experimental se obțin însă capacități și mai mari decît 1,5 și anume de 1,7 ori mai mari decît capacitatea normală, pe care chiar dacă admitem formarea ionului feros nu le putem justifica. În afară de aceasta, determinările analitice au arătat că atît în soluția de $FeCl_3 + NaCl$, cît și în eluat nu s-a identificat ionul feros.

Adsorbția moleculară a clorurii ferice sau a unui produs de hidroliză al ei pe schimbător, formarea de $Fe(OH)_3$ coloidal reținut fizic sau mecanic în coloană, nu pot constitui de asemenea explicarea acestei comportări deoarece soluția nu hidrolizează în condițiile date, coloana nu se colorează în nuanțe $Fe(OH)_3$ și spălarea cu apă sau eter nu modifică compoziția coloanei.

Saturarea ionitului printr-o eventuală adsorbție moleculară nu poate sta la baza explicării acestui fenomen deoarece în aceste condiții adsorbția moleculară ar trebui să compenseze modificările ce survin în adsorbția ionică și schimbarea raportului Fe-Na din soluție ar trebui să atragă după sine modificări în repartiția Fe-Na din faza solidă, ceea ce nu se constată experimental.

Dacă excesul de fier reținut pe coloană s-ar datora adsorbției moleculare, atunci concentrația în granulă a fierului fixat prin schimb ionic s-ar putea calcula ca diferență între capacitatea cationitului și concentrația în granulă a sodiului: $q_{Fe} = q_0 - q_{Na}$, și ar trebui să verifice legea schimbului mono-trivalent:

$$K = \frac{(q_0 - q_{Na})}{(q_{Na})^3} \frac{(C_{Na})^3}{(C_{Fe})} \qquad (2)$$

În a doua coloană din tabelul 3 se prezintă produsul din partea dreaptă a relației (2) în funcție de X, la $C_0 = 0{,}2$ N și se vede că valoarea acestui produs este departe de a fi constantă, variind între 1 și 700.

În literatură se citează prezența în soluțiile de săruri ferice a unor ioni complecși de tipul $[Fe(OH)]^{2+}$ și în soluții de azotați ioni de forma $(FeNO_3)^{2+}$ și $[Fe(NO_3)_2]^{+}$ [5, 6]. În soluții de cloruri se semnalează prezența ionilor $FeCl_2^{+}$ și $FeCl^{2+}$ iar medii clorhidrice anioni complecși de forma $FeCl_4^{+}$ etc. [7, 8].

În condițiile în care am lucrat noi nu se formează complecși anionici ai fierului, lucru dovedit de faptul că fierul din soluțiile de

$FeCl_3 + NaCl$ n-a fost reținut pe anioniți. Din datele semnalate de Moore, Kraus și Carleson [1, 2, 3], reiese că anionii complecși ai fierului se formează în medii puternic acide ce corespund unui mare exces de ioni Cl^- față de ioni Fe^{3+}.

In concluzie, în soluțiile de $FeCl_3 + NaCl$ pot subsista numai ioni complecși ai fierului pozitivi, sau eventual complecși neutri. Acești complecși pot avea ca ion coordonator numai ioni Fe^{3+}, acesta fiind singurul dintre ionii din soluție cu valență și posibilitatea de coordinare > 1. Complecșii care se formează principial din Fe^{3+}, Cl^- și OH^-, ca și posibilitățile de transformare dintre ei sînt prezentați în fig. 3.

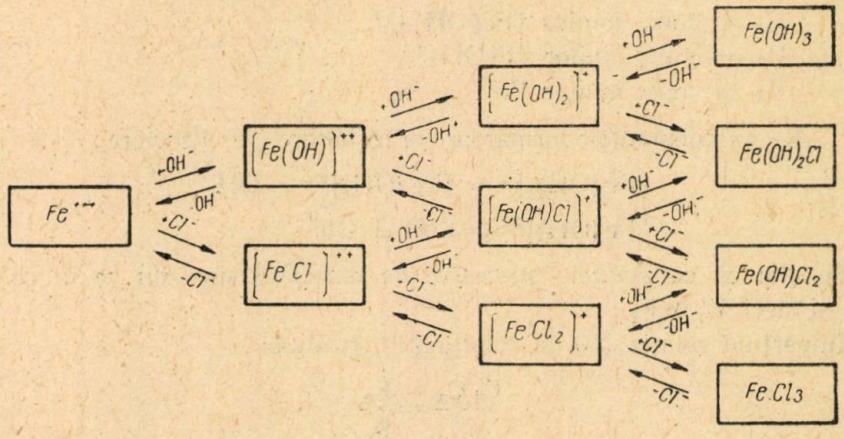


Fig. 3

Pe fiecare verticală din fig. 3, ionii au același număr de sarcini, respectiv 0, 1, 2, 3. Transformările prin adiție de ioni OH^- provoacă deplasări spre dreapta sus, iar adiția de ioni Cl^- deplasează sistemul spre dreapta jos.

Deoarece în soluție nu apar faze solide putem afirma că în sistem nu se formează complecși de forma: $Fe(OH)_3$, $Fe(OH)_2Cl$ și $Fe(OH)Cl_2$.

Constatarea experimentală că pe coloană nu se reține clorul alături de fier constituie un indiciu că nici complecși de forma $FeCl^{2+}$, $FeCl_2^+$ și $[Fe(OH)Cl]^+$ nu se formează în cantități decelabile.

Trebuie deci să luăm în considerare ca prezenți în soluție numai $FeCl_3$ nedisociată și următorii cationi: Fe^{3+}, $(FeOH)^{2+}$ și $[Fe(OH)_2]^+$.

Determinările de pH au arătat că concentrația ionilor de hidrogen depășește numai cu puțin concentrația acidului clorhidric din soluție. Soluția fiind neutră în ansamblu, rezultă că ionii $(FeOH)^{2+}$ și $[Fe(OH)_2]^+$ se află în cantități foarte mici în raport cu concentrația clorurii ferice nedisociate.

În cazul că în soluție ar exista numai ionul Fe^{3+}, valoarea maximă a lui Y_{Fe} ar fi 1. Pentru ionii $(FeOH)^{2+}$ și $[Fe(OH)_2]^+$ ar corespunde valori maxime ale lui Y_{Fe} egale cu 1,5 și respectiv cu 3. Experimental s-a

constatat, așa cum se vede în tabelul 1, valori pentru Y_{Fe} pînă la 1,7, ceea ce implică prezența în soluție a unor cantități apreciabile de ioni $[Fe(OH)_2]^+$ în comparație cu concentrația ionilor $(FeOH)^{2+}$ și Fe^{3+}.

Concentrațiile celor trei cationi de mai sus sînt legate de concentrațiile ionilor OH^- prin relațiile:

$$C_1 K_1 = C_2 C' \tag{3}$$

și:

$$C_2 K_2 = C_3 C' \tag{4}$$

în care: C' = conc. ionilor OH^-
C_1 = conc. ionilor $[Fe(OH)_2]^+$
C_2 = conc. ionilor $(FeOH)^{2+}$
C_3 = conc. ionilor Fe^{3+}

iar K_1, K_2 = constantele următoarelor echilibre de disociere:

$$[Fe(OH)_2]^+ \rightleftharpoons [Fe(OH)]^{2+} + OH^-$$

$$[Fe(OH)]^{2+} \rightleftharpoons Fe^{3+} + OH^-$$

Se știe că constantele succesive de disociere sînt din ce în ce mai mici, și deci $K_1 \gg K_2$.

Împărțind relația (3) la relația (4), rezultă:

$$\frac{C_1 C_3}{C_2^2} = \frac{K_2}{K_1} \tag{5}$$

și deci conform celor arătate:

$$\frac{C_1 C_3}{C_2^2} \ll 1 \quad \text{sau} \quad \frac{C_3}{C_2} \ll \frac{C_2}{C_1} \tag{6}$$

După cum s-a subliniat mai sus, concentrația C_1 este de ordinul de mărime a lui C_2 și în consecință $C_3 \ll C_2$.

În discuția echilibrelor de schimb vom lua deci în considerare numai concentrațiile C_1 și C_2 corespunzătoare ionilor $[Fe(OH)_2]^+$ și $[Fe(OH)]^{2+}$ și C_a ce corespunde concentrației clorurii ferice nedisociată și care pe baza considerentelor făcute mai sus este mult mai mare decît C_1 și C_2. Mai există în soluție ioni de Cl^-, OH^-, H^+, Na^+ ale căror concentrații le notăm cu: C_{Cl}, C', C_H, C_{Na}, iar concentrația inițială a HCl o notăm cu B.

Considerăm clorura de sodiu și acidul clorhidric total disociate. Dacă C_0 este concentrația totală a soluției în $FeCl_3$ și NaCl și X fracția echivalentă a sodiului în această soluție, atunci concentrația globală a $FeCl_3$ va fi $C_0(1-X)/3$, iar concentrația NaCl va fi C_0X.

Între concentrațiile: C_1, C_2, C_a, C_{Cl}, C', C_{Na}, se pot stabili următoarele relații:

din bilanțul Fe: $C_a + C_1 + C_2 = \frac{C_0 (1 - X)}{3}$ (7)

„ „ Cl: $C_{Cl} + 3 C_a = B + C_0$ (8)

„ „ Na: $C_{Na} = C_0 X$ (9)

„ neutralitatea soluției: $C_{Na} + C_H + C_1 + 2 C_2 = C' + C_{Cl}$ (10)

„ echilibrul: $FeCl_3 + OH^- \rightleftharpoons FeOH^{2+} + 3\ Cl^-$:

$$K = \frac{C_2 \cdot C_{Cl}^3}{C_a \cdot C'} \quad (11)$$

„ echilibrul: $FeOH^{2+} + OH^- \rightleftharpoons Fe(OH)_2^+$

$$K' = C_1 / C_2\ C' \quad (12)$$

„ echilibrul de disociere al apei:

$$C'\ C_H = P \quad (13)$$

„ ecuațiile (7) și (8) rezultă:

$$C_{Cl} = C_0 X + 3 (C_1 + C_2) \quad (14)$$

In ecuația (10), C' fiind foarte mic în raport cu C_{Cl}, poate fi neglijat și atunci avem:

$$C_H = B + C_2 + 2 C_1 + B \quad (15)$$

Deoarece $C_1, C_2 \ll C_0$, din ecuația (14) rezultă:

$$C_{Cl} = C_0 X \quad (16)$$

iar din ecuația (17), pentru aceleași motive,

$$C_a = \frac{C_0 (1 - X)}{3} \quad (17)$$

Inlocuind pe C' cu P/C_H și ținînd seama de relațiile (15) și (17), relația (12) devine:

$$K' = \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{P} (B + C_2 + 2 C_1) \quad (17')$$

de unde scoatem valoarea lui C_2:

$$C_2 = \frac{C_1 (B + 2 C_1)}{K' P - C_1} \quad (18)$$

Inlocuind valorile obținute pentru C', C_H, C_2 C_{Cl} și C_a din relațiile (11), (13), (15), (16) și (17) se obține:

$$\frac{K}{3K'} \frac{(1 - X)}{C_0^2 X^3} = \frac{C_1 (B + 2 C_1)^2}{(K' P - C_1)^2} \quad (19)$$

Notînd fracțiile echivalente în rășină ale ionilor $[Fe(OH)_2]^+$, $[Fe(OH)]^{2+}$ și Na^+ cu Y_1, Y_2 și Y_{Na^+}, iar cu K_1 și K_2 constantele de echilibru ale schimbului ionic, se obține:

$$Y_{Na} = K_2 \frac{C_0 X}{C_1} Y_1^2 \tag{20}$$

și

$$Y_2 = \frac{2 K_1 q_0 C_2}{C_1^2} Y_1$$

de unde:

$$Y_2 = 2 K_1 q_0 \frac{B + 2 C_1}{C_1 (K' P - C_1)} Y_1^2 \tag{21}$$

Înlocuind pe C_1 din relația (20) în relația (21) și apoi în relația (19), se obține:

$$\frac{C_0^5 X^6}{(1 - X)} \cdot \frac{Y_2^2}{Y_{Na}^3 \cdot Y_1} = \frac{4}{3} q_0^2 \frac{K_1^2 K}{K_2^3 K'} \tag{22}$$

În membrul II al ecuației (21) avem numai constante, iar în membrul I, mărimi accesibile măsurătorilor experimentale.

$$Y_{Na} + Y_1 + Y_2 = 1$$

$$3 Y_1 + \frac{2}{3} Y_2 = Y_{Fe} \qquad (Y_{Fe} = q_{Fe}/q_0)$$

și mai departe rezultă:

$$Y_1 = \frac{3}{2} Y_{Fe} + Y_{Na} - 1 \tag{23}$$

$$Y_2 = 2\left(1 - Y_{Na} - \frac{1}{3} Y_{Fe}\right) \tag{24}$$

iar final, se obține:

$$\frac{C_{Na}^6}{C_{Fe}} = \frac{C_0^5 X^6}{1 - X} \sim \frac{(2/3\, Y_{Fe} + Y_{Na} - 1)\,(Y_{Na})^3}{(1 - Y_{Na} - 1/3\, Y_{Fe})^2} \tag{25}$$

Din datele expuse în aliniatul 3 din tabelul 3 și reprezentate grafic în fig. 4, se poate observa că relația (25) se verifică experimental, ceea ce confirmă ipotezele ce au stat la baza calculelor.

Experiența arată că mărirea concentrației HCl nu influențează sensibil echilibrul și în acest caz B din ecuația (19) poate fi neglijat față de C_1.

De asemenea, tot experimental se constată că $Y_2 \sim Y_1^2$, la orice valoare a concentrației C_0 și a fracției molare, X; deci, la numitorul relației (21), $C_1 \ll K^* P$ și în consecință, relațiile (19), (20) și (21) devin:

$$\frac{KK' P^2}{12}\left(\frac{1-X}{C_0^2 X^3}\right) = C_1^3 \tag{26}$$

$$Y_{Na} = K_2 \frac{C_0 X}{C_1} Y_1 \tag{27}$$

$$Y_2 = \frac{4 K_1 q_0}{K'P} \cdot Y_1^2 \tag{28}$$

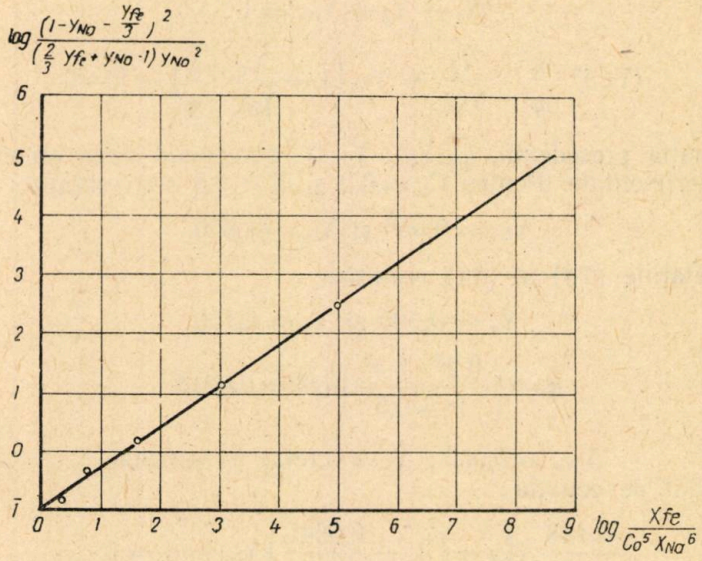


Fig. 4

Cu ajutorul relațiilor (26), (27) și (28) se pot prevedea cantitățile de fier și sodiu ce vor fi reținute pe coloană, la orice compoziție a soluției.

Pentru anumite valori ale termenilor: $\overline{C}_0$, $\overline{X}$, $\overline{Y}_{Na}$, $\overline{Y}$, și $\overline{Y}_2$ vom avea:

$$\frac{Y_{Na}}{\overline{Y}_{Na}} = \frac{C_0 X}{\overline{C}_0 \overline{X}} \cdot \frac{Y_1}{\overline{Y}_1}\left[\frac{1-\overline{X}}{1-X} \cdot \frac{C_0^2 \cdot X^3}{\overline{C}_0^2 \cdot \overline{X}^3}\right]^{1/3} \longrightarrow Y_1 = Y_{Na} \frac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_{Na}} \cdot \frac{\left(\frac{\overline{C}_0^5 \overline{X}^6}{1-\overline{X}}\right)^{1/3}}{\left(\frac{C_0^5 X^6}{1-X}\right)^{1/3}}$$

$$Y_2 = Y_1^2 \frac{\overline{Y}_2}{\overline{Y}_1^2} Y_{Na}^2 \cdot \frac{\overline{Y}_2}{Y_{Na}^2} \cdot \frac{\left(\frac{\overline{C}_0^5 \overline{X}^6}{1-\overline{X}}\right)^{2/3}}{\left(\frac{C_0^5 X^6}{1-X}\right)^{2/3}}$$

sau notînd produsul:

$$\frac{C_0^5 X^6}{1-X} = \varphi^3$$

$$Y_1 = Y_{Na} \cdot \frac{\overline{Y}_1}{Y_{Na}} \cdot \frac{\overline{\varphi}}{\varphi}$$

$$Y_2 = Y_{Na}^2 \cdot \frac{\overline{Y}_2}{\overline{Y}_{Na}^2} \cdot \frac{\overline{\varphi}}{\varphi}$$

dar:

$$Y_1 + Y_2 + Y_{Na} = 1$$

$$(Y_{Na})^2 \cdot \frac{\overline{\varphi}^2}{\varphi^2} \cdot \frac{\overline{Y}_2}{\overline{Y}_{Na}^2} + Y_{Na}\left(1 + \frac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_{Na}} \cdot \frac{\overline{\varphi}}{\varphi}\right) - 1 = 0 \qquad (29)$$

În ecuația precedentă, $\overline{\varphi}$, $\overline{Y}_{Na}$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Y}$, corespund unei anumite determinări experimentale. Pentru $C_0 = 0{,}2$ și $X = 0{,}5$ s-au obținut:

$$Y_{Na} = 0{,}050 \text{ și } Y_{Fe} = 1{,}650.$$

Din relațiile (23) și (24) rezultă:

$$Y_2 = 0{,}800 \text{ și } Y_1 = 0{,}150$$

$$\overline{\varphi} = \left(\frac{0{,}2^5 \cdot 0{,}5^6}{1-0{,}5}\right) 1/3 = 0{,}0215$$

$$\overline{Y}_{Na} = 0{,}050\,; \quad \overline{Y}_1 = 0{,}150\,; \quad \overline{Y}_2 = 0{,}800$$

Y_{Na} va fi dat de ecuația:

$$\frac{0{,}148}{\varphi^2} Y_{Na}^2 + \left(1 + \frac{0{,}0645}{\varphi}\right) Y_{Na} - 1 = 0 \qquad (30)$$

Dacă se cunoaște Y_{Na} se poate calcula apoi:

$$Y_{Fe} = \frac{3}{2} Y_2 + 3 Y_1 =$$

$$= 3 Y_1 + \frac{3}{2}(1 - Y_1 - Y_{Na}) = \frac{3}{2}(1 + Y_1 - Y_{Na})$$

sau:

$$Y_{Fe} = 1{,}5 + Y_{Na}\left(-1{,}5 + \frac{0{,}0967}{\varphi}\right) \qquad (31)$$

Cu ecuația (30) și (31) se pot aprecia deci anticipat valorile adsorbției fierului și sodiului din soluții, atunci cînd se cunoaște concentrația și compoziția soluției.

În tabelul 4 se compară, pentru concentrația de 0,5 N, datele experimentale referitoare la Y_{Fe} și Y_{Na} și datele calculate cu ecuațiile (30) și (31). Concordanța poate fi considerată mulțumitoare..

Tabelul 4

X_{Na}	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95
Y_{Na} experimental	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-2}$	0,22	0,47	0,68	0,78
Y_{Na} teoretic	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-2}$	0,208	0,470	0,697	0,75
Y_{Fe} experimental	1,72	1,65	1,39	0,96	0,59	0,425
Y_{Fe} teoretic	1,73	1,62	1,35	0,95	0,60	0,405

Laboratorul de Electrochimie din Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Moore, Kraus:* J. Am. Chem. Soc., *74,* 843, (1952).
2. *Kraus, Moore:* J. Am. Chem. Soc., *75,* 1460 (1953).
3. *Carleson:* Acta. Chim. Scand., *8,* 1873 (1954).
4. *Vasisth, David:* A. I. Ch. Journal, *5,* nr. 3, (1959).
5. *Lamb:* J. Am. Chem. Soc., *60,* 977 (1938).
6. *Sykes:* J. Chem. Soc., 124, (1952).
7. *Rabinowitch, Stockmeyer:* J. Am. Chem. Soc., *64,* 335 (1942).
8. *Bobtelsky, Spiegler:* J. Chem. Soc., *143,* (1949).

АДСОРБЦИЯ ТРЕХВАЛЕНТНОГО ЖЕЛЕЗА НА ПОЛИСТИРЕН—СУЛЬФОНОВЫХ ИОНООБМЕННЫХ ВЕЩЕСТВАХ

(Резюме)

В работе исследуется адсорбция трехвалёнтного железа на полистирен-сульфоновых ионообменных веществах, из водных солянокислых растворов. Установлено, что трехвалентное железо задерживается на колонке в количестве, превышающем на 70% ее обменную способность.

Предполагается, что в этих растворах существуют катионовые комплексные соединения типа $[Fe(OH)_2]^+$ и $[Fe(OH)]^{2+}$ определяющие сообенности адсорбции.

Устанавливаются математические уравнения выражающие количественную сторону явления обмена ионов в данных условиях.

THE ADSORPTION OF THREEVALID IRON ON IONEXCHANGERS OF SULFONIC POLYSTYRENE

(Summary)

There is studied the adsorption of threevalid iron from aqueous chlorhidrical solutions, on sulfonic polystyrene ion exchangers. It has been established that the threevalid iron is retained on the column in quantities greater with 70% than the exchanging performance of the column. There is supposed the existence in these solutions of cationic complexes of the typs $[Fe(OH)_2]^+$ and $[Fe(OH)]^{2+}$ which determine the particularities of the adsorbtion.

There are established mathematical equations which reflect the quantitative aspects of the ionexchange proceeding in these conditions.

L'ADSORBTION DU FER TRIVALENT SUR LES ECHANGEURS D'IONS POLISTYRÈNE-SULPHONIQUES

(Résumé)

On a étudié l'adsorbtion des ions fériques des solutions aquo-chlorhydriques sur les échangeurs d'ions polistyrene-sulphoniques. On a constaté que le fer trivalent est retenu sur la colonne en quantités dépassant de 70%. la capacité d'échange de la colonne.

On suppose l'existence dans ces solutions des complexes cationiques de type: $[Fe(OH)_2]^+$ et $[Fe(OH)]^{2+}$, qui detérminent les particularités de l'adsorbtion.

On a établi des équations qui décrivent les aspects quantitatifs du phenoméne d'échange ionique dans ces conditions.

DIE ADSORBTION DES DREIWERTIGEN EISENS AN IONENAUSTAUSCHERN VON SULFONIERTEM POLYSTYROL

(Zusammenfassung)

Man studiert die Adsorption des dreiwertigen Eisens aus wässerigen Salzsäurelösungen, an Ionenaustauschern von sulfoniertem polystyrol. Es wird festgestellt dass das dreiwertige Eisen in der Austauschkolonne in Mengen festgehalten wird, die um 70% grösser sind als die Austauschkapazität der Kolonne.

Man vermutet das Vorhandensein in solchen Lösungen vor Kationkomplexen der Form: $[Fe(OH)_2]^+$ und $[Fe(OH)]^{2+}$, die die Eigenheiten der Adsorption bestimmen.

Es werden mathematische Gleichungen aufgestellt die die quantitativen Bestimmungen des Ionenaustauschprozesses unter diesen Bedingungen wiedergeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

REZISTENȚA MATERIALELOR

KERBWIRKUNGEN BEI HOHEN TEMPERATUREN *)

von GHEORGHE BUZDUGAN, DIONISIE CRAIFĂLEANU, VERONEL ANTONESCU, TOMA PANĂ, VASILICA POSTELNICU

1. EINFÜHRUNG

Die Fachliteratur enthält zahlreiche Angaben über die Erscheinung der Kerbwirkung bei statischer und dynamischer Belastung im elastischen Zustand [1]. Es wird gezeigt, dass sich bei zähen Metallen nach Überschreiten der Fliessgrenze der Spannungszustand ändert und die Kerbwirkung durch andere kompliziertere Erscheinungen abgelöst wird.

In den letzten Jahren wurden die Ergebnisse von Zerreissversuchen an gekerbten Probestäben bei sehr niedrigen Temperaturen (bis zu —253°C) veröffentlicht [5]; andere Arbeiten behandelten das Verhalten von gekerbten Stäben bei veränderlicher Belastung und hohen Temperaturen [9].

Wir haben uns das Studium der Kerbwirkung in Zugstäben kreisförmigen Querschnitts bei hohen Temperaturen, quantitativ beim Zerreissen des Stabes gemessen, zur Aufgabe gestellt.

Im vorhinein wurde die Änderung der Zugfestigkeit der untersuchten Stähle mit der Temperatur bestimmt. Es wurden drei genormte rumänische Stahlsorten untersucht, und zwar OL 50, OLC 45 und OLC 60, und die Probestäbe für jedes Material aus einer einzigen Charge hergestellt. Diese Stähle entsprechen folgenden sowjetischen und deutschen Stahlmarken:

OL 50 — St. 5 nach GOST 380-50 bzw. St. 50.11, DIN 1611
OLC 45 — 45 nach GOST 1050-52 bzw. C 45, DIN 17200 und 17210
OLC 60 — 60 nach GOST 1050-52 bzw. C 60, DIN 17200 und 17210.

Bild 1 zeigt die Mikrostruktur für OL 50, Bild 2 für OLC 45 und Bild 3 für OLC 60.

Alle Fotogafien sind im Verhältnis 100 : 1 vergrössert, der Angriff wurde mit Nital durchgeführt (2% HNO_3 in Äthylalkohol).

* Vorgetragen bei der Wissenschaftichen Tagung der Technischen Hochschule Bukarest im Dezember 1960.

2. VERSUCHSBEDINGUNGEN

Die Zugversuche wurden auf einer 30 Tonnen-Universalprüfmaschine angestellt und die Erhitzung im elektrischen Ofen durchgeführt. Die Temperatur wurde in den Grenzen von $\pm$ 5° mit Hilfe eines industriellen Reglers konstant gehalten. Der Ofen wurde vorher auf die vorgeschriebene Temperatur gebracht und dann der Probestab eingeführt, der 45 Minuten lang ohne Belastung erwärmt wurde.

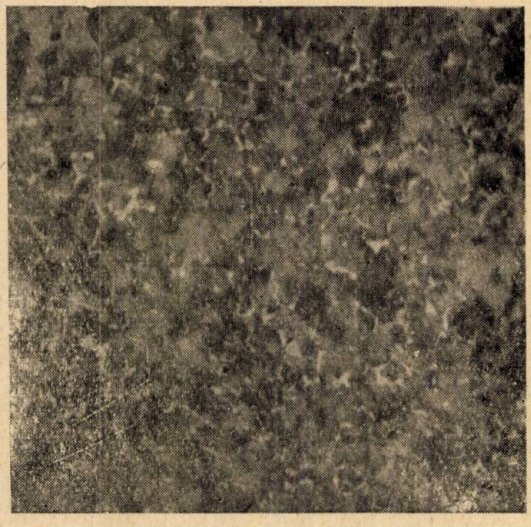


Fig. 1

Die Belastungsgeschwindigkeit der Maschine wurde so gewählt, dass das Zerreissen des Stabes 6—8 Minuten nach Versuchsbeginn stattfand. Auf diese Weise wurde versucht, die Wirkung der Versuchsdauer auf die Ergebnisse auszuschalten, die bei Wärmeversuchen beträchtlich ist [4]. Da die Versuchsdauer ziemlich kurz war, wurde gleichzeitig auch die Möglichkeit der Temperaturänderung während des Versuches ausgeschaltet.

Für jede Stahlsorte wurden ungefähr 150 Probestäbe, gruppiert in 6 Serien von je 25 Stück, untersucht. Die erste Serie bestand aus glatten Stäben der in Bild 4a gezeigten Form ; die darauffolgenden Serien bestanden aus gekerbten Stäben der Form wie in Bild 4b mit folgenden Krümmungsradien : $r = 0{,}8$; 1,6 ; 3,2 ; 4,8 und 6,4 mm. Da der Mindestdurchmesser der gekerbten Probe $d = 8$ mm ist, wurden die Verhältnisse $r/d = 0{,}1$; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 und 0,8 erzielt.

Die Proben waren feingedreht und an der Kerbstelle mit Schmirgel poliert.

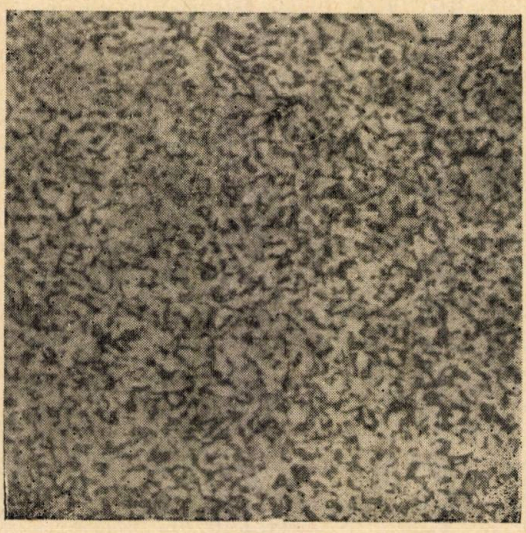


Fig. 2

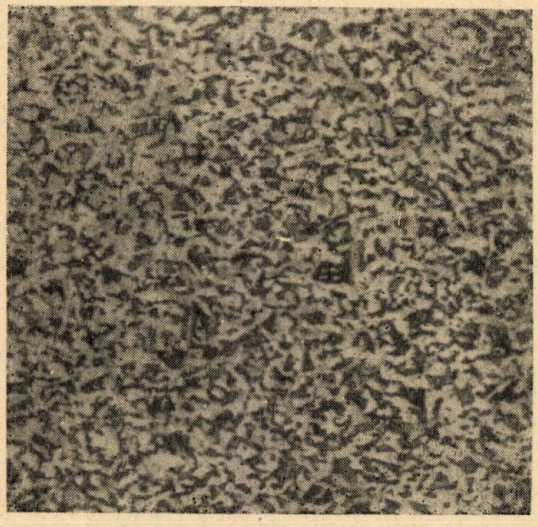


Fig. 3

Für jede Probenserie wurden Versuche bei einer Temperatur von 20°C und dann-zwischen 150 und 500°C-bei von 50° zu 50° ansteigenden Temperaturen ausgeführt. Für jeden Probestab wurden Zerreisskraft und temperatur sowie Versuchsdauer notiert.

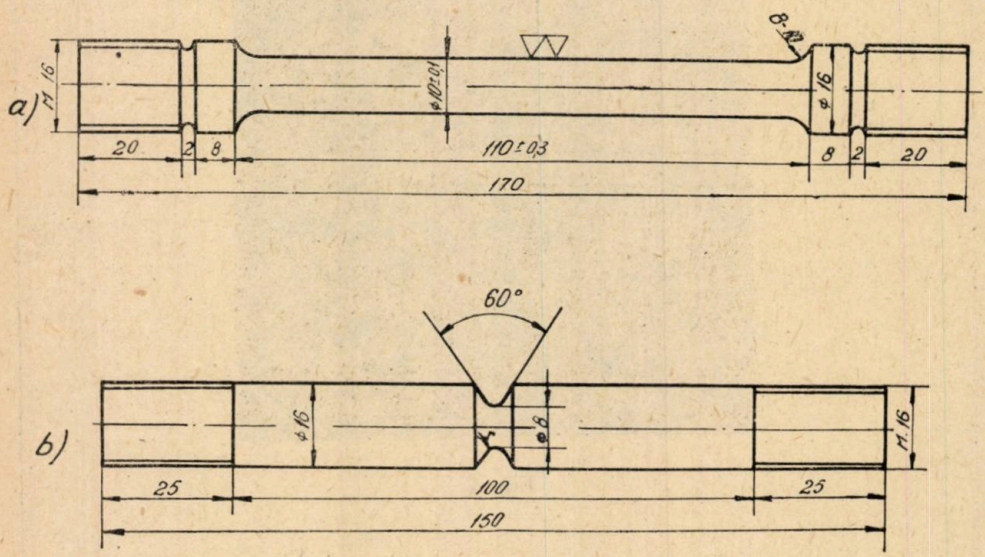


Fig. 4

3. ÄNDERUNG DER ZUGFSTIGKEIT MIT DER TEMPERATUR

Die Versuche mit Probestäben der Type aus Bild 4a ergaben eine Änderung der Zugfestigkeit mit der Temperatur, die aus den in Bild 5 wierdergegebenen Diagrammen hervorgeht. Für OL 50 wächst die Festigkeit mit der Temperatur, hat ein Maximum bei ungefähr 200°C und fällt schnell bei über 300°C ab. Für OLC 45 und OLC 60 ist zuerst eine Verminderung der Festigkeit gegenüber derjenigen bei Normaltemperatur festzustellen, der ein Ansteigen folgt mit einem Maximum bei ungefähr 300°C, das höher ist als die Zugfestigkeit bei Normaltemperatur.

Aus den in Bild 5 dargestellten Diagrammen ergibt sich, dass die Qualitäts-Karbonstähle OLC 45 und OLC 60 bei 150°C eine um ca. 4—8% geringere Zugfestigkeit aufweisen als bei Normaltemperatur, während sie bei 300°C um ca. 6—8% höher ist.

Für OL 50 ist zu bemerken, dass bei 200°C die Zugfestigkeit um ungefähr 15% steigt und bei über 500°C auf Werte absinkt, die unter 50% der Zugfestigkeit bei Normaltemperatur liegen.

Ähnliche Schlussfolgerungen sind auch in anderen Arbeiten zu finden, die sich mit diesem Problem beschäftigen [2], [7].

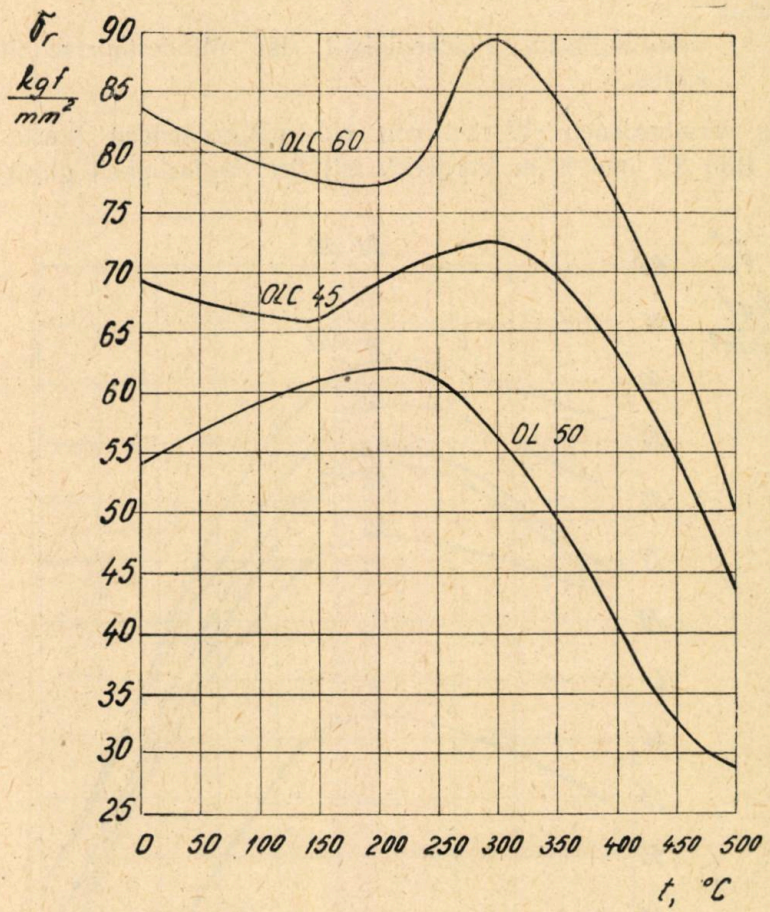


Fig. 5

4. DAS VERHALTEN DER GEKERBTEN PROBESTÄBE

Die bei den Versuchen mit gekerbten Probestäben erzielten Resultate haben zur Aufstellung der in Bild 6,7 und 8 wiedergegebenen Diagramme gedient. Diese Diagramme stellen die Änderung der *Zug-Zerreisspannung des gekerbten Probestabes* mit der Temperatur dar, definiert durch die Beziehung

$$\sigma_r^* = \frac{P_r^*}{A_r^*} \qquad (1)$$

mit folgenden Bezeichnungen :

P_r^* — Zerreisskraft eines gekerbten Probestabes bei gegebener Temperatur

A_o^* — ursprünglicher Flächeninhalt des Mindestquerschnittes im Kerbe.

Die den verschiedenen Werten von r/d entsprechenden Werte von σ_r^* sind in Bild 6,7 und 8 im Vergleich mit der Zugfestigkeit glatter Stäbe

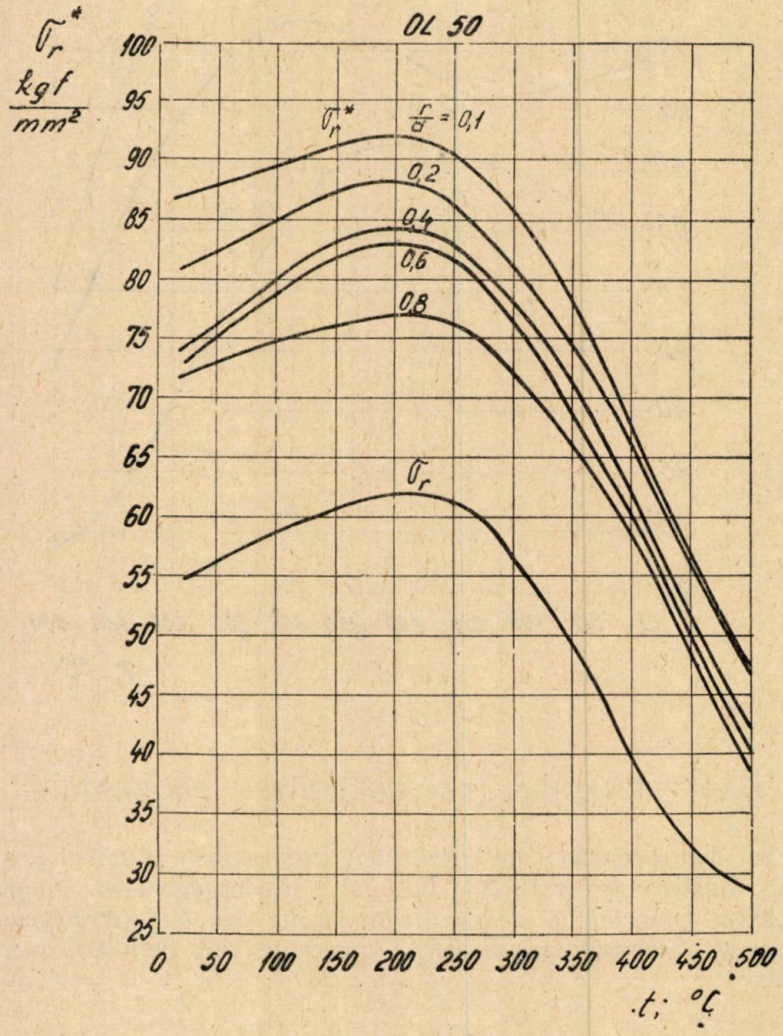


Fig. 6

dargestellt. Es ist ersichtlich, dass für ein gegebenes r/d die $\sigma_r^* = f(t)$ — Kurven den gleichen Verlauf haben wie die $\sigma_r = f(t)$ — Kurven. Bei gegebener Temperatur wächst σ_r^* mit fallendem r/d.

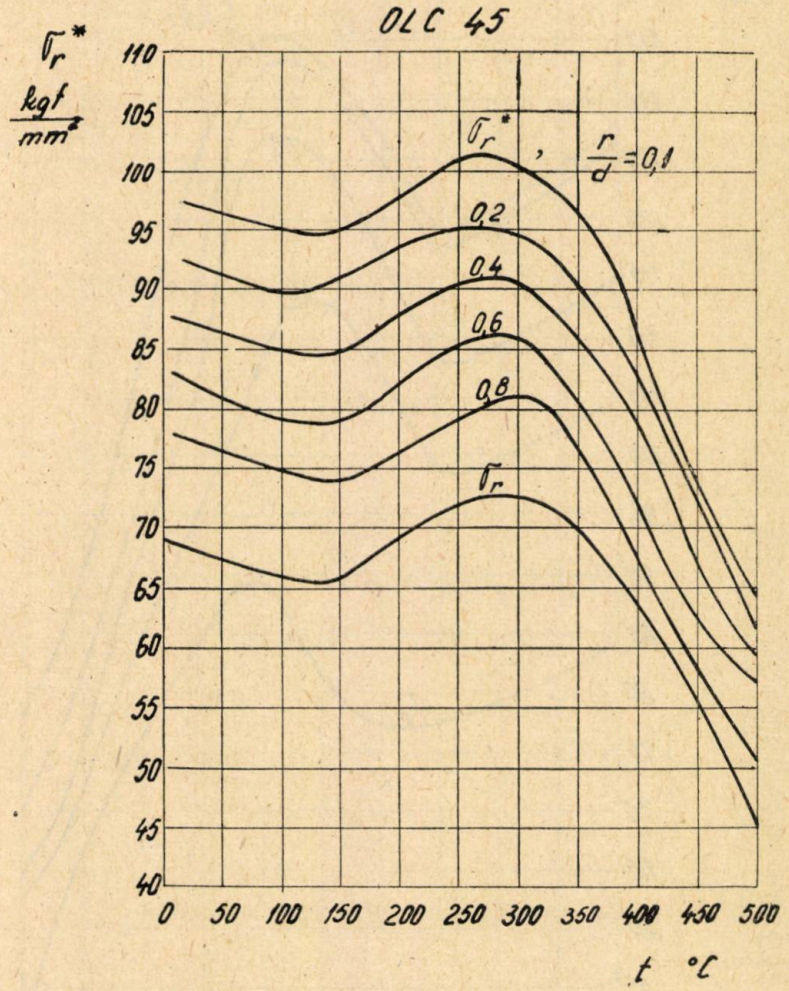


Fig. 7

Wie bekannt [3], [5], ändert sich der Spannungszustand im Kerbquerschnitt grundlegend beim Übergang von elastischer zu plastischer Belastung.

Bei elastischer Belastung ergibt sich der in Bild 9a dargestellte Spannungszustand: das Maximum befindet sich auf der Oberfläche des

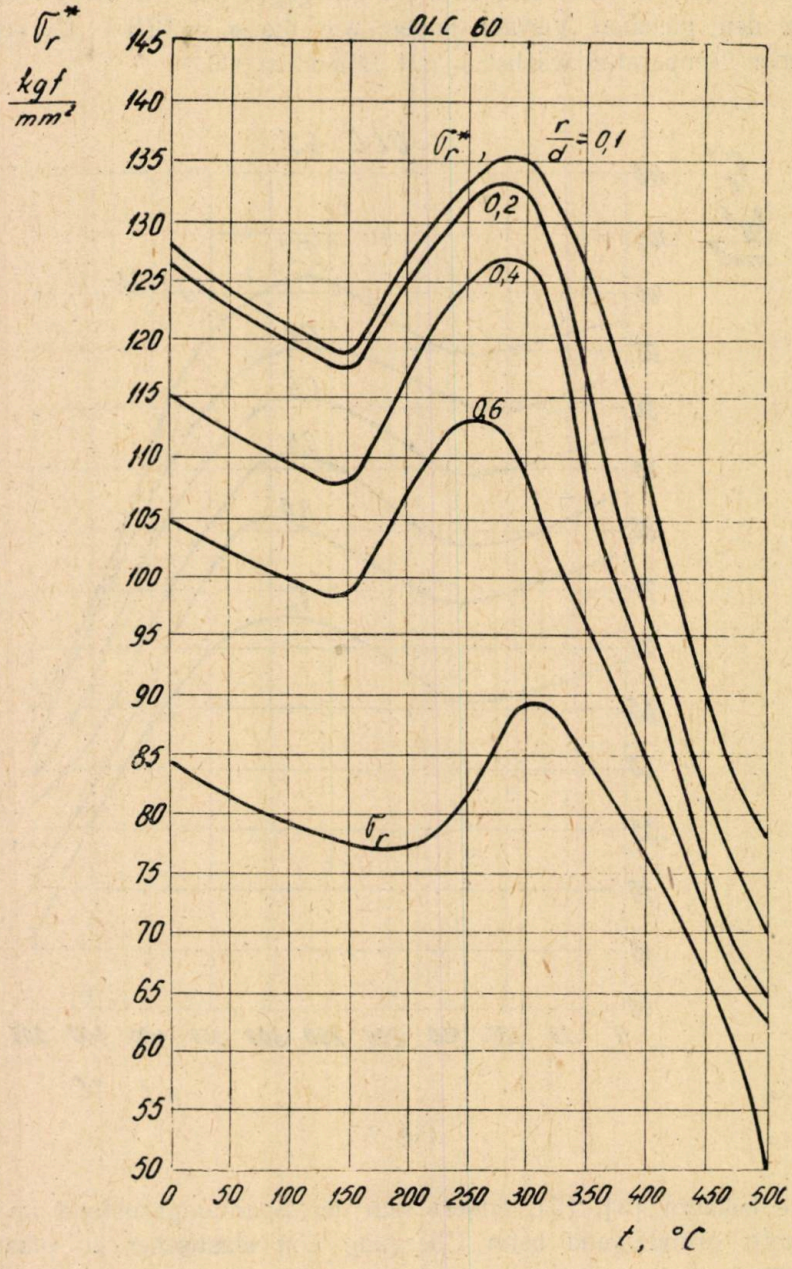

OLC 60
σ_r^*
kgf/mm²
σ_r^*,
r/d = 0,1
0,2
0,4
0,6
σ_r
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
t, °C

Fig. 8

Kerbes. Nach Überschreiten der Fliessgrenze, also wenn der Stab ganz plastisch belastet ist, erhält man die in Bild 9b wiedergegebene, gerade entgegengesetzte Verteilung: die Maxima befinden sich in der Stabachse und die Minima auf der Oberfläche des Kerbes.

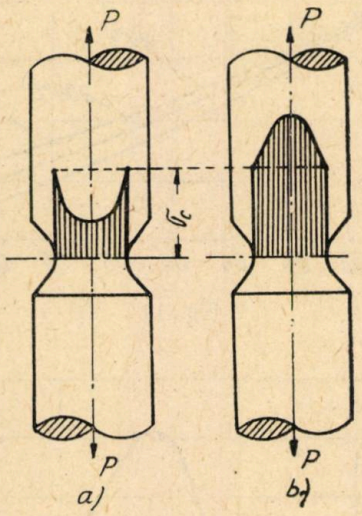


Fig. 9

Diese Tatsache erklärt sich dadurch, dass am Boden des Kerbes ein dreiaxialer Spannungszustand entsteht, der günstig wirkt, d.h. die Auswirkung der Zugkraft verringert. Die Wirkung dieses dreiaxialen Spannungszustandes ist umso stärker, je schärfer der Kerb, je geringer also der Wert von r/d ist. So erklärt sich die Folge der $\sigma_r^* = f(t)$ — Kurven in Bild 6,7 und 8. Das Verhältnis zwischen der Zug-Zerreisspannung des gekerbten Stabes und der Zugfestigkeit des glatten Probestabes $\frac{\sigma_r^*}{\sigma_r}$, für eine gegebene Temperatur berechnet, ist eine Kennziffer des betreffenden Kerbes. Diese Zahl ist um so grösser, je kleiner r/d ist.

Die Rechnungen zeigen, dass bei der Temperatur, für welche die Zugfestigkeit den höchsten Wert annimmt, das Verhältnis $\frac{\sigma_r^*}{\sigma_r}$ für Probestäbe mit r/d = 0,1 aus OL 50 den Wert 1,5, für OLC 45 den Wert 1,4 und für OLC 60 den Wert 1,5 hat.

Da $\frac{\sigma_r^*}{\sigma_r}$ sehr stark von der Geometrie des Kerbes, also von r/d abhängt, wurde diese Verhältniszahl als *dimensionslose Kerbzahl* δ

$$\delta = \frac{\sigma_r^*}{\sigma_r} \qquad (2)$$

definiert.

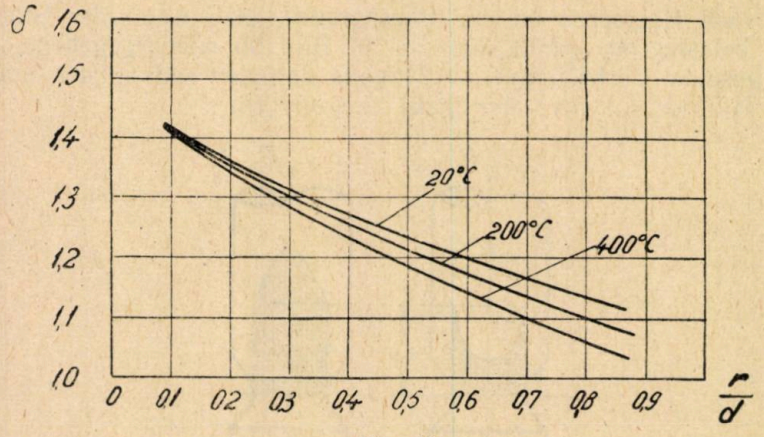

δ
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
r/d
20°C
200°C
400°C

Fig. 10

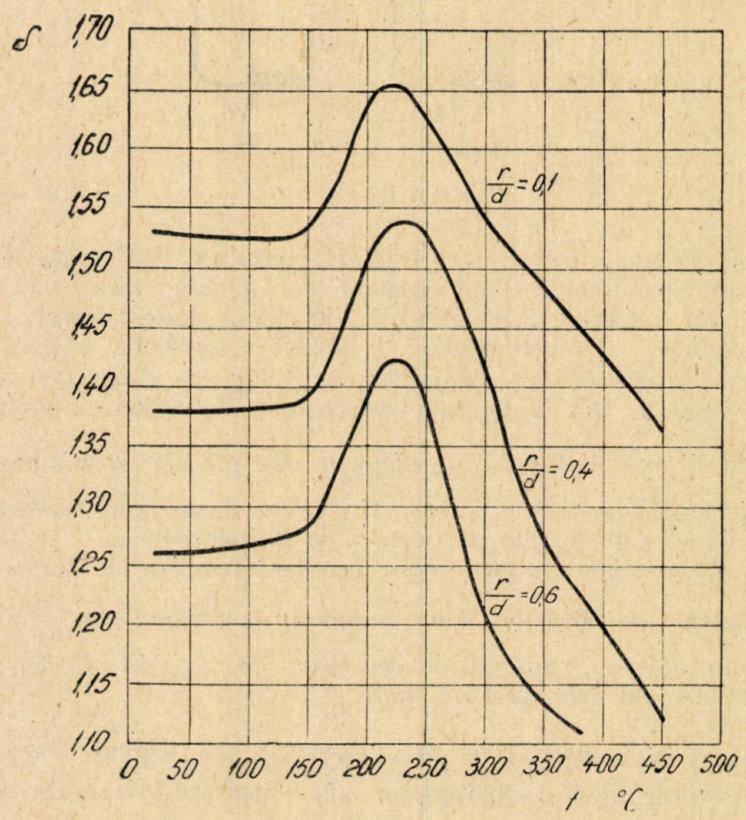

δ
1,70
1,65
1,60
1,55
1,50
1,45
1,40
1,35
1,30
1,25
1,20
1,15
1,10
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
t °C
r/d = 0,1
r/d = 0,4
r/d = 0,6

Fig. 11

Das in Bild 10 dargestellte Diagramm zeigt die Abhängigkeit dieses Koeffizienten von den Abmessungen des gekerbten Probestabes $\delta = f\left(\frac{r}{d}\right)$, berechnet für OLC 45 bei verschiedenen Temperaturen. Man sieht, dass der Wert von δ mit wachsendem r/d fällt. Was die Änderung der Kerbzahl mit der Temperatur anbelangt, wurden in Bild 11 einige Kurven aufgezeichnet, berechnet für OLC 60 mit verschiedenem r/d.

Interessant ist, dass der Verlauf der $\delta = f(t)$ — Kurve für ein gegebenes r/d demjenigen der $\beta_k = f(t)$ — Kurve aus Bild 12 ähnlich ist, die von B. I. Alexandrov [9] für den effektiven Kerbkoeffizienten bei veränderlichen Belastungen und hohen Temperaturen erzielt wurden.

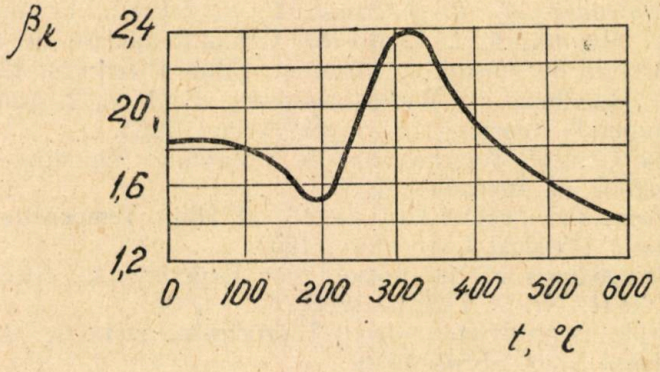


Fig. 12

B. I. Alexandrov benutzte Probestäbe aus Stahl mit schwacher Chrom- und Molybdenlegierung Marke EI 723.

Bild 11 zeigt, dass im Temperaturbereich zwischen 20°C und 500°C die dimensionslose Kerbzahl für ein gegebenes r/d in den Grenzen von ± 10% von dem bei Normaltemperatur bestimmten Wert abweicht.

5. SCHLUSSFOLGERUNGEN

Die durchgeführten Versuche lassen folgende Schlüsse zu:

1. Die Zugfestigkeit der Stähle OL 50, OLC 45 und OLC 60 ändert sich mit der Temperatur gemäss den Diagrammen aus Bild 5.

2. Die Kerbe haben bei Warmzugversuchen günstige Wirkung, da sie zu einer Erhöhung der Zug-Zerreisspannung des Probestabes führen. Die quantitative Wirkung der Kerbe für verschiedene Werte von r/d geht aus Bild 6, 7, 8 hervor.

3. Bei gegebener Temperatur fällt die günstige Wirkung des Kerbes mit steigendem r/d.

4. Bei gegebenem r/d ändert sich die Kerbwirkung mit der Temperatur in ziemlich engen Grenzen.

Lehrstuhl für Festigkeitslehre
Technische Hochschule Bukarest

LITERATUR

1. *H. Neuber*, Kerbspannungslehre, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer - Verlag, 1958.
2. *G. I. Pogodin Alexeev*, Spravocinik po maşinostroitelnîm materialam, Tom 1, Moskva, Maşghiz, 1959.
3. *S. D. Ponomarev, V. L. Biderman, C. K. Liharev, V. M. Makuschin, N. N. Malinin, V. I. Feodosiev*, Calculul modern de rezistență în construcția de mașini. I. Bukarest, Editura Tehnică, 1956.
4. *E. Siebel*, Handbuch der Werkstoffprüfung. 2. Band, 2. Auflage, Berlin-Göttingen-Heilderberg, Springer-Verlag, 1955.
5. (...) IX-e Congrès International de Mécanique Appliquée, Tome VIII, Université de Bruxelles, 1957.
6. (...) Creep and Fracture of Metals at High Temperatures, London, National Physical Laboratory, 1956.
7. (....) Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol. XVII, Nr. 2, U.S.A., 1960.
8. G. V. Ujik, Soprotivlenie otrîvu i procinosti metallov. Moskau, Isd. Akademii Nauk SSSR, 1950.
9. *B. I. Aleksandrov*, Ustalostnaia procinosti perlitnoi stali EI 723 pri vîsokih temperaturah. ZNIITMASCH, kniga 91, Maschgis, 1959.

ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИЙ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

(Краткое содержание)

Наблюдение, проведенные на трех типах стандардизированной стали (OL 50, OLC 45, OLC 60), изучают влияние, оказываемое концентраторами различных радиусов на предел прочности при растяжении в теплом состоянии образцов, имеющих форму, указанную на фиг. 4 В.

В работе указывается, что величина σ_r^*, определяемая формулой (1), изменяется одновременно с температурой при различных соотношениях r/d, согласно фиг. 6, 7, 8.

Коэффициент δ полученный из соостношения (2) изменяется, как это указано на фиг. 10, 11.

Главный вывод исследованйя состоит в том, что при разрыве в теплом состоянии концентраторы напряжений оказывают положительное влияние, повышая предел прочности стали на разрыв.

STRESS CONCENTRATION AT HIGH TEMPERATURE
(Summary)

The study carried out on three types of standardized steels (OL 50, OLC 45, OLC 60) examines the effect, the holes and notches of various radii have, in test specimens of the shape illustrated in fig. 4 b, on tensile ultimate strength at high temperature.

It is found that, the size σ_r^*, defined by formula (1), varies with the temperature, for various ratios r/d as in fig. 6, 7, 8. The coefficient δ, defined by the relation (2), varies as in fig. 10, 11.

The main conclusion is that in the case of failure at high temperature, the holes and notches have a favourable effect, leading to increased ultimate strength.

EFFETS DE CONCENTRATION DES TENSIONS À HAUTE TEMPÉRATURE
(Résumé)

L'étudé, effectué pour trois tipes d'aciers standardisés (OL 50, OLC 45, OLC 60), examine l'effef q'ont les entailles et les raccordements ayant de divers rayons, sur la résistance limite par traction des eprouvettes de la forme montrée dans la fig. 4 b.

On trouve que la valeur de σ_r^*, définie par la relation (1), varie en fonction de la température, pour de divers rapports r/d, comme le montre les figures 6, 7, 8. Le coefficient δ, défini par la relation (2), a la variation indiquée dans les fig. 10, 11.

La conclusion principale est que les entailles et les raccordements ont un effet favorable sur la rupture à haute température, ayant pour consequence une augmentation de la résistance limite.

KERBWIRKUNGEN BEI HOHEN TEMPERATUREN
(Zusammenfassung)

Die an drei genormten Stahlsorten (OL 50, OLC 45, OLC 60) durchgeführten Versuche verfolgten den Zweck, die Wirkung von Kerben verschiedener Radien am Probestäben der in Bild 4b gezeigten Form auf ihre Zugfestigkeit bei hohen Temperaturen zu untersuchen.

Es ergab sich, dass die Grösse σ_r^*, definiert in Beziehung (1), mit der Temperatur bei verschiedenen Werten von r/d, so varriert, wie aus Bild 6, 7 und 8 hervorgeht. Der Koeffizient δ, durch Beziehung (2) definiert, ändert sich gemäss Bild 10 und 11.

Die wichtigste Schlussfolgerung besteht darin, dass beim Warmzerreissen die Kerbe eine günstige Wirkung haben, da sie eine Erhöhung der Zugfestigkeit zur Folge haben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

METALURGIE

CONTRIBUȚII LA EXTINDEREA TURNĂRII PIESELOR DE OȚEL IN FORME INTĂRITE CU BIOXID DE CARBON *)

IOSIF TRIPȘA, LAURENȚIU SOFRONI, MIRCEA POPOVICI

In ultimul timp, metoda de întărire („uscare") chimică a miezurilor și formelor capătă o extindere din ce în ce mai mare în practica turnătoriilor din multe țări. Aceasta se explică prin faptul că, spre deosebire de celelalte metode folosite pentru turnarea de precizie a pieselor (turnarea în coji de bachelită, turnarea în forme cu modele fuzibile, turnarea sub presiune, etc.), turnarea în forme întărite cu bioxid de carbon prezintă o serie de avantaje.

In primul rînd, această metodă poate fi folosită pentru diferite piese, fără să existe o limită în ceea ce privește greutatea și complexitatea lor. Metoda de turnare în forme întărite chimic necesită material mult mai ieftin și asigură o tehnologie simplă de execuție a formelor și miezurilor, indiferent de dimensiunile lor.

Față de tehnologia obișnuită de executare a formelor și miezurilor, noul proces tehnologic, bazat pe întărirea chimică a formelor și miezurilor, permite: micșorarea adaosurilor de prelucrare mecanică; scurtarea ciclului de fabricație a formelor și miezurilor; renunțarea într-o bună măsură la cuptoarele de uscat și la operațiile legate de acestea, iar suprafața eliberată (circa 20—25%) prin înlăturarea cuptoarelor de uscat putîndu-se folosi pentru formare; scurtarea ciclurilor de fabricație, ceea ce permite ca numărul lor să fie micșorat; reducerea într-o mare măsură a operațiilor de transport și a încărcării macaralelor; micșorarea consumului de nisip cu circa 20%, datorită faptului că se pot executa forme și miezuri cu grosime mai mică, în formă de coji sau miezuri goale în interior; folosirea unui amestec unic de formare pentru diferite piese; micșorarea cu circa 20% a consumului de material de rigidizare (armături, nervuri, cîrlige) reducerea operațiilor de curățire cu circa 30—35%, datorită îmbunătățirii calității piesei turnate; micșorarea sensibilă (30—35%) a procentului de rebut cauzat de incluziuni de nisip, pelicule, crăpături; micșorarea de 3—5

*) Lucrare prezentată la a V-a sesiune științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București 31 octombrie 1959.

ori a cheltuielilor pentru repararea defectelor ; economie de 10%, datorită micșorării adaosurilor de prelucrare mecanică etc.

În cazul folosirii miezurilor și formelor coji (întărirea chimică făcîndu-se pe modele și în cutii de miez), adaosurile de prelucrare pot fi micșorate cu 20—25% față de cele prevăzute în standard, iar în unele cazuri ele pot fi complet eliminate.

Introducerea acestei metode tehnologice de formare reprezintă o mare rezervă pentru turnătorii, ducînd la o importantă mărire a productivității muncii și la o economie de metal și de materiale auxiliare.

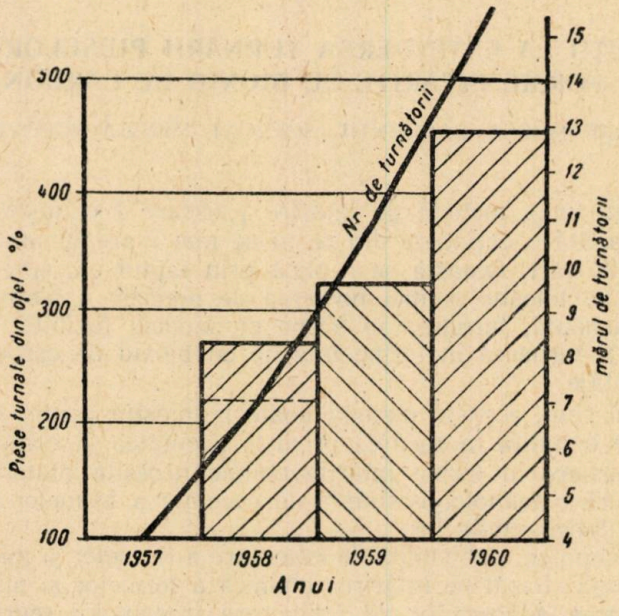


Fig. 1

În Republica Populară Romînă, procedeul de întărire chimică a formelor și miezurilor a început să fie folosit pe scară mai largă în turnătorii, începînd din anul 1957. (adică după 10 ani de la brevetarea procedeului). De atunci, el s-a dezvoltat continuu. Astfel, numai în cadrul M.M.C.M., numărul de uzine care l-au aplicat a crescut de la 4, în anul 1957, la 11, în 1959, iar cantitatea de piese de oțel turnate în forme întărite cu bioxid de carbon a fost de 3,5 ori mai mare în anul 1959 față de anul 1957 (fig. 1). Totuși, comparativ cu alte țări (U.R.S.S., R.S. Cehoslovacă, R.D.G., etc.), acest procedeu nu a primit la noi încă extinderea cuvenită.

La noi în țară, amestecurile cu sticlă solubilă se folosesc mai mult la executarea miezurilor și într-o măsură mai mică, la executarea formelor. Astfel, la Uzina de utilaj petrolier și chimic București întărirea chimică a miezurilor este folosită pentru un număr mare de repere ca : roți de vagonet, role pentru funicular, roți, plăci pentru mori de ciment și căr-

bune, tamburi etc. În momentul de față se execută aproape 80% din miezurile necesare pieselor turnate din oțel. Consumul de bioxid de carbon constituie cca. 3% din greutatea amestecului de formare.

La uzina „23 August" amestecurile întărite cu CO_2 se folosesc pentru executarea formelor exterioare, formelor interioare și a miezurilor. Ca exemplu poate fi dată folosirea amestecurilor întărite cu CO_2 pentru forma exterioară la executarea inelelor de rulare pentru liniile de ciment, coroane dințate (unde se execută dinții în aceste forme), role de ciment, etc.; pentru forme interioare folosite la piese ca: traverse pentru vagoane basculante de minereu, roți, matrițe, elici etc.

La uzina „I. C. Frimu" Sinaia se execută forme-coji pentru o serie de repere ca: corp injector, bucșe canelate, planșe de centrare, etc.

La uzinele „I. C. Frimu" Sinaia și C. M. Reșița s-a trecut de la turnarea în forme cu modele fuzibile la turnarea în forme coji, întărite cu CO_2, procedeul ultim fiind mai economic.

În prezent se fac încercări de insuflare a CO_2 împreună cu aburi încălziți la executarea miezurilor în vederea micșorării consumului de CO_2.

S-a executat prototipul unei mașini de suflat forme-coji întărite cu CO_2.

În ultimul timp s-au făcut studii și încercări privind principalii factori, care stau la baza aplicării acestui procedeu în turnătorii.

Astfel, s-au determinat proprietățile optime ale silicatului de sodiu: modulul cuprins între 2,4—2,6, iar densitatea — între 1,50—1,55. Întrucît în standardul în vigoare (STAS 2202-56) nu este cuprins silicatul de sodiu cu proprietățile arătate mai sus, în prezent se lucrează la elaborarea unui standard pentru un silicat de sodiu destinat exclusiv turnătoriilor avînd caracteristicile arătate.

Pînă atunci, el se poate prepara din amestec de silicat de sodiu tip B cu silicat tip C [1, 2].

S-a stabilit, pe bază de încercări, influența conținutului de apă, a argilei, a prafului de cărbune, melasei, amestecului de bitum și petrol asupra proprietăților fizico-mecanice ale amestecurilor cu sticlă solubilă. [1, 2, 3].

De asemenea s-a stabilit și capacitatea amestecurilor cu sticlă solubilă de degajare a gazelor la temperaturi ridicate (de turnare a fontei și oțelurilor) [4].

S-au făcut încercări privind condițiile optime de preparare și de întărire cu CO_2 a amestecurilor cu sticlă solubilă.

Folosind nisipurile cuarțoase Aghireș și Văleni de Munte se pot obține amestecuri cu sticlă solubilă, care să asigure proprietățile corespunzătoare formelor și miezurilor.

În articolul de față se tratează problema 1) fabricării centralizate a bioxidului de carbon și 2) cea a regenerării amestecurilor cu sticlă solubilă întărite cu CO_2.

1. *Unul din factorii* care frînează extinderea metodei de uscare chimică a formelor și miezurilor cu bioxid de carbon în țara noastră îl constituie prețul de cost ridicat al bioxidului de carbon și greutățile întîlnite la aprovizionarea turnătoriilor cu CO_2. Acesta se livrează de către unită-

țile din Ministerul Industriei Ușoare, la preț de produs alimentar ; iar în sezonul de vară, — cînd consumul de băuturi răcoritoare crește, — aprovizionarea turnătoriilor cu CO_2 se face foarte greu.

Pe de altă parte, pentru extinderea largă a acestui procedeu în turnătorii, este necesară o cantitatea mereu crescîndă de bioxid de carbon. Din acest motiv, s-a pus problema producerii bioxidului de carbon în cantități suficiente și la un preț de cost scăzut.

În funcție de caracterul materiei prime, instalațiile de producere a CO_2 pot fi de mai multe feluri :

1) care utilizează gazele obținute la fermentația spirtului, berei, gaze care conțin 100% CO_2 ; 2) care utilizează gazele rezultate la diferite procese chimice (sinteza amoniacului, prelucrarea țițeiului), gaze care conțin 80—90% CO_2 ; 3) care obțin CO_2 din gazele de ardere a combustibililor, a gazelor de calcinare a calcarului sau din alte gaze, care conțin, în gene-

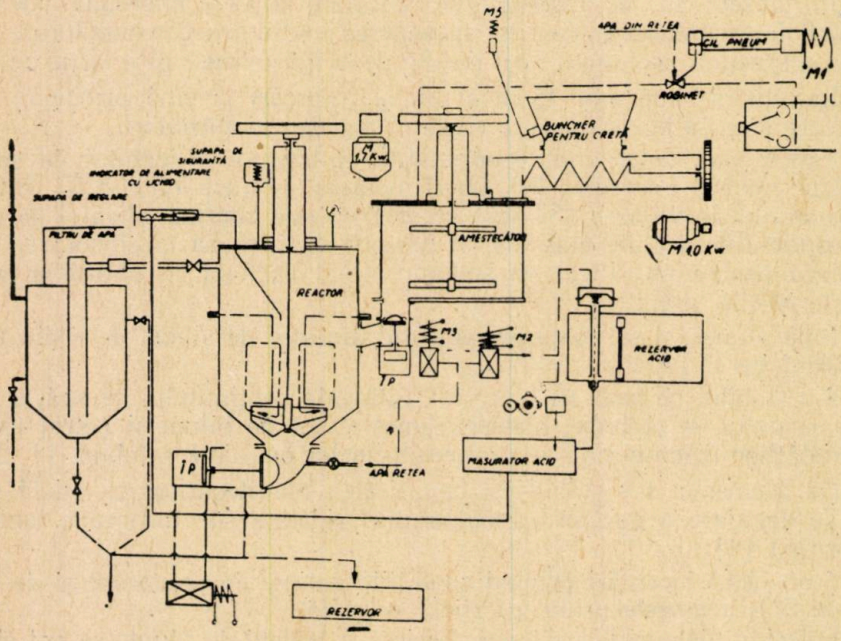


Fig. 2

ral, 15—25% CO_2 ; 4) instalații care obțin CO_2 prin arderea prafului de cărbune în jet de oxigen și 5) instalații care obțin acest gaz prin tratarea cretei cu acid sulfuric. [5].

Dintre toate instalațiile arătate mai sus, în condițiile uzinelor constructoare de mașini, care nu au în apropiere centrale termoelectrice sau alte instalații de cazane de mare putere, cea mai simplă și mai eficace instalație este acea, care pornește de la tratarea cretei (sau a rocilor calca-

roase) cu acid sulfuric (sau acid clorhidric). Ea ocupă un spațiu mic, avînd o productivitate mare. În plus, instalația se poate monta în turnătorie sau în imediata ei apropiere, alimentarea cu CO_2 a locurilor de formare sau miezuire făcîndu-se cu ajutorul conductelor care să asigure o presiune constantă (3—4 atm) a bioxidului de carbon [5, 6].

Astfel de instalații lucrează în prezent cu succes în mai multe turnătorii din U.R.S.S.

Folosind experiența sovietică, un colectiv de la catedra de siderurgie a Institutului Politehnic din București în colaborare cu un colectiv de la Uzina de utilaj petrolier și chimic București, au inițiat și realizat construirea unei instalații centrale de producere a bioxidului de carbon, la baza căruia a stat proiectul tip elaborat de filiala din Harkov a Institutului de proiectări de mașini unelte (GHIPROSTANOK).

Pentru obținerea bioxidului de carbon se folosește creta și acidul sulfuric tehnic concentrat, care intră în reacție:

$$CaCO_3 + H_2SO_4 = CaSO_4 + CO_2 + H_2O.$$

În figura 2 este arătată schema de principiu a instalației, iar în tabela 1, cîteva caracteristici tehnice. În fig. 3—5 sînt date trei secțiuni și o vedere. Instalația are o acțiune continuă.

Tabelul 1

Nr. crt.	Denumirea	Unitatea de măsură	Valori
1	Productivitate de CO_2	m^3/h	24
2	Dimensiunile de gabarit ale instalației	m,m^2	1,71x1,6=2,8 m^2 H=3,14 m
3	Greutatea instalației (după proiect) fără automatizare	kg	1862
4	Cantitatea rezultată de $CaSO_4$	kg/h	150
5	Cantitatea de apă obținută	l/h	238
6	Consumul de H_2SO_4	kg/h	106
7	Consumul de $CaCO_3$	kg/h	109
8	Consumul de apă	l/h	218
9	Volumul buncărului pentru cretă	m^3	0,5
10	Volumul amestecătorului	m^3	0,16
11	Volumul reactorului	m^3	0,35
12	Volumul rezervorului pentru acid	m^3	0,50
13	Volumul măsurătorului pentru acid	m^3	0,03
14	Volumul măsurătorului de apă	m^3	0,12
15	Puterea instalației (fără automatiz.).	KW	2,3

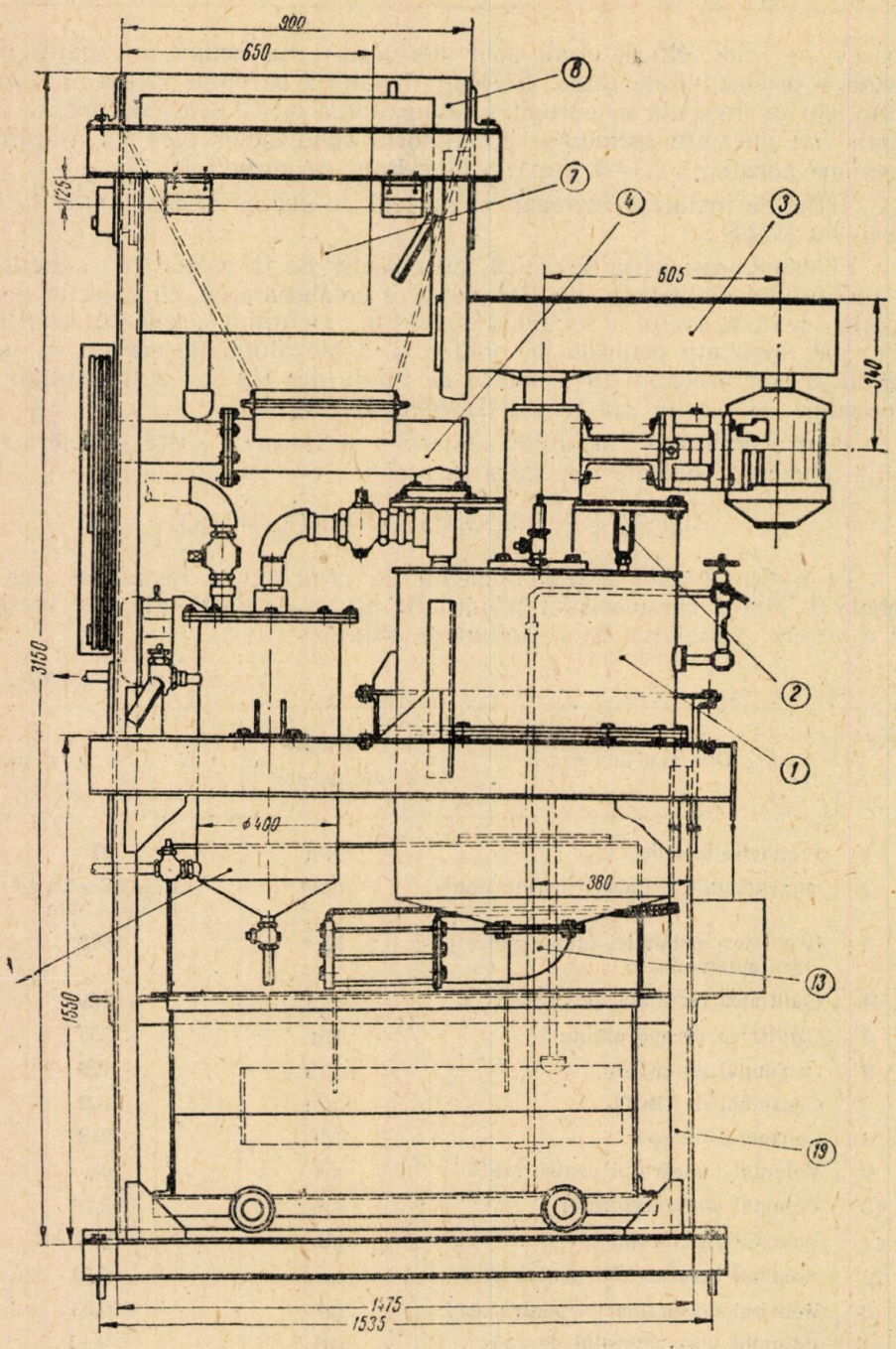


Fig. 3

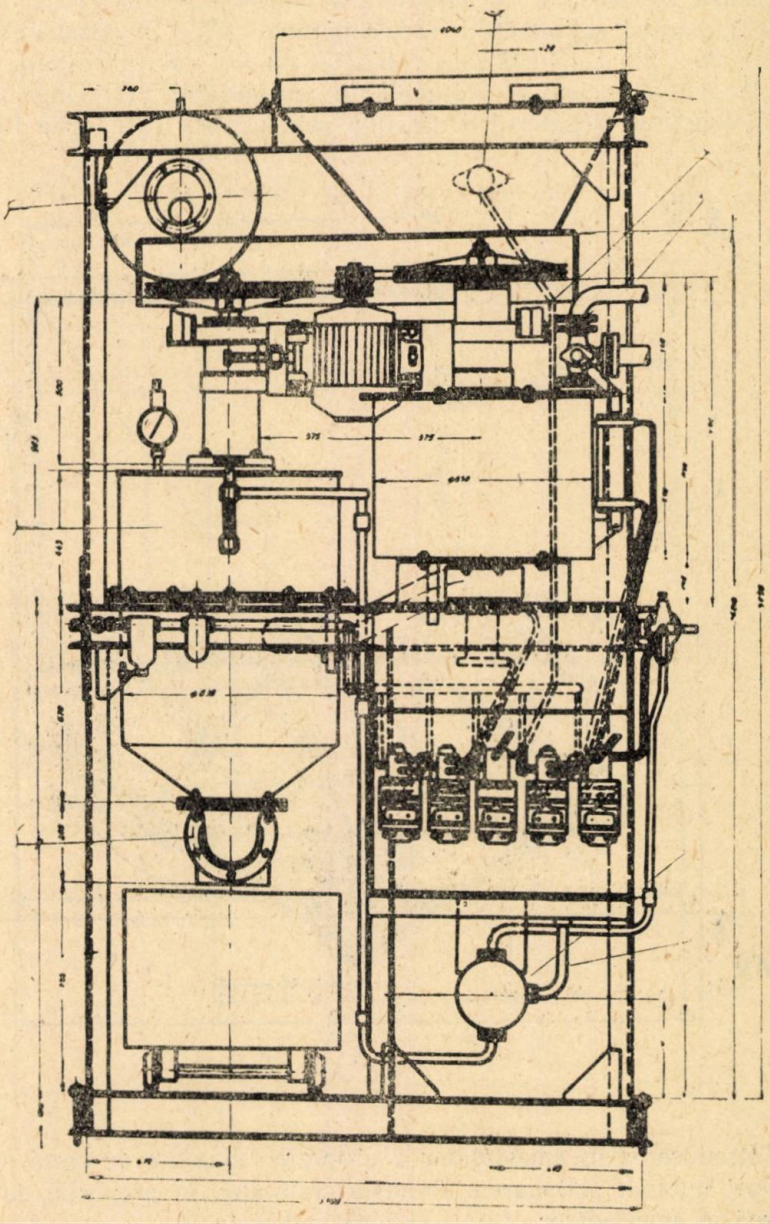


Fig. 4

Fucționarea aparatului începe după cuplarea curentului. La început se cuplează mecanismul de acționare a amestecătorului (1) și al reactorului (2), paralel acționînd și electromagnetul (M_1) al dozatorului pentru apă (3). Apa din conductă prin robinetul cu trei căi (4) ajunge în dozatorul de apă, din care se îndreaptă în amestecător (1), După 3 minute intră în funcțiune dozatorul buncărului pentru cretă (5). Peste 10 secunde

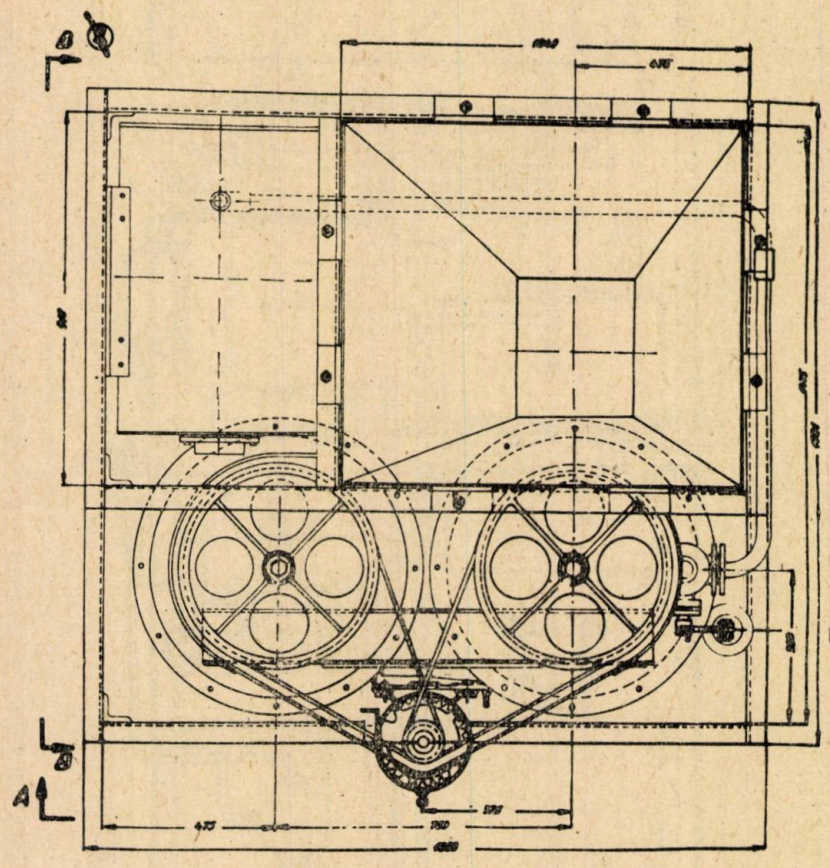


Fig. 5

după introducerea în amestecător a proporției stabilite de cretă, dozatorul întrerupe automat acționarea. Emulsia cretă-apă, în proporție de 1 : 2, se amestecă în amestecător (1) cu ajutorul paletelor (6).

După un minut acționează electromagnetul M_2, care introduce aer comprimat din rețea, în măsurătorul de acid (7). Acidul, cu presiune de 1—1,5, atm începe să pătrundă în reactor. Introducerea acidului în reac-

tor se face în mod uniform în tot timpul reacției, adică aproximativ 1,5 minute.

Umplerea măsurătorului de acid se face prin curgere liberă a acestuia din rezervorul pentru acid sulfuric (8).

Bioxidul de carbon obținut în reactor se trece prin filtrul de apă (9), se curăță și pătrunde prin conductă în rezervorul de gaz. Procesul de obținere a bioxidului de carbon se urmărește cu ajutorul manometrului (10), cu care este prevăzut reactorul, care trebuie să arate o presiune constantă de 1,5 atmosfere.

După terminarea reacției, introducerea acidului se întrerupe automat; cu ajutorul electromagnetului M_4 se deschide automat închizătorul pneumatic (11) al reactorului, care aruncă într-un vagonet celelalte produse de reacție: gipsul și apa. Paralel cu deschiderea închizătorului pneumatic al reactorului începe din nou umplerea dozatorului pentru apă, apoi intră în funcțiune dozatorul buncărului pentru cretă etc. După patru minute din momentul începerii descărcării gipsului și a apei, închizătorul pneumatic al reactorului se închide automat. Rezervorul și conductele de gaz, care merg în turnătorie la locurile de formare și miezuire, trebuie să fie etanșe pentru a evita pierderile de gaz. De obicei rezervoarele de gaz au cîte 5 m^3 fiecare.

Pregătirea instalației pentru pornire constă în cercetarea atentă (probarea) reactorului, a măsurătoarelor, a filtrului de apă, a închizătoarelor și distribuitoarelor (tip sertar) electromagnetice.

Se probează la presiunea (5—6 atm) măsurătorul de acid (robinetul de alimentare cu acid) și reactorul, închizătoarele și cordoanele de sudură, verificîndu-se ermeticitatea. În mod asemănător se face proba filtrului de apă, a legăturilor, a măsurătorului de apă și a țevăriei.

Creta se păstrează într-un buncăr uscat și se folosește sub formă de praf. În cazul cînd creta este umedă atunci se usucă și se macină.

Instalația descrisă funcționează și manual (fără automatizare). Avînd o productivitate de 24 m^3/oră, ea poate asigura bioxidul de carbon necesar unei turnătorii cu o capacitate de 10.000—12.000 tone piese turnate pe an, folosind pentru turnare numai forme și miezuri uscate cu bioxid de carbon. Montarea ei în turnătorii sau în apropiere asigură efectuarea transportului ușor a gazului la locul de muncă.

Obținerea continuă a bioxidului de carbon în turnătorii asigură continuitatea proceselor tehnologice.

Prețul de cost al bioxidului de carbon obținut în instalația descrisă este de două ori mai mic decît al bioxidului de carbon primit în tuburi. În acest preț intră și plata muncitorului care deservește instalația, întrucît, în afară de supravegherea instalației, cea mai mare parte din timp, el se ocupă cu uscarea chimică a miezurilor sau a formelor.

Gipsul rezultat din reacție poate fi folosit ca materie primă pentru confecționarea formelor, modelelor și alte scopuri industriale.

Această instalație a creiat premizele necesare extinderii întăririi chimice nu numai a miezurilor, dar și a formelor. În prezent după proiectul instalației de la uzina de utilaj petrolier și chimic București se construiesc încă trei instalații la uzinele „Steagul-Roșu" și „Ernst-Thälman" (Brașov) și „23 August" (București).

2. *Regenerarea nisipului* uscat din amestecurile întărite cu CO_2 constituie o problemă încă nepusă la punct, nici în ce privește modalitatea de preparare și nici proporția de nisip vechi în amestecul cu nisip proaspăt.

Uneori se recomandă refolosirea nisipului din forme și miezuri, fără altă pregătire, decît, măcinarea, în proporție de pînă la 50% în amestec proaspăt, alteori pînă la 10%. Unele uzine impun înainte de utilizare spălarea nisipului uzat, pentru înlăturarea alcaliilor și a prafului [7].

După insuflarea cu CO_2 amestecurile pe bază de sticlă solubilă conțin în principal, nisip cuarțos, sticlă solubilă, soluție hidratată de silicat de sodiu $Na_2O.2SiO_2$, silicagel ($SiO_2.3H_2O$) și carbonat de sodiu (Na_2CO_3). La temperaturi ridicate (de turnare a oțelului sau fontei), $Na_2O.2SiO_2$ se disociază după reacția :

$$Na_2O.2SiO_2 \rightleftarrows Na_2O.SiO_2 + SiO_2$$

La turnarea oțelurilor sau fontei poate avea loc și reacția :

$$2(Na_2O.SiO_2) + 4FeO \rightleftarrows 2(FeO.SiO_2) + 2Na_2O. \qquad (1)$$

Așadar, în urma întăririi formelor miezurilor cu CO_2 și după umplerea lor cu metal are loc îmbogățirea acestor amestecuri cu Na_2O, datorită formării Na_2CO_3 și descompunerii parțiale a acestuia în Na_2O și CO_2, precum și descompunerii sticlei solubile la temperaturi ridicate, care nu a intrat în combinație cu CO_2 insuflat, în $Na_2OSiO_2 + SiO_2$. Pentru refolosirea nisipului din amestecurile folosite este necesar să se știe care este gradul de îmbogățire a amestecului în Na_2O, limita maximă a acestuia pînă la care nu se înrăutățesc proprietățile fizico-mecanice ale amestecului, posibilitatea de îndepărtare a peliculelor de silicagel, care învelesc grăunții de nisip.

Pentru studierea posibilității de regenerare a amestecurilor de sticlă solubilă, s-au turnat probe de oțel carbon la temperatura de 1550°C, avînd diametrul de 30 mm în forme executate din amestecuri : 46% nisip Văleni, 47% nisip Aghireș și 10% sticlă solubilă. Cifra de bază a nisipurilor folosite a variat între 90,3 și 91,0. Sticla solubilă a avut densitatea 1,36 și compoziția : 26,65% SiO_2, 8,46% Na_2O, și 0,16% NaCl.

Amestecarea s-a făcut într-o moară chiliană. Durata de amestecare 2,5 minute. Formele au fost întărite după îndesare cu CO_2. Durata de insuflare a CO_2 a fost de 1 minut, la presiunea de 0,5 atm.

Încercările făcute arată că refolosirea amestecurilor întărite cu CO_2, fără a se lua nici o măsură de recondiționare, în afară de măcinare, duce

la o creștere sensibilă a cantității de Na_2O, și a componentei levigabile, (tabela 2 și fig. 6).

Tabelul 2

Nr. de refolosire Proprietăți	După turnarea I-a	După turnarea II-a	După turnarea III-a
Conținutul de Na_2O după desbatere și măcinare, %	0,80	1,43	2,82
Conținutul componentei levigabile, %	4,71	7,7	11,5
Granulația nisipului, %	1,5 — 0	1,5 —0	1,5—0,02
	1,00— 0	1,00—0,05	1,00—0,03
	0,60— 0,32	0,60—0,30	0,60—0,50
	0,30— 2,53	0,30—4,70	0,30—0,50
	0,20—18,76	0,20—13,00	0,20—14,50
	0,10—46,25	0,10—44,40	0,10—41,70
	0,06—20,44	0,06—19,60	0,06—21,80
	<0,06—11,60	<0,06—9,76	<0,06— 9,00
Conținutul de Na_2O după preparare, %	1,56	2,16	3,57
Permeabilitatea	97	70	58

După cum se vede, fără a lua măsuri de regenerare, conținutul de Na_2O, crește pînă la limita de 3,57%.

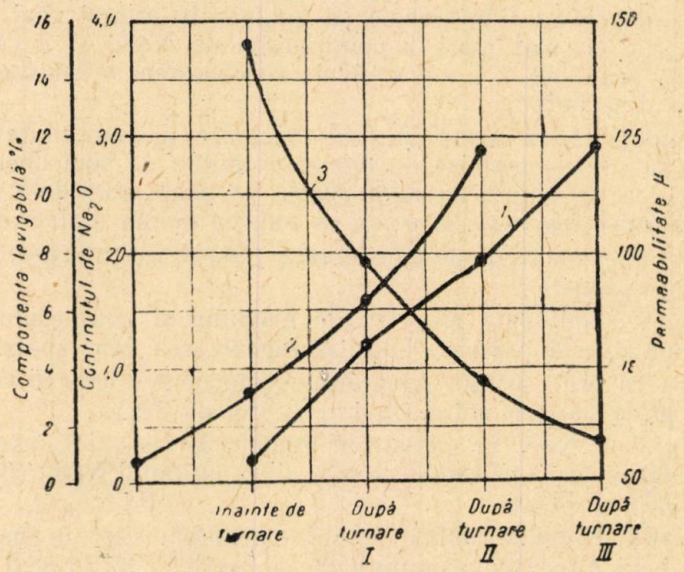


Fig. 6

Chiar dacă caracteristicile mecanice în cazul refolosirii amestecurilor, fără regenerare, nu se înrăutățesc, totuși se micșorează permeabilitatea și mai ales refractaritatea. Aceasta s-a putut observa prin faptul că pe piese s-au format aderențe mari, grosimea stratului de aderare depășind uneori 5 mm.

În afară de aceasta, refolosirea amestecurilor pe bază de sticlă solubilă întărite cu CO_2, fără regenerare, duce la înrăutățirea condițiilor de formare. Astfel, după a treia turnare, amestecurile nu au mai prezentat proprietăți de formare, chiar la conținuturi ridicate (8—9%) de sticlă solubilă. Aceasta se datorește cantității mari de praf din amestec, care nu permite ca sticla solubilă să lege grăunții de silice.

De menționat că după măcinare, conținutul de Na_2O scade întrucîtva, iar după adăugarea de sticlă solubilă și uscare cu CO_2 el crește (tabela 2). Se poate considera că fără a lua măsuri de regenerare, după fiecare preparare, amestecul se îmbogățește cu cca. 0,60—0,70% Na_2O, pentru un consum de 5% sticlă solubilă.

Fracția de bază variază și ea de la o turnare la alta, scăzînd de la 85,45% pentru prima turnare, la 77,20% și apoi la 77% pentru a doua și a treia turnare.

Componenta levigabilă crește de la 0,5% (amestecul înainte de turnare), pînă la 11,5% (după a treia turnare).

În realitate aici nu este vorba de argilă, conținutul căreia nu variază practic în timpul refolosirii, ci de conținutul de praf, provenit din descompunerea Na_2CO_3 și din sfărîmarea grăunților de silice în timpul măcinării și amestecării nisipului.

Din cele arătate mai sus se vede că regenerarea amestecurilor cu sticlă solubilă și întărite cu CO_2 trebuie să asigure în primul rînd eliminarea într-o proporție cît mai mare a conținutului de Na_2O și a componentei levigabile (a prafului). Cu alte cuvinte, regenerarea ar consta în primul rînd dintr-o desprăfuire.

Experiențele făcute arată că prin măcinare și desprăfuire se micșorează pînă la limitele permise nu numai proporția de componentă levigabilă, dar și cea de Na_2O. În felul acesta se poate considera, că pentru aceste amestecuri, regenerarea poate să constea numai dintr-o desprăfuire.

Desprăfuirea s-a făcut pe cale uscată (sitare și vînturare) și pe cale umedă (prin spălare).

În tabela 3 sînt date proprietățile nisipului și amestecului cu sticlă solubilă după diferite turnări, folosind regenerarea prin spălare.

Se vede că prin spălare conținutul componentei levigabile (a conținutului de praf) variază puțin (în jurul cifrei de 3%).

Conținutul de Na_2O se găsește în limitele 0,36—0,45%, astfel că prin spălare se îndepărtează mai mult de 60% din conținutul Na_2O (de la 1,07—1,18%, la 0,36—0,45%).

Granulația nisipului rămîne practic constantă, cifra de bază, constituind după cele 3 turnări respectiv 0,06—0,2=88,2; 87,2; 86,2 pentru un amestec sau 90—91,3 pentru un alt amestec.

Tabelul 3

Nr. de refolosire Proprietăți	După turnarea I-a	După turnarea II-a	După turnarea III-a
Conținutul de Na_2O după desbatere și măcinare, %	0,36	0,45	0,42
Conținutul componentei levigabile, %	2,24	3,5	3,1
Granulația nisipului, %	1,5—0	1,5—0	1,5—0
	1,00—0	1,00—0	1,00—0
	0,60—0	0,60—0,6	0,60—0
	0,30—0,30	0,30—6,2	0,30—0,8
	0,20—15,30	0,20—11,3	0,20—14,2
	0,10—52,80	0,10—53,8	0,10—51,3
	0,06—22,10	0,06—22,1	0,6—20,7
	<0,06—8,85	<0,06—6,9	<0.06—9,8
Conținutul de Na_2O după preparare, %	1,07	1,15	1,18
Permeabilitatea	145	145	130
Rezistența la compresiune kgf/cm²	11—12	11	11
Rezistența la forfecare kgf/cm²	3,5—4,8	3,5	3,3

Permeabilitatea în toate cazurile este ridicată, fiind cuprinsă între 122—145.

Proprietățile mecanice se mențin de asemenea constante, valoarea lor fiind apropiată de cea a amestecurilor proaspete.

Așadar, experiențele arată că regenerarea se poate face fie pe cale uscată, prin vînturare, fie pe cale umedă, prin spălare. În ambele cazuri odată cu eliminarea prafului se îndepărtează și cea mai mare cantitate de Na_2O. Prin aceasta proprietățile fizico-mecanice ale nisipului regenerat și ale amestecurilor executate pe baza lui se mențin la valorile inițiale.

În literatură se consideră că valoarea maximă admisibilă a conținutului de Na_2O în amestecuri este de 1,3%.

Prin regenerarea nisipului, acesta poate fi refolosit și pînă la 60% și chiar mai mult.

De remarcat că, prin aceasta conținutul de sticlă solubilă în amestec nu trebuie mărit.

Prin desprăfuire (pe cale umedă sau pe cale uscată) pierderile de nisip sînt destul de ridicate (15—20%) ajungîndu-se uneori pînă la 35% și aceasta mai ales în cazul metodei uscate de regenerare.

Desprăfuirea insuficientă, duce la un consum mai ridicat de sticlă solubilă în amestec (peste 10%).

Din datele prezentate mai sus rezultă că în cazul folosirii amestecurilor cu sticlă solubilă întărite cu CO_2, în turnătorii trebuie să se ia toate măsurile de eliminare a Na_2O și a prafului.

Catedra de siderurgie
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Teodorescu Al.*, — Turnarea în forme întărite cu CO_2. Din experienţa uzinei „I. C. Frimu" — Sinaia. I.D.T., 1959.
2. *Ştefănescu Cl., Genţiu I.* — Aspecte noi ale formării cu amestec pe bază de sticlă solubilă, întărit cu bioxid de carbon. I.D.T. Vezi şi „Metalurgia şi construcţia de maşini", 1957, nr. 6.
3. *Popovici M., Bara G.* — Contribuţii la extinderea turnării pieselor de oţel în forme întărite cu bioxid de carbon.
4. *Sofroni L., Cohn E. Cosneanu C.* — Metalurgia şi Construcţia de Maşini, 11 (1950), nr. 5, 36—372.
5. *Sokolovskii L. O., Fradin L. P.* — Liteinoe proizvodstvo, 1959, nr. 9, 29—32.
6. *Borikson S. E., Maslov V. A., Rianin K. M.* — Liteinoe proizvodstvo, 1960, nr. 1, 12—13.
7. *Czikel I., Wasner R.* — Freiberger Forschungshefte H. B., 24, 1957, 279—294.

К ВАПРОСУ РАШИРЕНИЯ ПРИМЕНЕНИЯ БЫСТРОТВЕРДЕЮЩИХ СМЕСЕЙ ДЛЯ СТАЛЬНОГО ЛИТЬЯ

(Краткое содержание)

В работе указаны характеристики установки для централизированого производства углекислого газа, созданной на основе советской документации. Установка работает на одном из литейных цехов.

Указывается, что в условиях машиностроительных заводов, наиболее простой и эффективной установкой является та, каторая использует мело и серную кислоту.

Показаны результаты эксмериментов применения углекислого газа для твердения форм и стержней, особенно что касается регенерации и приготовления формовочных смесей, газотворной способности и т. д.

CONTRIBUTIONS TO THE WIDER USE OF CASTING STEEL PARTS IN CARBON DIOXIDE HARDENED MOULDS

(Summary)

The present paper presents the characteristic features of a plant for centralized production of carbon dioxide, making use of Soviet speciality literature. The unit is annexed to a machine building works and, in the conditions prevalent in these works, the simplest and most effective plant

is that starting from the treatment of chalk (or of lime rocks) with sulphuric acid.

The authors further describe the results of the experiments carried out with a view to extending the casting of steel parts in carbon dioxide hardened moulds, the regeneration and preparation of moulding sand mixtures, their gas escape capacity, etc.

CONTRIBUTION A L'EXTENSION DE L'EMPLOI DES MOULES DURCIS AU BIOXYDE DE CARBONE POUR LES MOULAGES D'ACIER

(Résumé)

L'article expose les caractéristiques d'une installation pour la production centralisée du bioxyde de carbon, établie en base de la documentation soviétique de spécialité. L'installation est en fonction dans une de nos usines.

On montre que, dans les conditions des fabriques de machines, l'installation la plus simple et la plus efficace est celle qui part du traitement de la craie (ou des roches calcaires) par l'acide sulfurique.

En continuation, l'article présente les résultats des expériences faites en vue de l'extension de la coulées des pièces d'acide dans des moules durcis au bioxyde de carbone et portant sur la régénération et la préparation des sables de fonderie, leur capacité de laisser passer les gaz, etc.

BEITRAG ZUR ERWEITERUNG DER ANWENDUNG DER KOHLENSÄUREHÄRTUNG BEI STAHLGUSSFORMEN

(Zusammenfassung)

Es werden die Merkmale der Anlage für die zentrale Erzeugung von Kohlensäure dargestellt, auf Grund der sowietischen Fachliteratur ; die Anlage ist in Betrieb bei einem unserer Werke.

Es wird gezeigt dass in den Bedingungen der Maschinenbauwerke das einfachste und sicherste Verfahren ist die Behandlung von Kreide (oder Kalkstein) mit Schwefelsäure.

Ferner werden Ergebnisse von Forschungen mitgeteilt über das Giessen von Stahl in mit Kohlensäure gehärteten Formen, vom Standpunkt der Aufbereitung und Wiederverwendung des Formsandes und der Gasdurchlässigkeit, mit dem Zweck einer erweiterten Anwendung des Kohlensäureverfahrens.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

ENERGETICĂ

BERECHNUNG DER WIRTSCHAFTLICHEN FALLHÖHEN DER WASSERKRAFTWERKE *)

von DORIN PAVEL

1. EINLEITUNG

Im Wettbewerb mit den Wärmekraftwerken sind die Wasserkraftwerke umso wirtschaftlicher, je niedriger die Einheitsinvestion $i = \frac{J}{P_a} \left(\frac{\text{lei}}{kW} \right)$ und der Strompreis $p = \frac{a\, i}{E} \left(\frac{\text{lei}}{kWh} \right)$ erzielt werden können.

Diese wirtschaftlichen Kennziffern werden durch verschiedene vorteilhafte Massnahmen bei dem Entwurf und Bau erreicht, von welchen in dieser Studie die Vergrösserung der Fallhöhen untersucht wird.

An Hand von neuen analytischen Methoden wird bewiesen, dass grössere Fallhöhen H., d.h. Schemas mit geringen Kraftwerkstufen auf einem Wasserlauf, sowohl i, wie auch p günstig beeinflussen. Diese Tatsache ist den projektierenden Ingenieuren praktisch-qualitativ bekannt, jedoch verfügen dieselben nicht über analytische Rechnungsmethoden und sind gezwungen, durch Ausarbeitung zahlreicher Projektvarianten und Kostenvoranschlägen, die jeweils günstigste Lösung empirisch zu treffen. Viele tausende Arbeitsstunden können erspart warden, wenn entsprechende Berechnungsmethoden entwickelt werden, welches das Ziel dieser Studie bilden.

Zu diesem Zweck werden die Wasserbauanlagen und die elektromechanischen Ausrüstungen einzeln behandelt, letztere in drei Typen von Maschinensätzen mit Pelton —, Francis — und Kaplanturbinen. Die bequeme Anwendbarkeit wird durch einige praktische Beispiele bewiesen, in denen auch die grosse Zeitersparnis bei den Entwurfsarbeiten ersichtlich ist.

---

*) Mitteilung an die Session wissenschaftlicher Forschungsarbeiten, 17—18, Dezember 1960.

2. EINFLUSS DER FALLHÖHEN AUF DIE WIRTSCHAFTLICHKEIT VON HOCHDRUCK-KRAFTWERKEN

2.1. *Die Berechnungsmethode.*

Laut Schema Abb. 1 bedeuten: $H = H_0 + h\ L^n$ — die Bruttofallhöhe, H_0 — die durch die Talsperre erzeugte Fallhöhe und hL^n — diejenige der Stollen und Drucleitungen. Da H_0, für eine bestimmte Anlage, von der nötigen nutzbaren Speicherung V_n abhängt, kann sie als „Invariante" unserer Aufgabe betrachtet werden. Desleichen ist die Ausbauwassermenge $Q_a = k_a Q_m$ eine unveränderliche Grösse, da die mittlere langjährige Wassermenge Q_m und der Ausbaukoeffizient $k_a = f(V_n)$, gegeben sind.

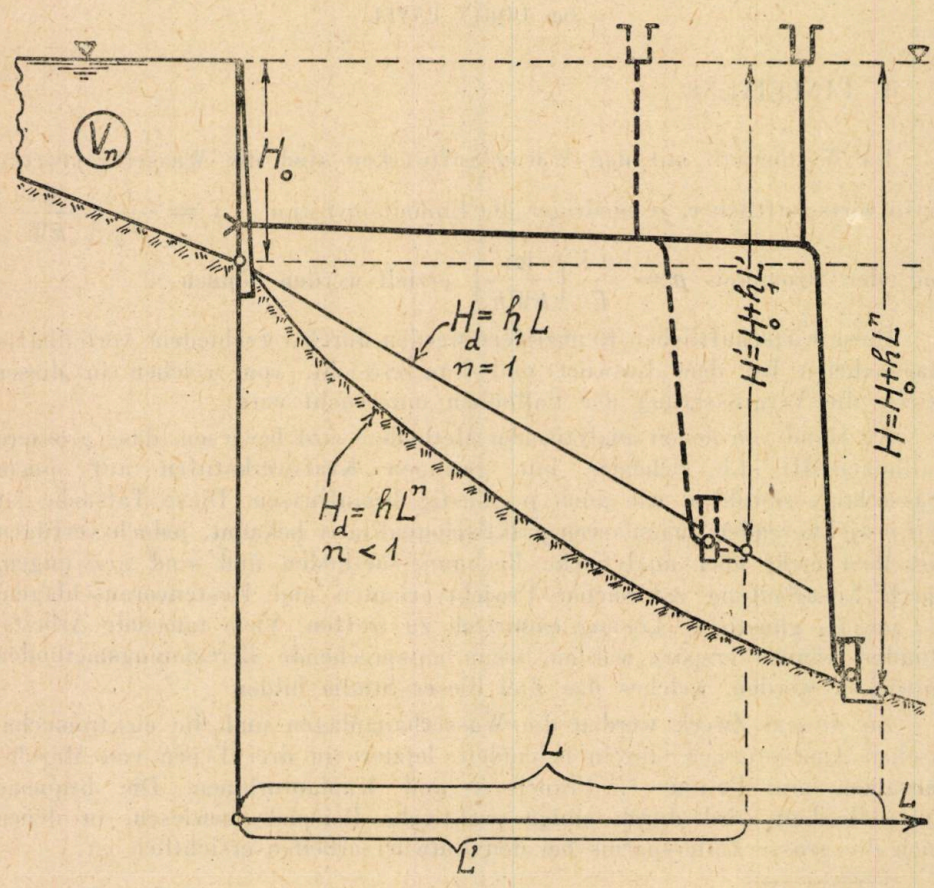


Abb. I. Schema der Hochdruck Kraftwerke bei verschiedenen Längsprofilen des Flusslaufes

Bedeutet J_0 — Investition der Talsperre mit Nebenanlagen und $J_w = J_o + J_d$ für alle wasserbaulichen Anlagen, so ist:

$$J_w = J_o + C\,k^2\,Q_a^{6/7}\,\frac{L}{(H_o + h\,L^n)^{2/7}} \tag{1}$$

Die Investitionen sämtlicher Stollen und Leitungen $J_d = C\,D^2\,L$, sind abhängig von dem Durchmesser $D = k\left(\frac{Q_a^3}{H}\right)^{1/7}$ und der Gesamtlänge L, wobei C und k aus Kostenvoranschlägen bestimmbar sind. Die Ausbauleistung $P_a = 9{,}81\,Q_a\,H\eta \sim 8\,Q_a\,(H_o + hL^n)$ ergibt die spezifische Investition

$$i_w = \frac{J_w}{P_a} = \frac{J_o}{8\,Q_a\,(H_o + h\,L^n)} + \frac{C\,k^2}{8\,Q_a^{1/7}}\cdot\frac{L}{(H_o + hL^n)^{9/7}} = \frac{d}{H} + \frac{e\,L}{H^{1{,}286}} \tag{1'}$$

Die Energieerzeugung $E = KQ_m\,H$ (kWh/J), wird mit $Q_m = Q_a/k_a$:

$$E = \frac{K}{k_a}\,Q_a\,(H_o + h\,L^n) \qquad \frac{kWh}{Jahr} \tag{2}$$

Die direkten und indirekten Jahreskosten $A_w = a_w\,J_w$ können mit $a_w = 0{,}04$ — $0{,}05$ berechnet werden und für andere Länder mit entsprechenden Koeffizienten. Die Komponente der Energiekosten für die Wasserbauanlagen $p_w = a_w\,\frac{J_w}{E}$ (lei/kWh) ergibt, mit $p_a = a_a\,\frac{J_a}{E}$ der elektromechanischen Ausrüstungen, die Eigenkosten $p = p_w + p_a$, die geringer sind als der Strompreis, der noch andere Anteile zu tragen hat. Demnach ist

$$p_w = \frac{a_w\,k_a}{K\,Q_a}\cdot\frac{J_o + C\,k^2\,Q_a^{6/7}\,\dfrac{L}{(H_o + hL^n)^{2/7}}}{H_o + h\,L^n} = \tag{3}$$

$$= \frac{F}{H_o + h\,L^n} + \frac{G\,L}{(H_o + h\,L^n)^{9/7}}$$

abhängig von der Ausbaustrecke L als unabhängige Veränderliche und der Parameter: $F = \frac{a_w\,k_a}{K\,Q_a}\,J_o$; $G = \frac{a_w\,k_a\,C\,k^2}{K\,Q_a^{1/7}}$

Die wirtschaftliche Länge folgt aus der Lösung der Gl. (4):

$$\frac{\partial p_w}{\partial L} = \frac{G}{(H_o + h\,L^n)^{9/7}} - \frac{9\,G\,n\,h\,L^n}{7\,(H_o + h\,L^n)^{14/7}} - \frac{F\,n\,h\,L^{n-1}}{(H_o + h\,L^n)^{14/7}} = 0 \tag{4}$$

Die Flüsse haben Längsprofile verschiedener Formen, von denen hier drei häufigere Beispiele erwähnt werden:

Fall $n = 1$: Flusslauf mit gleichförmigem Rinngefälle $i = \frac{dH}{dL} = h_1$

als Parameter, ergibt $H = H_0 + h_1 L$; $p_w = \dfrac{F}{H_o + h_1 L} + \dfrac{G L}{(H_o + h_1 L)^{9/7}}$

Fall $n = 3/4$, mit $H = H_o + h_{3/4} L^{3/4}$;

$$p_w = \frac{F}{H_o + h_{3/4} L^{3/4}} + \frac{G L}{(H_o + h_{3/4} L^{3/4})^{9/7}}$$

$$\frac{\partial p_w}{\partial L} = \frac{G}{(H_o + h_{3/4} L^{3/4})^{9/7}} - \frac{27\, G\, h_{3/4} L^{3/4}}{28\, (H_o + h_{3/4} L^{3/4})^{16/7}} -$$

$$- \frac{3 F L}{4 L^{1/4} (H_o + h_{3/4} L^{3/4})^{14/7}} = 0$$

Fall $n = 1/2$: parabolisches Längsprofil, welches am häufigste erscheint, mit: $H = H_o + h_{1/2} L^{1/2}$; $p_w = \dfrac{F}{H_o + h_{1/2} L^{1/2}} + \dfrac{G L}{(H_o + h_{1/2} L^{1/2})^{9/7}}$

$$\frac{\partial p_w}{\partial L} = \frac{G}{(H_o + h_{1/2} L^{1/2})^{9/7}} - \frac{9\, G\, h_{1/2} L^{1/2}}{14\, (H_o + h_{1/2} L^{1/2})^{16/7}} -$$

$$- \frac{F\, h_{1/2}}{2 L^{1/2} (H_o + h_{1/2} L^{1/2})^{14/7}} = 0$$

Wie aus den obigen Gleichungen und folgenden Beispielen ersichtlich ist, nimmt L_{opt} Werte an zwischen O und ∞, je nach den Werten der Parameter n h. Aus L_{opt} folgt auch die günstigste Fallhöhe H_{opt} demmach wirtschaftlichere Ausbau-Schemas. Es sei noch bemerkt, dass die gesamten Eigenkosten $p_g = p_w + p_a + p_o$ betragen, wobei p_a in den Abschnitten 4—6 berechnet werden und die Komponente p_o die allgemeinen zusätzlichen Kosten darstellt, wie: Landerwerb, Entschädigungen, Flussregulierungen, Forschung- und Projektierungsarbeiten, allgemeine Regie der Bauorganisation, Steuern u. a.

2.2. *Praktische Anwendungen.*

Als Invarianten seien angenommen: $Q_m = 10$; $Q_a = 30$ m³/Sek; $H_o = 70$ m; $J_o = 160$ Mill · lei; $a_w = 0{,}04$. Die Analyse von Hochdruckwerken mit Stausee und Derivationen, für unsere Verhältnisse, ergibt die Konstanten: $C = \dfrac{J_d}{D^2 L} = 4\,000$ lei/m³; $k = D \left(\dfrac{H}{Q_a^3}\right)^{1/7} = 1{,}583$; $K = \dfrac{E}{Q_m H} =$

$= 67\,000$, bei $E = 9{,}81 \cdot 8.760\, Q_m H \eta \varepsilon = 67\,000\, Q_m (H_o + h L^n)$, mit dem Gesamtwirkungsgrad $\eta = 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}96 \sim 0{,}82$ und $\varepsilon = 0{,}95$ -Ausnützungsfaktor des jährlichen Wasservorrates. Aus (1) folgt $J_o = 160\,000\,000 +$

$+ 184\,940 \dfrac{L}{(H_o + h L^n)^{2/7}}$ und $A_w = a_w J_w = 6\,400\,000 + 7\,400 \dfrac{L}{(70 + h L^n)^{2/7}}$

Fall $n = 1$ ergibt, für den Parameter $h_1 = 0{,}01$ bis $0{,}1$:

$$A_1 = 6\,400\,000 + \frac{7\,400}{(70 + h_1 L)^{2/7}} \quad , \qquad \text{lei/Jahr}$$

$$E = 670\,000\,(70 + h_1 L) \quad , \qquad kWh/J$$

$$p_w = \frac{A_1}{E} = \frac{9{,}55}{70 + h_1 L} + \frac{0{,}011\,L}{(70 + h_1 L)^{9/7}} \quad , \qquad \frac{\text{lei}}{kWh}$$

Fall $n = 3/4$, mit $h_{3/4} = 0{,}1$ bis 1, hat in ähnlicher Weise:

$$p_w = \frac{9{,}55}{70 + h_{3/4} L^{3/4}} + \frac{0{,}011\,L}{(70 + h_{3/4} L^{3/4})^{9/7}} \quad \text{zur Folge;}$$

Fall $n = 1/2$, mit $h_{1/2} = 1$ bis 10, gibt

$$p_w = \frac{9{,}55}{70 + h_{1/2} L^{1/2}} + \frac{0{,}011\,L}{(70 + h_{1/2} L^{1/2})^{9/7}}$$

Die zahlenmässige Auswertung von p_w (Abb. 2) führt zu den Ergebnissen:

Für gleichförmige Längsprofile $n = 1$ und $h_1 > 0{,}02$ (Rinngefälle $i > 20$ m/km) erzielt man p_w-min bei umso grösserer Länge L, je grösser i beträgt, d.h. je grösser H ist. Bei kleinen i, ist p_w günstiger für kleinere L und bei $i < 10$ m/km ist $L = 0$, d.h. das Talsperrenkraftwerk ohne Zuleitungen ist wirtschaftlicher.

Für parabolische Längsprofile $n = 1/2$, steigt die günstigste Länge L-opt, sowie H-opt, je nach der Grösse von $h_{1/2}$ nach Tafel 1.

Tafel 1

Die wirtschaftliche Fallhöhe H_{opt} bei parabolischem Längsprofil

$h_{1/2} =$		1	2	3	4	6	8	10
$(p_w)_{min}$ bei	L_{opt} (m)	1000	1500	2400	4000	5000	6000	8000
	H_{opt} (m)	101,6	147,5	217	322,9	494,2	689,7	964,5

Für Profile mit $n = 3/4$, bei $h_{3/4} > 0{,}25$, d.h. bei Rinngefällen $i > \frac{0{,}25}{L^{1/4}}$ ist p_w-min bei sehr grossen Längen $L > 20\,000$ m. Bei $h_{3/4} = 0{,}2$ sinkt $L_{opt} = 2000$ m.

Die wenigen Beispiele zeigen wie einfach und rasch die günstigste Fallhöhe bestimmt werden kann. Allerdings ist die Methode nur für Vorprojekte anwendbar, da nach Erzielung von H-opt, bei dem technischen Projekt, die örtlichen geologisch-topographischen Verhältnisse hinzukommen. Diese verschieben die endgültige Fallhöhe H etwas über, bezw. unter H-opt.

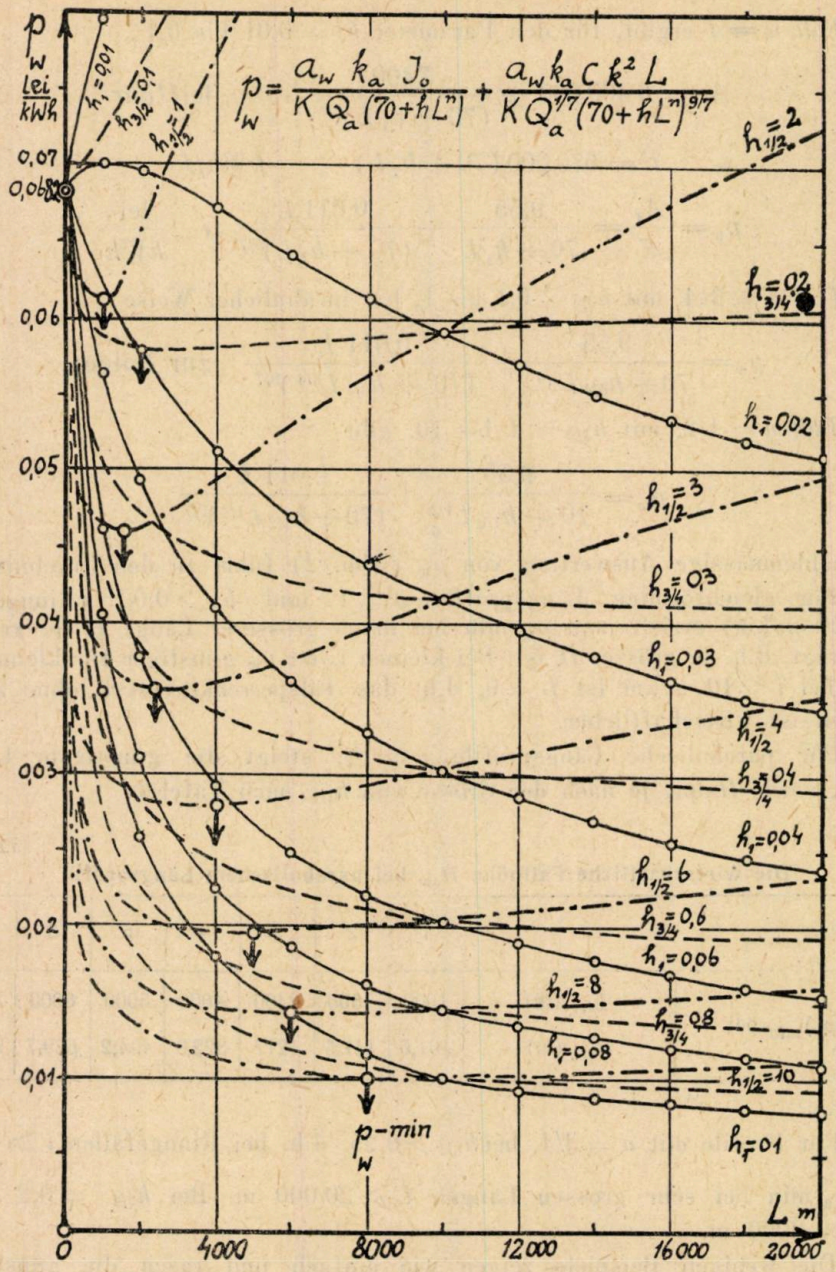


Abb. 2. Komponente p_w lei/kWh, für die Wasserbauten der Hochdruck-Kraftwerke, laut Abb. 1

3. EINFLUSS DER FALLHÖHE AUF DIE WASSERBAUANLAGEN DER STAUKRAFTWERKE

3.1. *Rechnungsmethode für die spezifischen Investitionen.*

Die Anordnung der Fluss-Staukraftwerke weist baulich verschiedene Varianten auf; alle bestehen im Prinzip aus: Krafthaus, Stauwehre, mit oder ohne Schleusen, und Nebenanlagen. Die Investition J_w hängt von vielen Parametern ab, von denen H am wichtigsten ist. Die entsprechenden J_a für die Ausrüstungen werden unter 4—6 behandelt und die zusätzlichen J_o hinzugeschlagen.

Es bedeuten in der weiteren Ausführung: L_f — die gesamte Frontlänge der Wasserbauten zwischen beiden Ufern; k-ein Vergleichskoeffizient für geotechnische Verhältnisse und Art der Bauorganisation: 1 bei günstigsten Bedingungen, bis 1,6 für schwierige Verhältnisse; k_s-Faktor für die Schleusenart: 1-für Doppelschleusen der Grosschiffahrt, 0,9 für einfache Schleusen und Schiffe unter 1000 T, bezw. 0,8 bei K.W. ohne Schleusen. Die Analyse ergab, für rumänische Verhältnisse, in $\frac{\text{lei}}{kW}$

$$i_w = 3\,430\, k\, k_s \left(\frac{L_f}{Q_m}\right)^{0,2} \left(1 + \frac{14,4}{H} - \frac{3,83}{H^{0,5}}\right) \tag{5}$$

3.2. *Die Eigenkosten der Energie für die Wasserbauanlagen.*

Die Energieerzeugung $E = KQ_m H$ (kWh/J) hängt von folgenden Faktoren ab: H-Brutto-gleich Nettofallhöhe bei Staukraftwerken; $Q_m = Q_a/k_a$ die mittlere langjährige Wassermenge in m^3/S, gegenüber der Ausbauwassermenge Q_a; $\eta = \eta_t\, \eta_g$-Gesamtwirkungsgrad der Turbinen η_t und Generatoren η_g bei Q_m; $\varepsilon = \frac{1}{T_o Q_m} \int_0^{To} Q_u\, dt$-Nutzungsfaktor des jährlichen Abflusses, mit $T_o = 31,56 \cdot 10^6$ Sek/Jahr und Q_u momentane Turbinenwassermenge; $\varphi < 1$ Reduktionsfaktor der Fallhöhe durch die mittleren jährlichen Staukurven:

$$E = 85\,936\, \eta\, \varepsilon\, \varphi \frac{Q_a}{k_a} H \qquad kWh/Jahr, \tag{6}$$

Die Verbrauchsdauer T ist bei Fluss-Staukraftwerken, mit der variablen Fallhöhe H, gegenüber der höchst zulässigen H_{max}, bestimmt:

$$T = \frac{E}{P_a} = 5\,600 \left(\frac{H_{max}}{H}\right)^{0,14} \qquad h/J \tag{8}$$

Die Komponente $p_w = a_w \frac{J_w}{E} = a_w \frac{i_w P_a}{T P_a} = a_w \frac{i_w}{T}$ wird mit (5) und (7):

$$p_w = 0,6125\, a_w \frac{k\, k_s}{H_{max}^{0,14}} \left(\frac{L_f}{Q_m}\right)^{0,2} \left(H^{0,14} + \frac{14,4}{H^{0,86}} - \frac{3,83}{H^{0,36}}\right) \frac{\text{lei}}{kWh} \tag{8}$$

Bei gleicher baulichen Anordnung der Staukraftanlage und wachsender Fallhöhe, sinkt p_w und entsprechend der Strompreis $p_g = p_w + p_a + p_o$

3.3. *Anwendungen der vorgeschlagenen Methode.*

Als Beispiele für die Anwendung der obigen Methode werden vier Staukraftwerke, willkürlich gewählt, die ersten zwei auf der unteren Donau mit Doppelschleusen für Gross-Schiffahrt, das dritte mit einfacher Kleinschiffahrt-Schleuse und das vierte auf einem kleineren Flusslauf ohne Schiffahrt. Die Faktoren Q_m, L_f,k,k_s und η, wie auch h-die mittlere Wassertiefe längs des Stausektors, bei $Q_{1\%}$ Hochwasser (1/100 Jahre) bezogen, sind in der Tafel 2 angeführt. Die spezifischen i_w nach Gl. (5) und p_w nach Gl. (8), sind in der Tafel 2 ausgerechnet.

Tafel 2

Wirtschaftliche Kennziffern der Wasserbauanlagen der Staukraftwerke, nach Gl. (5) und (8).

H (m)	Eis. Tor-Donau		Cernavoda-Donau		KW — Olt		KW kleiner Fluss	
	$i_w\left(\frac{\text{lei}}{\text{kW}}\right)$	$p_w\left(\frac{\text{lei}}{\text{kWh}}\right)$	i_w	p_w	i_w	p_w	i_w	p_w
5	—	—	10 720	0,0611	—	—	12 796	0,0729
10	3 006	0,0185	6 076	0,0383	—	—	7 247	0,0457
15	2 371	0,0154	4 792	0,0320	4 151	0,0259	5 725	0,0382
20	2 112	0,0143	4 268	0,0296	3 697	0,0240	5 091	0,0353
25	1 980	0,0138	4 001	0,0286	3 466	0,0232	4 773	0,0341
30	1 909	0,0136	—	—	3 342	0,0231	—	—
35	—	—	—	—	3 269	0,0230	—	—
40	—	—	—	—	3 225	0,0230	—	—
$Q_m\left(\frac{m^3}{S}\right)$	5 450		6 000		160		45	
L_f (m)	1 000		10 000		300		270	
k	1		1,3		1,22		1,5	
k_s	1		1		0,9		0,8	
$\eta = \eta_t \eta_g$	0,9		0,9		0,88		0,87	
h (m)	20		20		5		5	

Es wurden desgleichen bestimmt: $a_w = 0{,}04$: $\eta = \eta_t \eta_g = 0{,}9$ für die Donaukraftwerke, 0,88 für Olt-KW und 0,87 für das letzte Kraftwerk, $\varepsilon = 1 - \frac{0{,}2}{H^{0{,}5}}$ und $\varphi = 1 - \frac{90}{(H+h)^2}$ Faktoren die für unsere grossen Flüsse gültig sind. Laut Tafel 2 und Abb. 3 sinken i_w und p_w mit wachsender Fallhöhe. Bei der Anwendung der Methode für andere Verhältnisse und Währungen sind die Koeffizienten nachzurechnen.

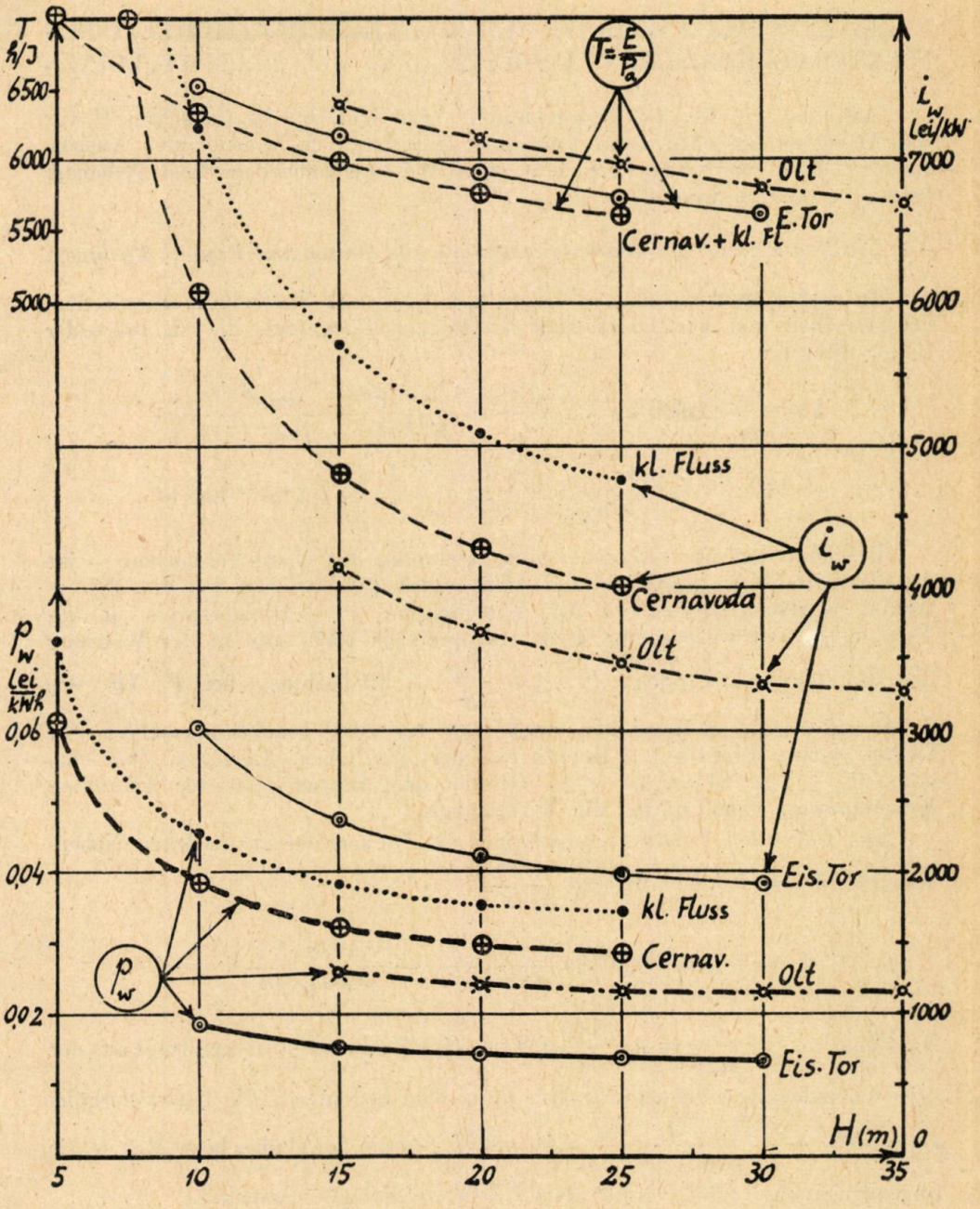


Abb. 3. Spezifische Investition i_w und Eigenkosten p_w der Wasserbauten für Staukraftwerke

4. EINFLUSS DER FALLHÖHE AUF DIE WIRTSCHAFTLICHKEIT DER ELEKTROMECHANISCHEN AUSRÜSTUNGEN MIT PELTONTURBINEN

Aehnlich wie für die Wasserbauteile wird hier der Einfluss von H für die Ausrüstungen entwickelt, bezeichnet mit Index a, wobei unter Ausrüstungen: Turbinen Generatoren und sämtliche elektromechanischen Nebenanlagen, verstanden werden.

4.1. *Die Begrenzung der Anwendungsgebiete von Pelton-und Francis Turbinen.*

In vorher erschienenen Aufsätzen [1]. [4], sind die hydromechanischen, energetischen und wirtschaftlichen Grundlagen festgelegt, die zu folgender Bilanz führen:

$$336\,\frac{p_h}{p}\left[1{,}606\,\Phi_P\left(22\,\frac{H^{0,5}}{n_P}+\frac{P^{0,5}}{H^{0,75}}\right)^{2,5}-\frac{\Phi_F\,P^{0,875}}{F^{1,173}\,H^{1,312}}\right]+$$
$$+\,617\,\frac{p_e}{p}\,P^{0,75}\left(\frac{1}{n_P^{0,75}}-\frac{1}{n_F^{0,75}}\right)\gtreqless\frac{1}{k}\int_o^T Q\,H\,(\eta_P-\eta_F)\,dt \qquad (9)$$

Erscheint aus der zahlenmässigen Rechnung das obere Vorzeichen so ist die Francisturbine günstiger und beim unteren Vorzeichen ist die Peltonturbine wirtschaftlicher. In Gl. 9 bedeuten: p_h — Einheitspreis je kg Turbine, p_e — für Generator, p der Stropreis je kWh, alle in der Währung des betreffenden Landes; $P = 1{,}4\,\frac{P_a}{m}$ in PS/Turbine, bei P_a *kW* des Kraftwerkes mit m-Maschinensätzen; n_P n_F die Umdrehungszahlen für Pelton, bezw. Franscis; k-Koeffizient der jährlichen Ausgaben (bei uns 0,06—07); $T_o = 31{,}56 \cdot 10^6$ *S/J*; *QH*-aus dem Betriebsplan der bekannten Momentanwerte und η_P η_F die Wirkungsgrade.

Die folgenden Funktionen enthalten die Quoten der zusätzlichen Nebenanlagen: $\Phi_P = 1{,}338 - 0{,}0023\,\frac{P^{1,5}}{H^{2,25}}$

$$\Phi_F = 1{,}532 + 0{,}00384\,\frac{P^{0,5}}{F^{0,67}\,H^{0,75}} - \frac{0{,}1078\,P^{0,25}}{F^{0,335}\,H^{0,375}}$$

Die Funktion $F = \frac{n_s}{329} = lg\,\frac{45{,}45}{H}\,(H_b - H_s)$ für Francisturbinen folgt aus der grössten zulässigen Schnelläufigkeit n_s wobei bedeuten: die Barometerhöhe $H_b = 10{,}33 - \frac{A\,(M\ddot{u}\,M)}{900} - \frac{p_v}{\gamma} \leqslant 10$ und $H_s > 0$ die Saughöhe, bezw. $H_s < 0$ die Gegendruckhöhe. (Rotor unter dem *UW*-Wasserspiegel versenkt).

Die zahlenmässige Auswertung der Gl. (9) ergibt rasch die günstigste Turbinentype, somit wird grosse Zeit-und Projektierungsarbeit-Ersparnis erzielt.

4.2. *Die Kosten der Ausrüstungen.*

Aus den hydromechanischen Grundgleichungen wurden in [1], [4] die Gewichte der Peltonturbine-Generator-Hilfsanlagen bestimmt. Aus diesen folgt die Investition:

$$J_P = 5\,300\,\Phi_P\,p_h\left(22\,\frac{H^{0,5}}{n_P}+\frac{P^{0,5}}{H^{0,75}}\right)^{2,5}+6\,050\,p_e\left(\frac{P}{n_P}\right)^{0,75} \tag{10}$$

Bei einer Peltonturbine mit M-Düsenist die Umdrehungszahl $n_P = 20\,M^{0,5}\,\frac{H^{1,25}}{P^{0,5}}$ und durch Einführung der obigen Funktion Φ_P wird:

$$J_P=\left(7\,091\,p_h\,\frac{P^{1,25}}{H^{1,875}}-12{,}2\,p_h\,\frac{P^{2,75}}{H^{4,125}}\right)\left(\frac{1{,}1}{M^{0,5}}+1\right)^{2,5}+640\,p_e\,\frac{P^{1,125}}{M^{0,375}\,H^{0,938}} \tag{10'}$$

J_P ist in derjenigen Währung ausgedrückt in welcher p_h und p_e gegeben sind, einschliesslich Transport, Montage und Quote der allgemeinen Kosten z.B. für unsere Verhältnisse $p_h = 45$; $p_e = 52{,}5$ lei/kg.

Die entsprechende spezifische Investition $i_a = 1{,}4\,\frac{J_P}{P}$ (lei/kW), wird nach Umrechnung für sämtliche Ausrüstungen:

$$i_a=\left(446\,700\,\frac{P^{0,25}}{H^{1,875}}-768\,\frac{P^{1,75}}{H^{4,125}}\right)\left(\frac{1{,}1}{M^{0.5}}+1\right)^{2,5}+\frac{46\,650\,P^{0,125}}{M^{0,375}\,H^{0,938}} \tag{11}$$

Betrachtet man P M als gegebene Parameter und H als Veränderliche der Aufgabe, so vereinfacht sich (11) zu (11′)

$$i_a=\frac{a}{H^{1,875}}-\frac{b}{H^{4,125}}+\frac{c}{H^{0,938}} \tag{11'}$$

somit sinkt i_a mit wachsender Fallhöhe nach einer Hyperbel höherer Ordnung. Ersetzt man P durch $Q = P/11{,}8\,H$ und $M = 7{,}4\,\frac{Q}{H^{0,5}}$ durch die Turbinenwassermenge Q als Parameter so wird i_a nach (11″)

$$i_a=\left(825\,950\,\frac{Q^{0,25}}{H^{1,625}}-56\,855\,\frac{Q^{1,75}}{H^{2,375}}\right)\left(0{,}404\,\frac{H^{0,25}}{Q^{0,5}}+1\right)^{2,5}+\frac{30\,134}{Q^{0,25}\,H^{0,625}} \tag{11''}$$

Die Komponente der Eigenkosten für die Ausrüstungen ist entsprechend:

$$p_a = a_a\,\frac{i_a}{T}$$

wobei $T = E/P_a$ und $a_a = 0{,}06...0{,}07$ bekannt sind. Für das Wasserkraftwerk ist der Strompreis $p_g = p_w + p_a + p_o$ leicht bestimmbar in Abhängigkeit von H.

4.3. *Anwendungen für Hochdruck-Kraftwerke mit Peltonturbinen.*

Für den Entwurf eines Ausbauplanes in verschiedenen Varianten betreffs der Grösse der Fallhöhe, bei gegebenen Parametern $P\ M$, ist Abb. 4 nützlich. Nach Gl. (11′) ist i_a durch $a\ b\ c$ bestimmt:

$$i_a = \frac{a}{H^{1,875}} - \frac{b}{H^{4,125}} + \frac{c}{H^{0,938}} \quad ; \quad b = 764\ P^{1,75}\left(\frac{1,1}{M^{0,5}} + 1\right)^{2,5} ;$$

$$a = 446\,700\ P^{0,25}\left(\frac{1,1}{M^{0,5}} + 1\right)^{2,5} \quad ; \quad c = 46\,950\ \frac{P^{0,125}}{M^{0,375}} ;$$

Desgleichen ist p_a bekannt, bei den Konstanten $A = a_a \frac{a}{T}$; $B = a_a \frac{b}{T}$;

$$C = a_a \frac{c}{T}$$

$$p_a = a_a \frac{i_a}{T} = \frac{A}{H^{1,875}} - \frac{B}{H^{4,125}} + \frac{C}{H^{0,938}} \qquad (11''')$$

Es sei das Flussprofil parabolisch $n = 1/2$, demnach $H = H_o + h_{1/2}\ L^{1/2}$ bekannt und für die Wasserbauten i_w mit Konstanten $d\ e$ folgt:

$$i_w = \frac{d}{h} + \frac{e\ L}{H^{1,286}} ; \quad d = \frac{J_o}{8\ Q_a} ; \quad e = \frac{C\ k^2}{8\ Q_a^{1/7}}$$

$$p_w = \frac{F}{H} + \frac{G\ L}{H^{1,286}} ; \quad F = \frac{a_w k_a}{K\ Q_a} J_o ; \quad G = \frac{a_w k_a\ C\ k^2}{K\ Q_a^{1/7}}$$

Für die Wasserbauten und säntliche Ausrüstungen, jedoch ohne die zusätzlichen p_o, betragen die Eigenkosten:

$$p = p_w + p_a = \frac{A}{H^{1,875}} - \frac{B}{H^{4,125}} + \frac{C}{H^{0,938}} + \frac{F}{H} + \frac{G\ (H - H_o)^2}{64\ H^{1,286}}, \quad \left(\frac{\text{lei}}{kWh}\right)$$

und durch $\frac{\partial p}{\partial H} = 0$ folgt die wirtschaftlichste Lösung:

$$\frac{1;875\ A}{H^{0,875}} - \frac{4,125\ B}{H^{3,126}} + 0,938\ C\ H^{0,062} + 0,0201\ G\ \frac{(H - H_o)^2}{H^{0,286}} -$$

$$- 0,0313\ G\ (H - H_o)\ H^{0,714} + F = 0$$

Zahlenbeispiel: Es seien, ähnlich wie im Abschnitt 2,2., $n = 1/2$; $h_{1/2} = 8$; $H_o = 70$; $H = 70 + 8\ L^{1/2}$; $a_a = 0,07$; $\left(\frac{1,1}{M^{0,5}} + 1\right)^{2,5} = 6,39$: $p_a = a_a \frac{i_a}{T} =$ $= 0,000\ 02664\ i_a$ und $p_w = \frac{9,55}{H} + \frac{0,011\ L}{H^{1,286}}$ wie im Abschnitt 2. Die Berechnungsgebnisse aus der Tafel 3 und Abb. 4 zeigen, dass $p_{min} = 0,0406$ bei $L = 20\,000$ m und $H_{opt} = 1\,203$ m ist.

Tafel 3

Eigenkosten der Energie $p = p_w + p_a \left(\frac{\text{lei}}{\text{kWh}}\right)$ für ein Hochdruckkraftwerk.

L (m)	1000	2000	4000	6000	10 000	20 000	30 000
H (m)	323	428	576	689	870	1203	1456
p_w lei/kWh	0,0362	0,0314	0,029	0,0288	0,0294	0,0314	0,0350
p_a lei/kWh	0,0398	0,0279	0,020	0,0165	0,0128	0,0092	0,0077
$p = p_w + p_a$	0,0760	0,0593	0,0490	0,0453	0,0422	0,0406	0,0427

Der Anteil an den allgemeinen Kosten $p_o = \alpha\ (p_w + p_a)$, wie schon Abschnitt 2 erwähnt wurde, ergibt den Strompreis $p_g = (1 + \alpha)\ (p_w + p_a)$. Bei Hochdruckwerken ist im Mittel $\alpha = 0{,}25$, d.h. $p_{g\,min} = 1{,}25\ (p_w + p_a) = 0{,}051$ lei/kWh.

5. DIE ELEKTROMECHANISCHEN AUSRÜSTUNGEN BEI K.W. mit FRANCISTURBINEN

5.1. *Die vorgeschlagene Berechnungsmethode.*

Aehnlich wie unter 4, wird bei Krafwerken mit Francisturbinen das Gewicht sämtlicher Ausrüstungen und aus dieser die Investition J_F analytisch nach (12) ausgedrückt, wobei $F\ \Phi_F\ p_h\ p_e$ aus 4.1. folgen:

$$J_F = 3\,300\,\frac{\Phi_F\ p_h\ P^{0,875}}{H^{1,312}\ F^{1,173}} + 6\,050\ p_e \left(\frac{P}{n}\right)^{0,75} \tag{12}$$

Die spezifische Investition für sämtliche Ausrüstungen $i_a = 1{,}4\ \frac{J_P}{P}$ in lei/kW, ist wie im Abschnitt 4 mit $p_h = 45$ und $p_e = 52{,}5$ lei/kg berechnet:

$$i_a = \frac{318\,600}{P^{0,125}\ F^{1,173}\ H^{1,312}} + \frac{798\ P^{0,375}}{F^{1,843}\ H^{2,062}} - \frac{2\,241\ P^{0,125}}{F^{1,508}\ H^{1,687}} + \frac{5\,760\ P^{0,125}}{F^{0,75}\ H^{0,938}} \tag{13}$$

Werden die Parameter $P\ F$ durch $Q\ n_s$ ersetzt, $P = 11{,}8\ QH$; $n_s = 329\,F = 329\ \lg\ \frac{45{,}45}{H}\ (H_b - H_s)$, so folgt:

$$i_a = \frac{208\,776\,000}{Q^{0,125}\ n_s^{1,173}\ H^{1,437}} + \frac{83\,615\,000\ Q^{0,375}}{n_s^{1,843}\ H^{1,687}} - \frac{19\,010\,000\ Q^{0,125}}{n_s^{1,508}\ H^{1,562}} + \frac{603\,810\ Q^{0,125}}{n_s^{0,75}\ H^{0,813}} \tag{13'}$$

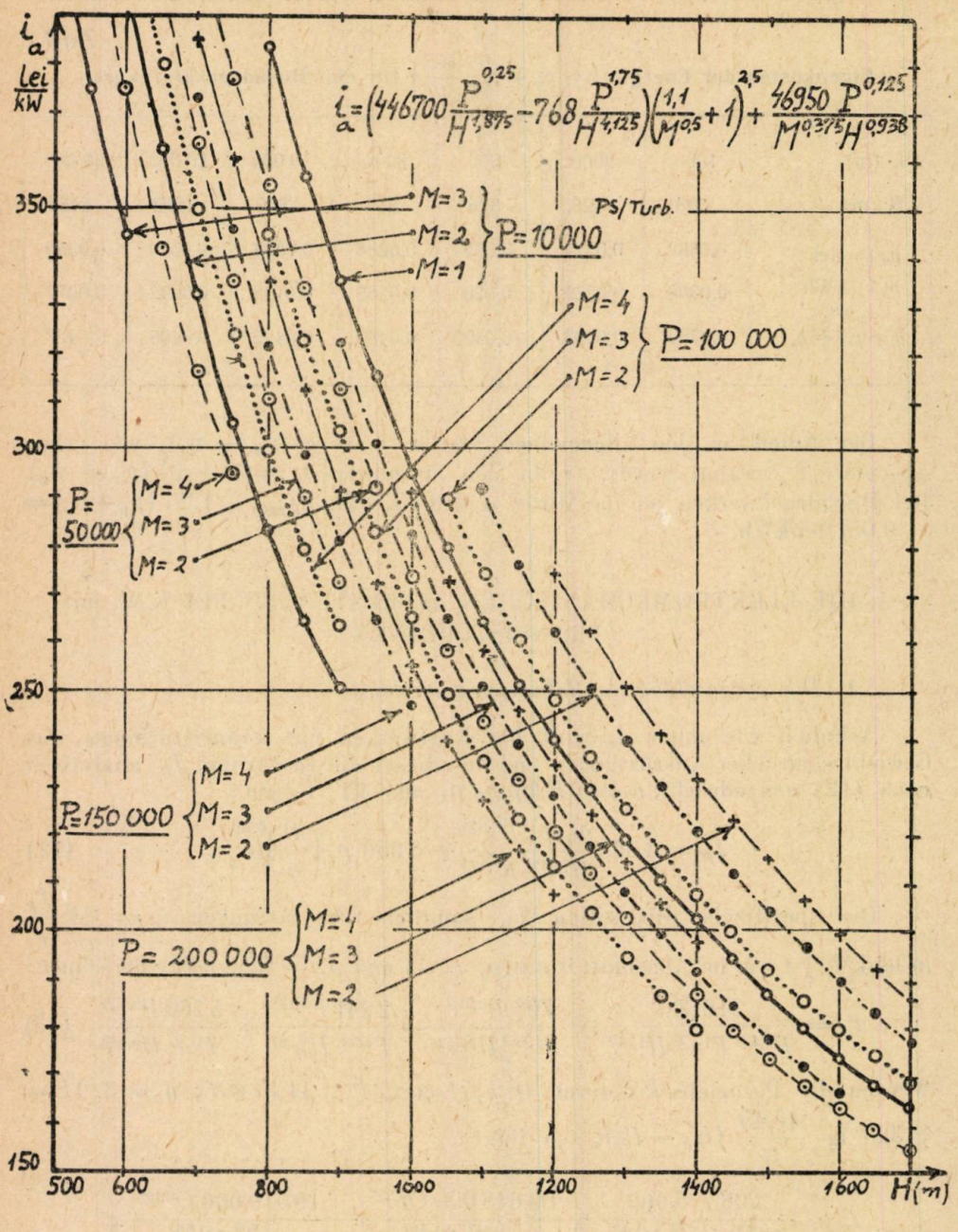


Abb. 4. Spezifische Investition i_a lei/kW für sämtliche elektromechanischen Ausrüstungen mit Peltonturbinen

Für eine Ausbauvariante sind Q und n_s bekannte Parameter und mit den Abkürzungen A B C D wird:

$$i_a = \frac{A}{H^{1,437}} + \frac{B}{H^{1,687}} - \frac{C}{H^{1,562}} + \frac{D}{H^{0,813}} \; ; \qquad (13'')$$

$$A = \frac{208\,776\,000}{Q^{0,125}\, n_s^{1,173}} \; ; \qquad B = \frac{83\,615\,000}{n_s^{1,813}}\, Q^{0,375}$$

$$C = 19\,010\,000\, \frac{Q^{0,125}}{n_s^{1,508}} \; ; \quad D = 603\,810\, \frac{Q^{0,125}}{n_s^{0,75}} \cdot$$

Die Komponente der Eigenkosten für die Ausrüstungen ist demnach:

$$p_a = a_a \frac{i_a}{T} = \frac{a_a A}{TH^{1,437}} + \frac{a_a B}{TH^{1,687}} - \frac{a_a C}{TH^{1,562}} + \frac{a_a D}{TH^{0,813}} \qquad (13''')$$

5.2. *Anwendung für i_a der Ausrüstungen bei Francisturbinen.*

Für Maschinensätze mit Francisturbinen, bei P (PS/Turbine) und F als Parameter lässt sich Tafel 4 leicht ausrechnen. Es ist dabei für verschiedene Fallhöhen H die günstigste Gegendruckhöhe $H_s < O$, nach den Studien [3], [4] berechnet, daraus folgen die höchsten zulässigen n_s und F.

Wählen wir den Parameter willkürlich $P = 10\,000$ bis $200\,000$ P.S./Turb., so folgt, nach Gl. 13, i_a lei/kW, und die unteren 5 Reihen der Tafel 4 weisen folgende Merkmale auf:

— Die Grösse der Einheitsleistung P hat einen geringen Einfluss auf i_a, u.z. bei $H < 100$ sinkt sinkt i_a mit wachsendem P, hingegen bei $H > 100$ wächst i_a, in geringem Masse, mit P;

— i_a sinkt hyperbolisch sehr ausgesprochen mit wachsender Fallhöhe z.B. für $P = 10\,000$ PS/Turbine sinkt i_a von 1008 bis 188,3 lei/kW, bei $H = 50$ bis 700 und ähnlich bei grösseren P.

Tafel 4

Die spezifische Investition i_a der Ausrüstugen mit Francisturbinen

P (PS/Turb.)	H (m)	50	100	200	300	400	500	600	700
	H_s (m)	0	0	—3	—6	—9	—12	—15	—18
	n_s max	315,5	216,5	154,8	126,5	110,0	99,0	91,2	85,4
	F-max	0,9586	0,6576	0,4706	0,3847	0,3345	0,301	0,2774	0,2596
10 000	i_a	1008	672	426,8	332,3	276	237,3	211,5	188,3
50 000		986	665	429,3	336	281	242,7	216,8	192,5
100 000	$\left(\frac{\text{lei}}{\text{kW}}\right)$	990	671	437	342	287	248,3	222	198
150 000		996	677	441,8	346,2	291,8	252,2	225,8	201
200 000		1002	683	447	351	296	256,5	229,5	204

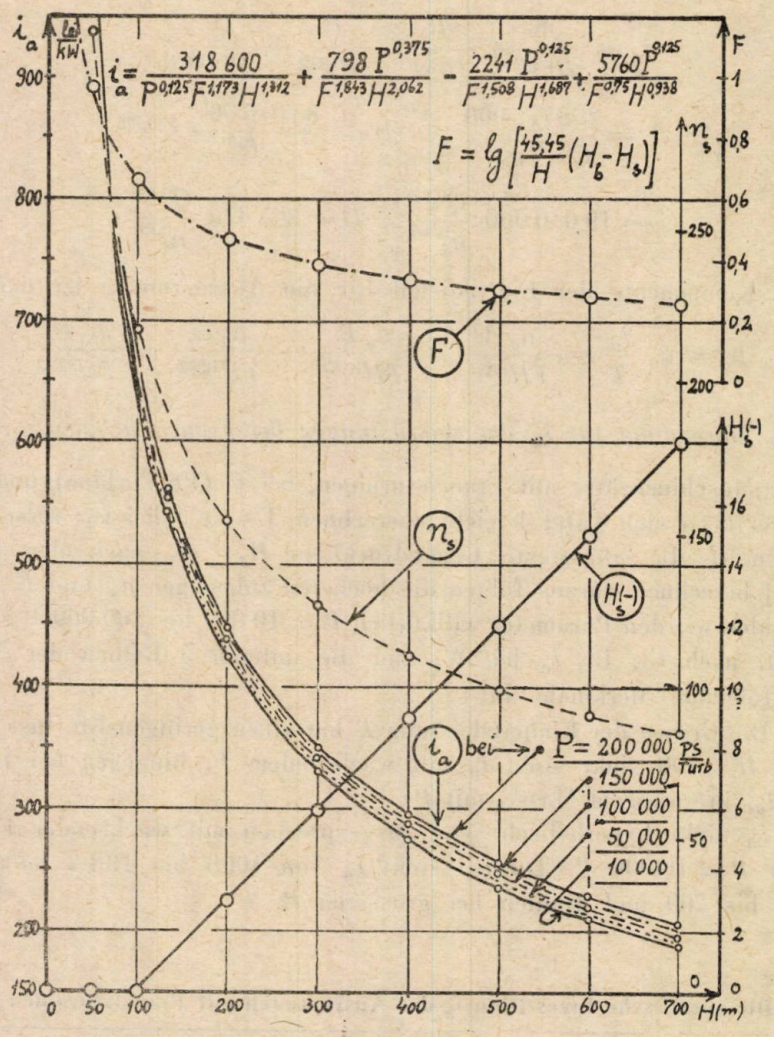


Abb. 5. Spezifische Investition i_a bei KW mit Francisturbinen.

5.3. *Die wirtschaftliche Fallhöhe der K.W. mit Francisturbinen.*

Die Begrenzung des Anwendungsbereiches zwischen den Francisturbinen für hohe Fallhöhen und den Peltonturbinen wurde durch die Bilanzgleichung (9) bestimmt. Ebenfalls wird die Begrenzung zwischen den Francisturbinen niedriger Fallhöhen und Kaplanturbinen im Abschnitt 6.1. behandelt.

Als Beispiel für die Anwendung der vorgeschlagenen Methode wird ein Fluss-Sektor mit $H = 70 + 6\ L^{1/2}$; $Q_a = 40\ m^3/S$, in $m = 2$ Maschinensätzen gewählt. Das Kraftwerk soll Spitzenenergie liefern mit $T = 2000$ Betriebsstunden pro Jahr. Weiter sind $a_a = 0{,}07$; $P_a = 9{,}81\ Q_a H\ \eta$ (kW); $P = 1{,}4\ \frac{P_a}{m} = 123{,}6\ H$ (P.S./Turb). In Tafel 5 sind i_a nach Gl. (13), sowie $p_a = a_a \frac{i_a}{T} = 0{,}000035\ i_a$ berechnet und für die Wasserbauten ist laut Abschnitt 2.2.

$$p_w = \frac{9{,}55}{H} + \frac{0{,}011\ L}{H^{1{,}283}}\ ;\quad i_w = \frac{T}{a_w}\ p_w = 50\,000\ p_w .$$

Tafel 5

Wirtschaftliche Kennziffern der Wasserkraftwerke mit Francisturbinen

L (m)	1000	2000	4000	6000	8000	10 000
H (m)	259,6	338,2	449	535	606	670
$i_w \left(\frac{\text{lei}}{\text{kW}}\right)$	2274	2030	1924	1925	1955	2000
i_a	366	312	261	233	210	202
$i_w + i_a$	2640	2342	2185	2158	2165	2202
$p_w \left(\frac{\text{lei}}{\text{kWh}}\right)$	0,04548	0,04060	0,03848	0,03850	0,03910	0,04000
p_a	0,01281	0,01092	0,00914	0,00816	0,00740	0,00705
$p_w + p_a$	0,05829	0,05152	0,04762	0,04666	0,04650	0,04705

Die günstigste Lösung $p_{min} = 0{,}04649$ erzielt man mit $L_{opt} = 7\,600$ m und $H_{opt} = 593$ m, somit ist erwiesen, dass auch bei Francisturbinen die Kraftwerke mit grossen H wirtschaftlicher sind.

6. DIE ELEKTROMECHANISCHEN AUSRUESTUNGEN DER STAUKRAFTWERKE MIT KAPLANTURBINEN

6.1. *Begrenzung der Anwendungsgebiete zwischen Francis- und Kaplanturbinen.*

In letzter Zeit baut man Kaplanturbinen für Fallhöhen bis 80 m und Einheitsleistungen über 100 000 kW. Dieses ist dadurch möglich, dass statt der Saughöhe, immer grössere Gegendrücke $H_s < 0$ angewendet werden, d.h. der Turbinenrotor wird unter den Unterwasserspiegel versenkt.

In vorhergehenden Abhandlungen [1]—[4] wurde die hydromechanische Grundlage entwickelt, sodass hier die Frage der Wirtschaftlichkeit der Vergrösserung der Fallhöhe erwiesen werden kann. Der Einfluss von H und H_s auf die Schnelläufigkeit $n_s = n \frac{P^{0,5}}{H^{1,25}}$ wird, nach unserer Methode durch Parameter A erfasst:

$$A = 0{,}1077 + \frac{0{,}786}{\frac{300}{24 + H\frac{11{,}5}{10 - H_s}} - 1} = 0{,}1077 + \frac{78{,}6}{n_s} \tag{14}$$

Aus der Funktion $\Phi_k = 1{,}246 - 0{,}052 \frac{A^{0,5}\, P^{0,5}}{H^{0,375}}$ für Maschinensätze mit Kaplanturbinen, bezw. Φ_F aus Abschnitt 4.1. für Francisturbinen und aus den anderen Faktoren, die vorher erläutert wurden, folgt die Bilanz:

$$336 \frac{p_h P^{0,875}}{p H^{1,312}} \left(7{,}57\, \Phi_K\, A^{1,75} - \frac{\Phi_F}{F^{1,173}}\right) +$$

$$+ 23{,}3 \frac{p_e P^{1,125}}{p H^{0,938}} \left[(A - 0{,}1077)^{0,75} - \frac{0{,}84}{F^{0,75}}\right] \gtreqless \frac{1}{k} \int_o^{T_o} Q\, H\, (\eta_K - \eta_F)\, dt \tag{15}$$

Folgt bei der zahlenmässigen Berechnung die obere Ungleichheit ($>$), so ist die Francisturbine günstiger und umgekehrt wird bei ($<$) Kaplan wirtschaftlicher. Bei ($=$) sind beide Lösungen wirtschaftlich gleichwertig, es wird trotzdem die Kaplanturbine gewählt, da sie — bei gleichen Kosten — im Betrieb mit veränderlichen H Q elastischer ist.

6.2. *Einfluss der Fallhöhe auf Ausrüstungen mit Kaplanturbinen.*

Die Investition in einem Maschinensatz mit Kaplanturbine von P (*P.S.*), Generator und Hilfsanlagen, ist nach [3]—[4] in lei (mit $p_h = 30$, $p_e = 35$, geringer als bei Pelton-und Francisturbinem, wegen den viel grösseren Abmessungen und grossem Anteil an geschweister Blechkonstruktion, u.s.w.):

$$J_K = 31\,150\, p_h A^{1,75} \frac{P^{0,875}}{H^{1,312}} - 1300\, p_h A^{2,25} \frac{P^{1,125}}{H^{1,687}} +$$
$$+ 229\, p_e (A - 0{,}1077)^{0,75} \frac{P^{1,125}}{H^{0,938}} \tag{16}$$

$$J_K = 934\,500 \frac{A^{1,75}\, P^{0,875}}{H^{1.312}} +$$
$$+ \left[8\,015 \frac{(A - 0{,}1077)^{0,75}}{H^{0,938}} - 35\,000 \frac{A^{2.25}}{H^{1,687}}\right] P^{0,125} \tag{16'}$$

Die spezifische Investition der Ausrüstungen $i_a = 1{,}4 \frac{J_K}{P}$ (lei/kW) ist:

$$i_a = \frac{1\,308\,000\,A^{1,75}}{P^{0,125}\,H^{1,312}} + \left[11\,220\,\frac{(A-0{,}1077)^{0,75}}{H^{0,938}} - 54\,600\,\frac{A^{2,25}}{H^{1,687}}\right] P^{0,125} \quad (17)$$

Sind die Parameter der Aufgabe P (PS) und A, so können die Konstanten in C_1 C_2 C_3 zusammengezogen werden, d.h. es ist:

$$i_a = \frac{C_1}{H^{1,312}} + \frac{C_2}{H^{0,938}} - \frac{C_3}{H^{1,687}} \quad (17')$$

Ist hingegen $Q = P/11{,}8\ H$ als Parameter angenommen so schreibt man (17″) und mit den parametrischen Konstanten a b c (17‴):

$$i_a = \frac{961\,760\,A^{1,75}}{Q^{0,125}\,H^{1,437}} + \frac{15259\,Q^{0,125}\,(A-0{,}1077)^{0,75}}{H^{0,813}} - \frac{74\,256\,Q^{0,125}\,A^{2,25}}{H^{1,562}} \quad (17'')$$

$$i_a = \frac{a}{H^{1,473}} + \frac{b}{H^{0,813}} - \frac{c}{H^{1,562}} \quad (17''')$$

Beide Gl. (17′) (17‴) zeigen, dass i_a, mit steigender Fallhöhe H, hyperbolisch abnimmt. Demnach sind die Ausrüstungen der Staukraftwerke um so wirtschaftlicher, je grösser H wird, d.h. der Kaskadenausbau mit weniger Stufen ist gerechtfertigt.

6.3. *Anwendungen für Staukraftwerke mit Kaplanturbinen.*

In Tafel 6 und Abb. 6 sind die zpezifischen Investitionen sämtlicher Ausrüstungen der Staukraftwerke mit Kaplanturbinen nach (17) und (17′)

Tafel 6

Spezifische Investitionen für Ausrüstungen mit Kaplanturbinem

$P\left(\frac{PS}{Turb}\right)$	H(m)=	10	20	30	40	50	60	70	80	100
10 000	0	2015	1185	953	882	—	—	—	—	—
	H_s −5	1836	1012	753	641	577	543	—	—	—
	−10	1685	912	666	553	479	441	413	397	—
	−15	1660	861	616	491	423	381	353	329	309
100 000	0	1890	1152	942	876	—	—	—	—	—
	H_s −5	1720	990	752	645	583	550	—	—	—
	−10	1575	893	659	560	489	454	426	408	—
	−15	1551	843	618	501	434	394	365	343	322
200 000	0	1885	1160	956	888	—	—	—	—	—
	H_s −5	1713	998	749	656	596	561	—	—	—
	−10	1610	904	672	571	500	468	436	419	—
	−15	1545	853	628	512	445	403	375	352	332

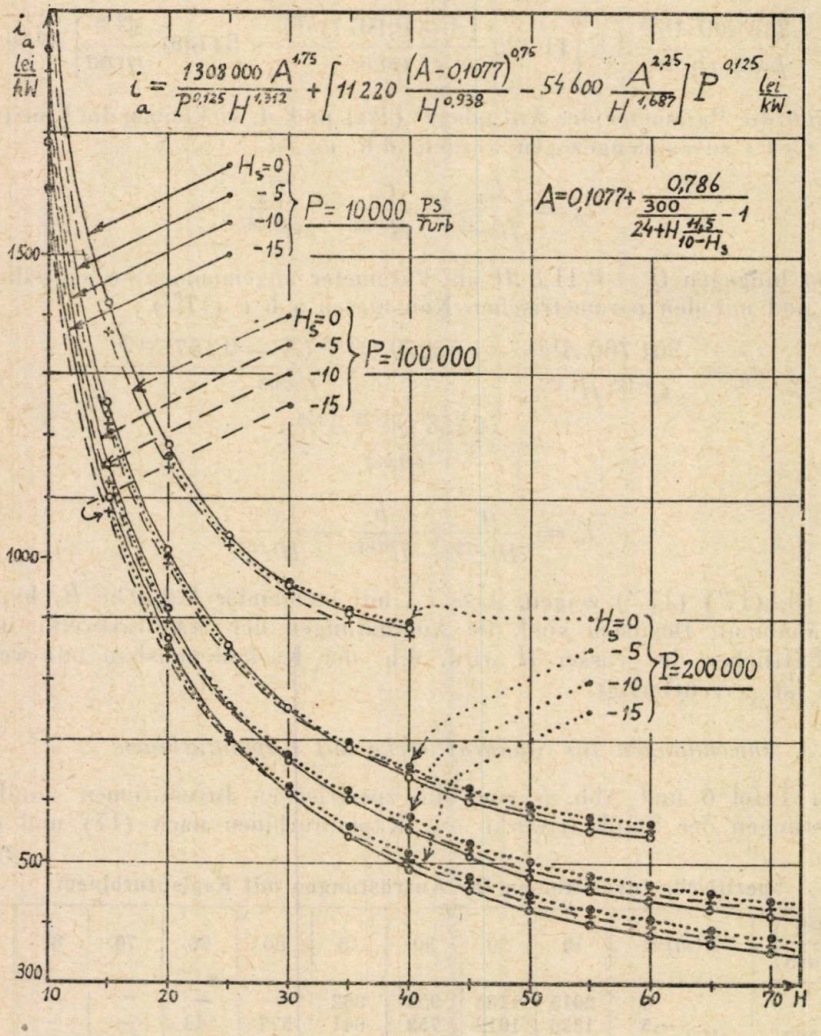


Abb. 6. Spezifische Investition i_a bei Staukraftwerken mit Kaplanturbinen

ausgerechnet, wobei als Parameter P und A (welcher H_s einschliesst) erscheinen, bezw. H als einzige unabhängige Variable.

Aus Tafel 6 können folgende Schlüsse gezogen werden:

— die Anwendung der Gl. (17) führt leicht zur Bestimmung der spezifischen Investition i_a;

— i_a sinkt systematisch mit wachsender Fallhöhe;

— i_a sinkt desgleichen mit der Vergrösserung des Gegendruckes;

— i_a ist relativ wenig von P der Turbine beeinflusst, ist aber bei 100 000 P.S./Turbine etwas geringer als bei kleineren, bezw. sehr grossen Leistungen.

Wird die Methode für die Berechnung der Ausrüstungen der Staukraftwerke der Tafel 2 angewendet, so erzielt man leicht, neben $i_w\, p_w$ der Tafel 2 für die Wasserbauanlagen, auch i_a und $p_a = a_a \frac{i_a}{T}$ für die Ausrüstungen in Tafel 7.

Für Staukraftwerke wird $P = 13{,}33 \frac{Q_a}{m} H \eta_t = 12{,}3\ Q\ H$ (P.S./Turb) bei $\eta_t = 0{,}92$ für Grossturbinen angewendet. Für die Donauwerke beim Eisernen Tor und bei Cernavoda ist $Q = Q_a/m = 750$ m³/Sek. Turbine, bei der Ausbauwasermenge $Q_a = 9000$ m³/S, in $m = 12$ Maschinensätzen, es folgt demnach laut (17″):

$$i_a = 418\,290 \frac{A^{1,75}}{H^{1,437}} + 35\,085 \frac{(A - 0{,}1077)^{0,75}}{H^{0,813}} - 170\,730 \frac{A^{2,25}}{H^{1,562}}$$

Für das K. W. Olt ist $Q_a = 480$ m³/S in $m = 4$ Maschinensätzen und $P = 1475\ H$ (P.S./Turbine), demnach:

$$i_a = 526\,000 \frac{A^{1,75}}{H^{1,437}} + 27\,900 \frac{(A - 0{,}1077)^{0,75}}{H^{0,813}} - 135\,800 \frac{A^{2,25}}{H^{1,562}}$$

Für das K. W. auf kleinerem Fluss, mit $Q_a = 135$, $Q_m = 45$ m³/S, bei $m = 2$ Maschinensätzen und $P = 830{,}3\ H$ (P.S./Turbine) ist:

$$i_a = 565\,000 \frac{A^{1,75}}{H^{1,437}} + 26\,000 \frac{(A - 0{,}1077)^{0,75}}{H^{0,813}} - 126\,500 \frac{A^{2,25}}{H^{1,562}}$$

Die Komponente der Eigenkosten der Energie betr. Ausrüstungen $p_a = \frac{0{,}07}{T} i_a$ wurde mit T nach Gl. (7), sowie i_w und p_w nach Gl. (5—6) in Tafel 7 berechnet und in Abb. 7 dargestellt.

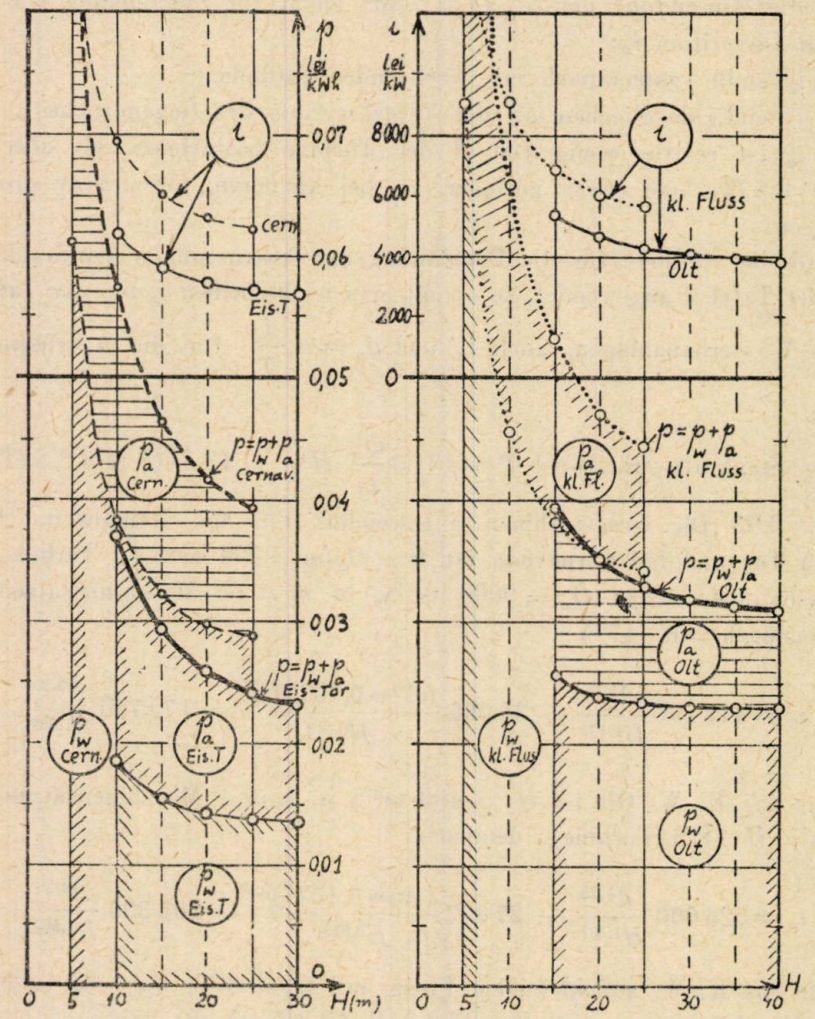


Abb. 7. Wirtschaftliche Kennziffern für Staukraftwerke

Tafel 7

Wirtschaftliche Kenziffern für Staukraftwerke mit wachsender Fallhöhe

H(m)		5	10	15	20	25	30	35	40
n_s		980	848	745	663	595	538	490	448
$A = 0{,}1077 + \frac{78{,}6}{n_s}$		0,195	0.2003	0,2132	0,2262	0,2398	0,2538	0,2682	0,2832
Eis. Tor	T	—	6520	6160	5970	5730	5600	—	—
	i_w	—	3006	2371	2112	1980	1909	—	—
	i_a	—	1722	1223	991	857	771	—	—
	$i_w + i_a$	—	4728	3594	3103	2837	2680	—	—
	p_w	—	0,01850	0,01540	0,01430	0,01380	0,01360	—	—
	p_a	—	0,01848	0,01390	0,01171	0,01046	0.00964	—	—
	$p_w + p_a$	—	0,03698	0,02930	0,02601	0,02426	0,02324	—	—
Cernav.	T	7020	6340	5990	5760	5600	—	—	—
	i_w	10720	6076	4792	4268	4001	—	—	—
	i_a	2596	1722	1223	991	857	—	—	—
	$i_w + i_a$	13316	7798	6015	5259	4858	—	—	—
	p_w	0,06110	0,03830	0,93200	0,02960	0,02860	—	—	—
	p_a	0,02590	0,01903	0,01428	0,01205	0,01073	—	—	—
	$p_w + p_a$	0,08700	0,05733	0,04628	0,04165	0,03933	—	—	—
KW-Olt	T	—	—	6400	6160	5970	5810	5700	5600
	i_w	—	—	4151	3697	3466	3342	3269	3225
	i_a	—	—	1243	983	838	747	683	640
	$i_w + i_a$	—	—	5394	4680	4304	4089	3952	3365
	p_w	—	—	0,02590	0,02400	0,02320	0,02310	0,02300	0,02300
	p_a	—	—	0,01358	0,01120	0,00983	0,00900	0,00838	0,00800
	$p_w + p_a$	—	—	0,03948	0,03520	0,03303	0,03210	0,03138	0,03100
kl. Fluss	T	7200	6340	5940	5760	5600	—	—	—
	i_w	12796	7247	5725	5091	4773	—	—	—
	i_a	4157	1849	1266	995	841	—	—	—
	$i_w + i_a$	16953	9096	6991	6036	5614	—	—	—
	p_w	0,0729	0,0457	0,0382	0,0353	0,0241	—	—	—
	p_a	0,0415	0,0204	0,0148	0,0121	0,0105	—	—	—
	$p_w + p_a$	0,1144	0,0661	0,0530	0,0474	0,0446	—	—	—

6.4. *Wirtschaftliche Kennziffern der Staukraftwerke.*

Die wichtigsten wirtschaftlichen Kennziffern sind $i = i_w + i_a$ (lei/kW) und $p = p_w + p_a$ (lei/kWh), deren Komponenten in Abschn. 3, 6, bestimmt

wurden. Mittels (17″—17‴) und (5) können die Parameter $a\ b\ c\ d$, für jede Variante de Staukraftwerke, zahlenmässig leicht berechnet werden:

$$a = 961\,760\,\frac{A^{1,75}}{Q^{0,125}}\ ;\quad c = 74\ 2\ 6\ Q^{0,125}\ A^{2,25}$$

$$b = 15\,259\ Q^{0,125}(A - 0{,}1077)^{0,75}\ ;\quad d = 3430\,k\,k_s\left(\frac{L_f}{Q_m}\right)^{0,2}$$

Es bedeutet $Q = \frac{k_a}{m}\,Q_m$ die Wassermenge bei Vollast einer Turbine, Q_m die mittlere Wassermenge des Kraftwerkes mit m-Turbinem. Nach Zusammensetzung von (17‴) + (5) folgt die Kennziffer i für die baulichen Anlagen und die Ausrüstungen des Staukraftwerkes (jedoch ohne die zusätzlichen allgemeinen Kosten):

$$i = \frac{a}{H^{1,437}} + \frac{b}{H^{0,813}} - \frac{c}{H^{1,562}} + d\left(1 + \frac{14{,}4}{H} - \frac{3{,}83}{H^{0,5}}\right) \qquad (18)$$

Die zweite Kennzifer $p = p_w + p_a = \frac{A_w + A_a}{E} = \frac{1}{T}\,(a_w\ i_w + a_a\ i_a)$ mit den Betriebstunden $T = 5600\left(\frac{H_{max}}{H}\right)^{0,14} = \frac{e}{H^{0,14}}$ nach Gl. (7). Somit ist in irgend einer Währung:

$$p = \frac{a_a}{e}\left(\frac{a}{H^{1,297}} + \frac{b}{H^{0,673}} - \frac{c}{H^{1,422}}\right) + a_w\,\frac{d}{e}\left(H^{0,14} + \frac{14{,}4}{H^{0,86}} - \frac{3{,}83}{H^{0,36}}\right) \qquad (19)$$

Durch (18—19) wird auch bei Staukraftwerken für sämtliche Bauanlagen und Ausrüstungen erwiesen, dass i und p, bei wachsendem H, sinken, demnach das Staukraftwerk wirtschaftlicher wird.

Schlussfolgerungen.

Anschliessend an die hydromechanischen- und wirtschaftlichen Grundlagen vorhergehender Studien [1]—[4], wird hier der günstige Einflus der Vermehrung der Fallhöhe von verschiedenen Wasserkraftwerken weiter verfolgt.

Bei Hochdruckanlagen mit Peltonturbinen ist die spezifische Investition $i = i_w + i_a$ (nach Gl. 1′ + 11′) mit den gegebenen Parametern $a\ b\ c\ d\ e$ leicht berechenbar; die Werte dieser Parameter wurden im Abschnitt 4.3. berechnet.

$$i = \frac{a}{H^{1,875}} - \frac{b}{H^{4,125}} + \frac{c}{H^{0,938}} + \frac{d}{H} + \frac{e\,L}{H^{1,286}}\left(\frac{\text{lei}}{\text{kW}}\right)$$

Die Energiekosten $p = p_w + p_a = \frac{1}{T}\,(a_w\,i_w + a_a\,i_a)$, lei/kWh, sind zahlenmässig desgleichen in den Abschnitten 2.2 und 4.3. berechnet.

Bei Kraftwerken mit Francisturbinen sind i_w die gleichen wie oben, hingegen i_a sind nach Gl. (13″) zu berechnen, sodass:

$$i = \frac{A}{H^{1,437}} + \frac{B}{H^{1,687}} - \frac{C}{H^{1,562}} + \frac{D}{H^{0,813}} + \frac{d}{H} + \frac{eL}{H^{1,286}}$$

$$p = \frac{a_a}{T}\left(\frac{A}{H^{1,437}} + \frac{B}{H^{1,687}} - \frac{C}{H^{1,562}} + \frac{D}{H^{0,813}}\right) + \frac{a_w}{T}\left(\frac{d}{H} + \frac{eL}{H^{1,286}}\right)$$

Die entsprechenden Parameter $A\ B\ C\ D$ wurden im Abschnitt 5.1. und $d\ e$ in 4.3· berechnet. Die Koeffizienten $a_w\ a_a$ der jährlichen Kosten $A_w\ A_a$ sind für unsere Werhältnisse $a_a = \frac{A_a}{I_a} = 0{,}04$ und $a_w = \frac{A_w}{I_w} = 0{,}07$

Bei Staukraftwerken mit Kaplanturbinen, mit den Parametern $a\ b\ c\ d\ e$ laut Abschnitt 6.4., sind nach Gl. (18, 19) die Kennziffern:

$$i = \frac{a}{H^{1,437}} + \frac{b}{H^{0,813}} - \frac{c}{H^{1,562}} + d\left(1 + \frac{14{,}4}{H} - \frac{3{,}83}{H^{0,5}}\right)$$

$$p = \frac{a_a}{e}\left(\frac{a}{H^{1,297}} + \frac{b}{H^{0,673}} - \frac{c}{H^{1,422}}\right) + a_w \frac{d}{e}\left(H^{0,14} + \frac{14{,}4}{H^{0,86}} - \frac{3{,}83}{H^{0,36}}\right)$$

Für alle Kraftwerktypen sinken i und p mit steigender Fallhöhe, demnach ist die Verminderung der Kraftwerkstufen auf einem Flusslauf wirtschaftlich. Die Anwendung der vorgeschlagenen Methoden wird an Hand von praktischen Beispielen erwiesen und somit den projektierenden Ingenieuren ein wichtiges Hilfsmittel zur Verfügung gestellt.

Die Gesamtkosten $i = i_w + i_a + i_o$ und $p = p_w + p_a + p_0$ enthalten die Anteile i_0 p_0 für die allgemeinen Kosten, wie vorhergehend erläutert wurde; diese wurden nicht näher untersucht, sie betragen jedoch etwa 20—30% von $i_w + i_a$ je nach der Type der Wasserbauanlagen und der Ausrüstungsarten.

Schrifttum:

1. D. Pavel: Contribuţie la dimensionarea turbinelor, Hidrotehnica nr. 3/1956.
2. „ „ Methoden zur Vordimensionierung der Parameter von WT, Waterturbines Conference Brno 1958, Rap. C-3.
3. „ „ Costul echipamentelor hidromecanice, Hidrotehnica 3/1959.
4. „ „ Căi de reducere a investiţiilor în echipamente hidroenergetice, Hidrotehnica 12/1959.

РАСЧЕТ ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАПОРОВ ДЛЯ ГИДРОЭЛЕКТРОСТАНЦИИ

(Краткое содержание)

На основании предыдущих разработок [1] — [4] аналитически определяется экономическое влияние повышения напоров. Предлагае-

мые метоы применяются к различным типам гидроэлектростанций, оборудованных турбинами Пельтон, Френсис или Каплан.

Применение этих методов довольно точное для проектных заданий и приводит к єкономным решениям, дающим значительное сокращение проектировочных работ.

CALCULATION OF THE ECONOMICAL HEAD FOR WATERPOWER PLANTS

(Summary)

On the basis of preceedings studies [1]...[4], is developed the analytical calculation-method of the most economical influence for the augmentation of the head H. The proposed methods can be applied to various types of Powerplants with Pelton, Francis, or Kaplan turbines.

The method is sufficiently precise for the draft scheme and leads to economic solutions, realising on important economy of planing work.

CALCUL DES CHUTES ÉCONOMIQUES POUR LES USINES HYDROÉLECTRIQUES.

(Résumé)

Sur la base des études précédentes [1]...[4] y est déterminée l'influence économique de l'agrandissement des chutes par voie analytique. Les méthodes proposées sont appliquées aux divers types d'usines hydroélectriques, équipées avec des turbines Pelton, Francis ou Kaplan.

L'application de ces méthodes est assez exacte pour les avantprojets et conduit aux solutions économiques en réalisant une épargne importante de travail dans la projection.

BERECHNUNG DER WIRTSCHAFTLICHEN FALLHÖHEN DER WASSERKRAFTWERKE.

(Zusammenfassung)

Durch Erweiterung früherer Studien [1]...[4] wird der günstige wirtschaftliche Einflus der Vergrösserung der Fallhöhe analytisch bestimmt. Die vorgeschlagenen Methoden werden bei, mit Pelton-, Francis- oder Kaplanturbinen ausgerüsteten, Kraftwerken verschiedener Typen angewandt.

Die Genauigkeit der Methoden ist für Rahmenprojekte ausreichend genau, führt zu wirtschaftlichen Lösungen und erspart im grosem Ausmass Projektierungsarbeit.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

UNELE PROBLEME PRIVIND INJECȚIA PĂCURII ÎN MOTOARELE CU APRINDERE PRIN COMPRIMARE *)

de G. BĂRĂNESCU, T. DUDAȘ, B. GRÜNWALD

I. ANALIZA FENOMENELOR DINAMICE DIN INSTALAȚIA DE INJECȚIE A MOTOARELOR CU ARDERE INTERNĂ LA LIMITA DINSPRE POMPĂ

Se cunoaște faptul că procesul de injecție a combustibilului în motoarele cu ardere internă este determinat de fenomenele dinamice care se produc în instalația de injecție, datorită compresibilității combustibilului, elasticității pereților conductei, vitezei variabile a pistonului pompei de injecție, etc.

Pentru stabilirea legii reale de injecție au fost elaborate mai multe metode de calcul, care iau în considerare majoritatea fenomenelor ce condiționează procesul. Sînt folosite și o serie de ipoteze, care în anumite condiții depărtează rezultatul calculului de situația reală.

În prima parte a articolului se cercetează procesul de injecție la limita dinspre pompă, cu considerarea frecării dintre lichid și conductă și mișcării supapei de refulare a pompei. Scurgerea lichidului prin conductă este presupusă laminară. Se tratează cazul mai general și frecvent întîlnit în practică al pompelor de injecție cu pistonul sertar.

1. Stabilirea ecuațiilor de calcul.

Se folosesc următoarele notații:

L. lungimea conductei dintre pompa de injecție și injector.

x — distanța de la extremitatea conductei dinspre pompa de injecție pînă la o secțiune oarecare a conductei;

R — raza interioară a conductei;

*) Din lucrarea „Problemele legii de injecție a păcurii în motoarele cu aprindere prin comprimare", prezentată la a VI-a sesiune științifică a cadrelor didactice din I.P.B., 17—18 decembrie 1960.

h — grosimea peretelui conductei;
p — presiune;
c — viteza;
ϱ — densitatea combustibilului;
η — vîscozitatea dinamică a combustibilului;
E — modul de elasticitate al combustibilului;
E_1 — modul de elasticitate al materialului conductei;
u — variabilă de integrare.

Considerînd combustibilul aferent unei porțiuni elementare din conductă, se obțin din teorema impulsului și din condiția de continuitate, următoarele ecuații:

$$-p_x = \varrho c_t + 2A\varrho c, \tag{1}$$

$$-p_t = \varrho a^2 c_x \tag{2}$$

în care $p_x = \frac{\partial p}{\partial x}$ etc, iar a este viteza de propagare prin conductă a undelor de presiune sau de viteză, definită de formula:

$$\frac{1}{a^2} = \varrho\left[\frac{1}{E} + \frac{1}{E_1}\frac{2R}{h}\right]$$

Ultimul termen din ecuația (1) corespunde frecării dintre lichid și conductă; pentru o distribuție parabolică a vitezei lichidului în secțiunea conductei factorul A are expresia

$$A = \frac{4\eta}{\varrho R^2}$$

Prin integrarea ecuațiilor (1) și (2) se obține expresia presiunii undei incidente și expresia vitezei undei incidente într-o secțiune oarecare a conductei

$$p_{i_x}(x,t) = e^{-A\frac{x}{a}} \cdot p_i\left(t - \frac{x}{a}\right) + A\frac{x}{a}\int_{\frac{x}{a}}^{t} \frac{-iJ_1\left(Ai\sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)}{\sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} e^{-Au} \cdot p_i(t-u)\,du, \tag{3}$$

$$c_{i_x}(x,t) = e^{-A\frac{x}{a}} c_i \cdot \left(t - \frac{x}{a}\right) + A\frac{x}{a}\int_{\frac{x}{a}}^{t} \frac{-iJ_1\left(A \cdot i\sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)}{\sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} e^{-Au} \cdot c_i(t-u)\,du, \tag{4}$$

unde p_i și c_i sînt presiunea și viteza undelor incidente iar $-iJ_1(iz)$ este prima funcțiune imaginară Bessel. Aceleași expresii sînt valabile și pentru undele reflectate dacă se înlocuiește x cu $x' = L - x$.

Din (2), (3) și (4) se deduce ecuația de legătură la pompă ($x = 0$) între presiunea undei incidente și viteza undei incidente

$$p_i = a\varrho c_i + a\varrho A\int_0^t c_i\,dt - a\varrho A\int_0^t\left[\int_0^t \frac{-iJ_1(A_{iu})}{u} e^{-Au} c_i(t-u)\,du\right]dt \quad (5)$$

În formulele (3), (4) și (5) ultimul termen reprezintă mai puțin de 1% din primul termen (4), neglijînd acest termen în fiecare formulă rezultă

$$p_{i_x}(x,t) = e^{-A\frac{x}{a}} \cdot p_i\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad (6)$$

$$c_{i_x}(x,t) = e^{-A\frac{x}{a}} \cdot c_i\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad (7)$$

$$p_i = a\varrho c_i + a\varrho A\int_0^t c_i\,dt \quad (8)$$

Ecuațiile (6) și (7) arată că presiunea sau viteza undelor incidente în secțiunea x și în momentul t, sînt egale respectiv cu presiunea sau viteza undelor incidente plecate de la pompă în momentul $t - \frac{x}{a}$, micșorate — datorită frecării — cu factorul $e^{-A\frac{x}{a}}$

Aceleași constatări sînt valabile și pentru undele reflectate, considerînd injectorul ca punct de plecare. Dezvoltînd în serie pe $e^{-A\frac{x}{a}}$ și păstrînd numai primii doi termeni ai seriei, se obțin din ecuațiile (6) și (7) următoarele expresii pentru presiunea și viteza undelor reflectate sosite la pompă în momentul t

$$p_r = \left(1 - A\frac{L}{a}\right) p_{r_d}, \quad (9)$$

$$c_r = \left(1 - A\frac{L}{a}\right) c_{r_d}, \quad (10)$$

unde p_{r_d} și c_{r_d} sînt presiunea și viteza undelor reflectate, plecate de la injector în momentul $t - \frac{L}{a}$. Presiunea totală și viteza totală la extremitatea conductei dinspre pompă sînt date de formulele:

$$p = p_{rez} + p_i + p_r, \quad (11)$$

$$c = c_i + c_r, \quad (12)$$

p_{rez} fiind presiunea în conductă la începutul cursei utile a pistonului pompei de injecție. În fig. I-1 se prezintă schema de principiu a pompei de injecție cu piston sertar.

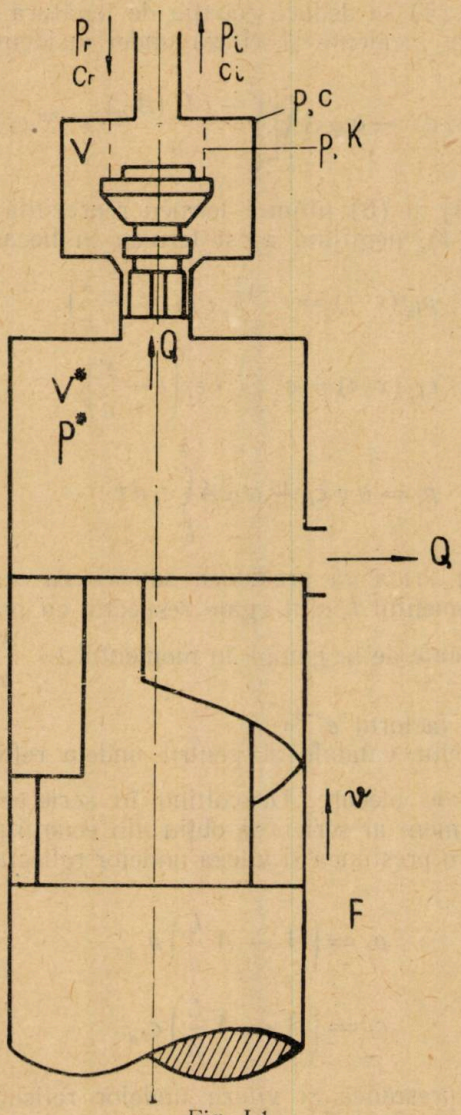


Fig. I-1

Pentru scrierea ecuațiilor care precizează fenomenul la pompă se mai folosesc următoarele notații:

s — deplasarea supapei de refulare;
Ω — secțiunea cozii supapei de refulare;
Ω_g — secțiunea orificiului controlat de supapa de refulare;

F — secțiunea pistonului pompei de injecție;
f^x — secțiunea prin care combustibilul este descărcat spre rezervor;
f — secțiunea de scurgere între spațiile V^x și V;
f_g — secțiunea de scurgere dintre gulerul supapei de refulare și canalul care leagă spațiile V^x și V;
q — secțiunea conductei dintre pompă și injector;
μ — coeficientul de scurgere;
V^x — volumul determinat de piston în cilindrul pompei;
V — volumul disponibil pentru combustibil în spațiul în care se află montat acul supapei de refulare;
P — forța dată de acul supapei de refulare cînd supapa este închisă;
R — forța de frecare dintre coada supapei de refulare și ghidajul ei;
k — constanta arcului supapei de refulare;
p^x — presiunea în spațiul V^x;
p — presiunea în spațiul V;
p — presiunea în rezervorul de combustibil;
Q^x — debitul de combustibil descărcat prin secțiunea f^x;
Q — debitul de combustibil descărcat prin secțiunea f;
m — suma dintre masa supapei și jumătate din masa arcului;
δ — coeficientul de amortizare proporțional cu viteza supapei;
v — viteza pistonului pompei.

Dacă se consideră și mișcarea supapei de refulare, în procesul de la pompă se deosebesc următoarele cazuri caracteristice.

Cazul I. Pompa refulează atît spre spațiul V cît și spre rezervor, gulerul supapei de refulare fiind ieșit din ghidajul său. Pentru acest caz avem următoarele condiții:

— condiția de continuitate în spațiul V^x

$$F \cdot v = Q^x + Q + \Omega \frac{ds}{dt} + \frac{V^x}{E} \cdot \frac{dp}{dt}; \tag{13}$$

— condiția de continuitate în spațiul V

$$Q + \Omega \frac{ds}{dt} = q\,c + \frac{V}{E}\frac{dp}{dt}; \tag{14}$$

— ecuația de mișcare a supapei

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + \delta\frac{ds}{dt} + ks - (p^x - p)\Omega + P \pm R = 0; \tag{15}$$

— ecuația debitelor Q^x și Q.

$$Q^x = \mu^x f^x \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \sqrt{p^x - p_a}; \tag{16}$$

$$Q = \mu f \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \sqrt{p^x - p}. \tag{17}$$

Cazul 2. Pompa refulează spre spațiul V, gulerul supapei de refulare este ieșit din ghidajul său, însă nu mai are loc descărcarea spre rezervor, datorită închiderii orificiilor de aspirație ale pompei. Din ecuațiile cazului 1 se suprimă ecuația (16) iar în (13) se scrie $Q^x = 0$.

Cazul 3. Gulerul supapei de refulare a intrat în ghidajul său și pompa se descarcă spre rezervor; se consideră că gulerul supapei este perfect ajustat în ghidajul său. Din ecuațiile cazului 1 se suprimă ecuația (17), în (13) și (14) se scrie $Q = 0$ și se înlocuiește Ω cu Ω_g

Cazul 4. Procesul are loc în condițiile din cazul 3, însă orificiile de aspirație ale pompei sînt închise. În acest caz se folosesc ecuațiile (13) ... (15), în care se scrie $Q^x = Q = 0$ și $\Omega \to \Omega_g$

Cazul 5. Procesul are loc în condițiile din cazul 1, însă gulerul supapei se află în ghidajul său și datorită impreciziei de prelucrare are loc o scurgere de combustibil între spațiile V^x și V. Se folosesc ecuațiile din cazul 1 scriind însă în (17) $\mu f \to \mu_g f_g$; de asemenea mai trebuie considerat $\Omega \approx \Omega_g$.

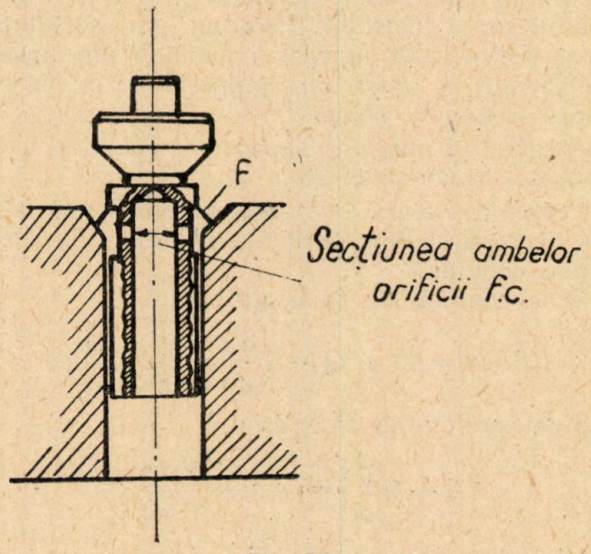


Fig. I-2

Cazul 6. Procesul are loc în condițiile cazului 5, orificiile de aspirație ale pompei fiind închise. Din ecuațiile cazului 1 se suprimă ecuația (16), iar în (17) se înlocuiește $\mu f \to \mu_g f_g$ și $\Omega \approx \Omega_g$.

Cazul 7. Supapa de refulare este închisă. În acest caz rămîne numai condiția de continuitate pentru spațiul V, a cărei expresie este:

$$q c + \frac{V}{E}\frac{dp}{dt} = 0 \qquad (18)$$

Dacă în locul supapei de refulare cu guler de descărcare de construcție normală se folosește o supapă corector (fig. I-2), în fiecare din cazurile 1

sau 2 se pot prezenta două variante, după cum secțiunea de scurgere pe sub gulerul supapei este mai mare sau mai mică decît secțiunea orificiilor corectorului.

În prima variantă se presupune că presiunea în avalul orificiilor corectorului este egală cu presiunea în spațiul V; ca urmare în formula (17) secțiunea utilă μf trebuie înlocuită cu secțiunea utilă $\mu_c f_c$ — a corectorului. În a doua variantă, notînd cu p_c^x presiunea din spațiul situat între orificiile corectorului și secțiunea minimă de scurgere pe sub gulerul supapei și neglijînd variația de volum a spațiului de presiune p_c^x avem următoarele egalități:

$$Q = \mu_c f_c \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \sqrt{p^x - p_1^x} = \mu f \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \sqrt{p_1^x - p},$$

din care se obține

$$Q = \frac{\mu f}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu f}{\mu_c f_c}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \sqrt{p^x - p} \tag{19}$$

formulă care trebuie folosită în locul formulei (21).

2. *Integrarea ecuațiilor*

Integrarea ecuațiilor corespunzătoare fiecărui caz nu se poate face analitic, datorită formei lor complicate. Se folosesc procedee grafice, calculul efectuîndu-se pe intervale mici de timp, alese în funcție de lungimea conductei și de caracteristicile injectorului [1], [3] și folosind valori medii pe interval, care se obțin substituind variația reală a mărimilor, cu o variație liniară. Pentru exprimarea derivatei a doua din formula (15), se consideră două intervale consecutive.

Expresiile valorilor medii ale mărimilor din ecuațiile de calcul sînt:

$$\left.\begin{aligned} p^x = \frac{p_3^x + p_2^x}{2};\quad p = \frac{p_3 + p_2}{2};\quad c_i = \frac{c_{i_3} + c_{i_2}}{2};\quad \frac{dp^x}{dt} = \frac{p_3^x - p_2^x}{\Delta t};\\ \frac{dp}{dt} = \frac{p_3 - p_2}{\Delta t};\quad \frac{ds}{dt} = \frac{s_3 - s_2}{\Delta t};\quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{s_3 - 2s_2 + s_1}{\Delta t^2} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Indicele 1 arată începutul primului interval, 2 începutul intervalului al doilea și 3 sfîrșitul intervalului al doilea. Calculul se efectuează din aproape în aproape, necunoscute fiind mărimile care poartă indicele 3. În formulele următoare se înțelege prin Q^x, Q, v, Ω, μf, p_r, c_r valorile medii ale mărimilor respective pe al doilea interval.

Undele reflectate care sosesc la pompă sînt cunoscute din rezolvarea procesului de la injector și din formulele (9) și (10). Dacă, se deter-

mină presiunea p din spațiul V, presiunea undei incidente rezultă din formula (11). Viteza undei incidente se obține din formula (8) care aplicată în punctul 3 devine:

$$p_{i3} = a\varrho c_{i3} + a\varrho A \int_0^t c_i \, dt, \tag{21}$$

unde t este timpul scurs pînă în momentul corespunzător punctului 3. Pentru efectuarea integralei se înlocuiește variația mărimii c_i pe intervalul $t - \Delta t$, t cu o variație liniară (fig. I-3); în aceste condiții formula (21) poate fi pusă sub forma

$$p_i = a\varrho c_{i3} + a\varrho A \int_0^{t-\Delta t} c_i \, dt + a\varrho A \frac{c_{i2} + c_{i3}}{2} \Delta t,$$

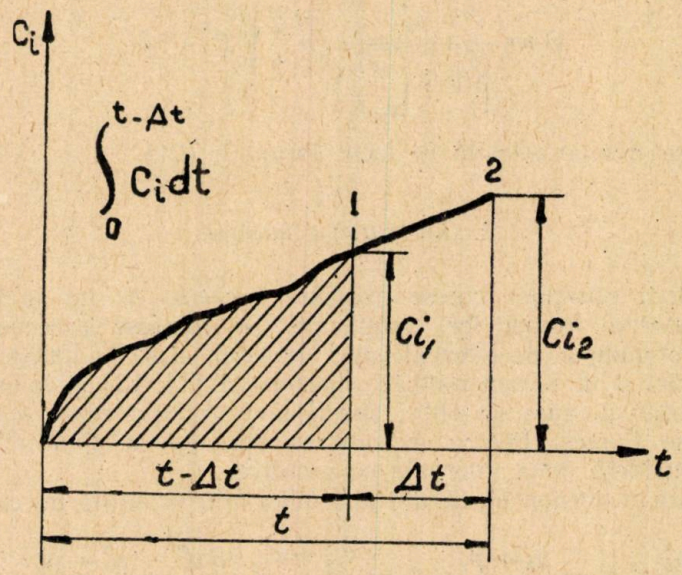


Fig. I-3

din care rezultă după înlocuirea presiunii p_{i3} din (11)

$$c_{i3} = \frac{1}{L_0}(p_s - p_{rez} - p_{r3}) - \frac{\alpha\varrho A}{T} \int_0^{t-\Delta t} c_i \, dt - \frac{\alpha\varrho A \Delta t}{2L_0} c_{i2}, \tag{22}$$

unde s-a notat

$$T = a\varrho\left(1 + \frac{A\Delta t}{2}\right)$$

Folosind formulele (11), (12), (20) și (22) se obțin următoarele ecuații pentru cazurile considerate 1.

Cazul 1.

$$Q^x = -B_1 p_3^x + D_1 - \frac{\Omega}{\Delta t} s_3 - \mu f \sqrt{\frac{2}{\varrho \Omega}} \sqrt{H_1 s_3 + y_1}, \tag{23}$$

$$Q^x = -B_1' p_3^x + D_1' + H_1' s_3, \tag{24}$$

$$Q^x = \mu^x f^x \sqrt{\frac{1}{\varrho}} \sqrt{p_3^x + (p_2^x - 2 p_a)}, \tag{25}$$

$$q_3 = p_3^x + p_2^x - p^2 - \frac{2}{\Omega}\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{\delta}{\Delta t} + \frac{k}{2}\right) s_3 + \frac{2}{\Omega}\left(\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{\delta}{\Delta t} - \frac{k}{2}\right) s_2 - \frac{2m}{\Omega \Delta t^2} s_1 - \frac{2}{\Omega}(P \pm R), \tag{26}$$

unde s-a notat

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{V^x}{E \Delta t}, \\ D_1 &= F \cdot v + \frac{V^x}{E \Delta t} p_2^x + \frac{\Omega}{\Delta t} s_2, \\ H_1 &= \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{\delta}{\Delta t} + \frac{k}{2}, \\ y_1 &= -\left(\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{\delta}{\Delta t} - \frac{k}{2}\right) s_2 + \frac{m}{\Delta t^2} s_1 + P \pm R, \\ B_1' &= \frac{q}{2T} + \frac{V^x + V}{E \Delta t}, \\ D_1' &= -\left(\frac{q}{2T} - \frac{V^x - V}{E \Delta t}\right) p_2^x + \left(\frac{q}{2T} + \frac{2V}{E \Delta t}\right) p_2 + \frac{q}{2T} p_{r3} - \frac{q}{2}\left(1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \varrho A \Delta t}{2T}\right) c_{t_2} + \frac{a \varrho q A}{2T} \int_0^{t-\Delta t} c_t \, dt - q c_r + F \cdot v - \frac{2}{\Omega}\left(\frac{b}{2T} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{V}{E \Delta t}\right) s_1 + \frac{2}{\Omega}\left(\frac{q}{2T} + \frac{V}{E \Delta t}\right)(P \pm R) + \frac{q}{2T} p_{rez}, \\ H_1' &= \frac{2}{\Omega}\left(\frac{q}{2T} + \frac{V}{E \Delta t}\right)\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{\delta}{\Delta t} + \frac{k}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Pentru rezolvarea ecuațiilor (23), (24), (25) se reprezintă diagrama din fig. I-4. Privind pe s_3 ca parametru ecuațiile (23) și (24) reprezintă cîte o familie de drepte paralele, a căror intersecție este o curbă, ce taie parabola corespunzătoare ecuației (25) într-un punct, care constituie soluția celor trei ecuații pentru intervalul considerat. Cunoscînd valorile p_3^x și s_3 se poate calcula din ecuația (26) valoarea presiunii p_3.

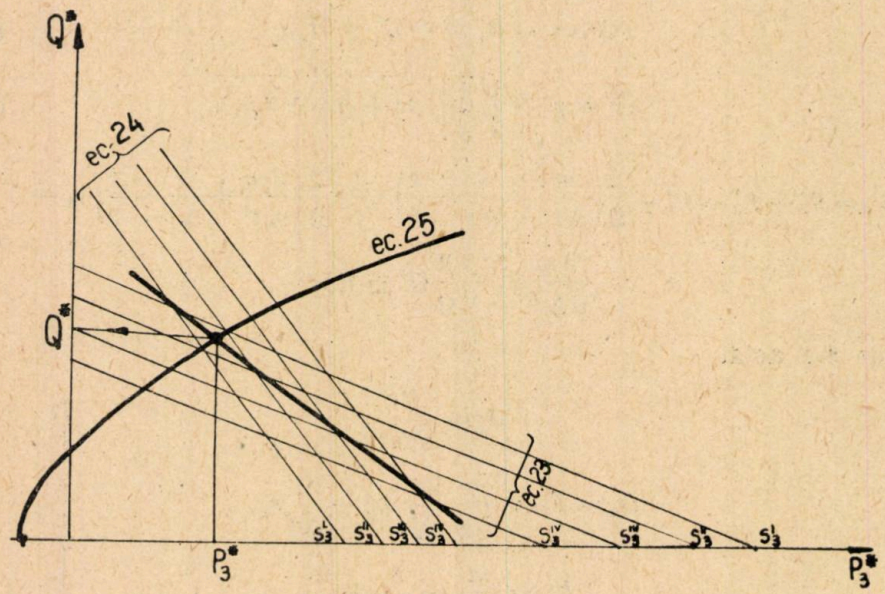


Fig. I-4

De la un interval la altul pantele celor două familii de drepte se schimbă, datorită variației volumelor V^x și V.

Cazul 2.

$$Q = -B_2(p_3^x - p_3) + D_2 - H_2 s_3, \tag{28}$$

$$Q = -B_2'(p_3^x - p_3) + D_2', \tag{29}$$

$$Q = \mu f \sqrt{\frac{1}{\varrho}} \sqrt{p_3^x - p_3 + (p_2^x - p_2)}, \tag{30}$$

$$p_3^x = p_2^x + \frac{E\Delta t}{V^x} F \cdot v - \frac{E\Delta t}{V^x} Q - \frac{E\Omega}{V^x}(s_3 - s_2), \tag{31}$$

unde s-a notat

$$M = 1 + \frac{q E \Delta t}{2 T V^x} + \frac{V}{V^x},$$

$$B_2 = \frac{\Omega^2}{2\delta M}$$

$$D_2=\frac{1}{M}\left(\frac{q}{T}-\frac{\Omega^2}{2\delta}+\frac{2V}{E\Delta t}\right)p_2^x-\frac{1}{M}\left(\frac{q}{2T}-\frac{\Omega^2}{2\delta}+\frac{2V}{E\Delta t}\right)p_2-\frac{q}{2TM}p_{r_3}+$$

$$+\frac{q}{2M}\left(1-\frac{a\delta A\Delta t}{2T}\right)c_{t_2}-\frac{a\varrho qA}{2TM}\int_0^{t-\Delta t}c_t\,dt+\frac{q}{M}c_r+\frac{1}{M}\left[\frac{k\Omega}{2\delta}-\frac{2m\Omega}{\delta\Delta t^2}+\right.$$

$$+\left(\frac{q}{2T}+\frac{V}{E\Delta t}\right)\left(\frac{4m+2\delta}{\Omega\Delta t}-\frac{k}{\Omega}+\frac{E\Omega}{V^x}\right]s_2+\frac{1}{M}\left[\frac{m\Omega}{\delta\Delta t^2}-\frac{2m}{\Omega\Delta t}\left(\frac{q}{2T}+\right.\right.$$

$$+\left.\left.\frac{V}{E\Delta t}\right)s_1+\frac{E\Delta t}{M\Delta V^x}\left(\frac{q}{2T}+\frac{V}{E\Delta t}\right)F\cdot v+\frac{1}{M}\left(\frac{\Omega}{\delta}-\frac{q}{\Omega T}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2V}{E\Omega\Delta t}\right)\left(P\pm R\right)-\frac{q}{2TM}p_{rez},$$

$$H_2=-\frac{\Omega}{\delta M}\left(\frac{m}{\Delta t^2}+\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{M}\left(\frac{q}{2T}+\frac{V}{E\Delta t}\right)\left(\frac{2m}{\Omega\Delta t}+\frac{k}{\Omega}+\frac{E\Omega}{V^x}\right),$$

$$N=\frac{1}{E_2}\left(\frac{m}{\Delta t^2}+\frac{\delta}{\Delta t}+\frac{k}{2}\right),$$

$$B_1'=\left(\frac{\Omega}{2N}+B_2\right),$$

$$D_2'=D_2-\frac{1}{N}\left(\frac{2m}{\Delta t^2}+\frac{\delta}{\Delta t}-\frac{k}{2}\right)s_2+\frac{m}{N\Delta t^2}s_1-\frac{\Omega}{2N}p_2^x+\frac{\Omega}{2N}p_2+\frac{1}{N}(P\pm R)$$

Ecuațiile (28), (29) și (30) sînt rezolvate grafic în fig. I-5. Privind pe s_3 ca parametru ecuația (28) reprezintă o familie de drepte paralele, iar ecuația (30) o familie de parabole cu același vîrf.

Intersecția lor este o curbă care împreună cu dreptele corespunzătoare ecuației (29), determină soluția celor trei ecuații pe intervalul considerat. Cunoscînd valorile Q și s_3 se poate calcula din ecuația (31) valoarea presiunii p_3.

Cazul 3.

$$Q^x=-B_1p_3^x+D_1-\frac{\Omega_g}{\Delta t}s_3, \tag{32}$$

$$Q^x=-B_1'p_3^x+D_1'+H_1's_3, \tag{33}$$

$$Q^x=\mu^x f^x\sqrt{\frac{1}{\varrho}}\sqrt{p_3^x+(p_2^x-2p_a)}, \tag{34}$$

$$p_3=p_3^x+p_2^x-p_2-\frac{2}{\Omega_g}\left(\frac{m}{\Delta t^2}+\frac{\delta}{\Delta t}+\frac{k}{2}\right)s_3+\frac{2}{\Omega_g}\left(\frac{2m}{\Delta t^2}+\frac{\delta}{\Delta t}-\frac{k}{2}\right)s_2-$$

$$-\frac{2m}{\Omega_g\Delta t^2}s_1-\frac{2}{\Omega_g}(P\pm R), \tag{35}$$

unde B_1, D_1, B'_1, D'_1, H'_1, au expresiile din (27) în care se înlocuiește Ω cu Ω_g

Rezolvarea ecuațiilor se face după metoda din fig. I-4.

Cazul 4.

$$s_3 = \frac{1}{W}\left[\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{\delta}{\Delta t} - \frac{k}{2} + \frac{\Omega_g^2}{2}\left(\frac{E}{V^x} + \frac{1}{U\,\Delta t}\right)\right] s_2 - \frac{1}{W}\,\frac{m}{\Delta t^2}\, s_1 + \frac{\Omega_g}{2W} p_2^x -$$

$$- \frac{V\Omega_g}{2WUE\,\Delta t} p_2 + \frac{q\,\Omega_g}{2UW} c_r + \frac{E\,\Omega_g\,\Delta t}{2V^x W} F \cdot v - \frac{q\,\Omega_g}{4TUW} p_{rez} -$$

$$- \frac{1}{W}(P \pm R), \tag{36}$$

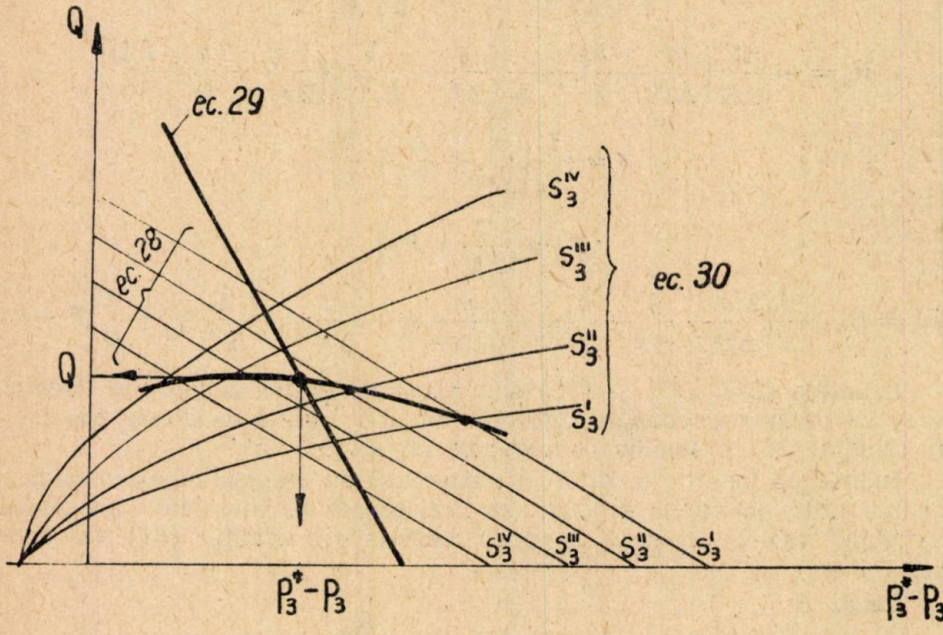


Fig. I-5

$$p_3^x = p_2 + \frac{E\,\Delta t}{V^x} F v - \frac{E\,\Omega_g}{V^x}(s_3 - s_2), \tag{37}$$

$$p_3 = -\frac{V}{EU\,\Delta t} p_2 - \frac{q}{2U}\left(1 - \frac{a\varrho A\,\Delta t}{2T}\right) c_{t_2} + \frac{a\varrho q A}{2TU}\int_0^{t-\Delta t} c_t\,dt + \frac{q}{2TU} p_{r_3} -$$

$$- \frac{q}{U} c_r + \frac{\Omega_g}{U\,\Delta t}(s_3 - s_2) + \frac{q}{2TU} p_{rez}, \tag{38}$$

unde s-a notat

$$U = \frac{q}{2T} + \frac{V}{E\,\Delta t},$$

$$W = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{\delta}{\Delta t^2} + \frac{k}{2} + \frac{\Omega_g^2}{2}\left(\frac{E}{V^x} + \frac{1}{U\,\Delta t}\right)$$

Se determină s_3 din (36) și apoi p_3^x și p_3 din (37) și (38).

Cazul 5.

Se folosesc ecuațiile (23) .... (26) în care se scrie $\Omega \to \Omega_g$ iar în ecuația (23) se înlocuiește μf cu $\mu_g f_g$. Rezolvarea ecuațiilor se face după metoda din fig. 4.

Cazul 6.

Se folosesc ecuațiile (28) ... (31) în care se înlocuiește Ω cu Ω_g, iar în ecuația (30) se înlocuiește μf cu $\mu_g f_g$. Rezolvarea se face după metoda din fig. 5, cu deosebirea că familia de parabole se reduce la o singură parabolă. Soluția se obține la intersecția parabolei cu drepte corespunzătoare ecuației (29); s_3 se citește prin interpolare între familia de drepte corespunzătoare ecuației (28).

Cazul 7.

Presiunea p_3 se calculează progresiv din ecuația

$$p_3 = \frac{V}{E\,U\,\Delta t}p_2 - \frac{q}{2U}\left(1 - \frac{a\varrho A\,\Delta t}{2T}\right)c_{i_3} + \frac{a\varrho q A}{2TU}\int_0^{t-\Delta t} c_i\,dt + \frac{q}{2TU}p_{r_3} -$$

$$- \frac{q}{U}c_r + \frac{q}{2TU}p_{rez}, \qquad (39)$$

în care U are expresia arătată la cazul 4.

3. *Rezolvarea procesului de la pompă în perioadele golurilor de combustibil*

La pompă se poate produce un gol de combustibil în oricare din cazurile examinate. Golul apare cînd presiunea în spațiul V se anulează; punînd această condiție în formula (11) se obține

$$p_i = -(p_r + p_{rez}) \qquad (40)$$

Pentru stabilirea momentului în care apare golul, pe măsura efectuării calculului se trasează diagrama presiunii undei incidente p_i, care se aranjează față de diagrama presiunii undei reflectate p_r ca în fig. I-6.

În aceste condiții rezultă din formula (40) că golul apare cînd curbele p_i și p_r se întîlnesc.

Cît timp durează golul presiunea undei incidente este dată de curba presiunii undei reflectate, măsurarea făcîndu-se în raport cu originea o_i

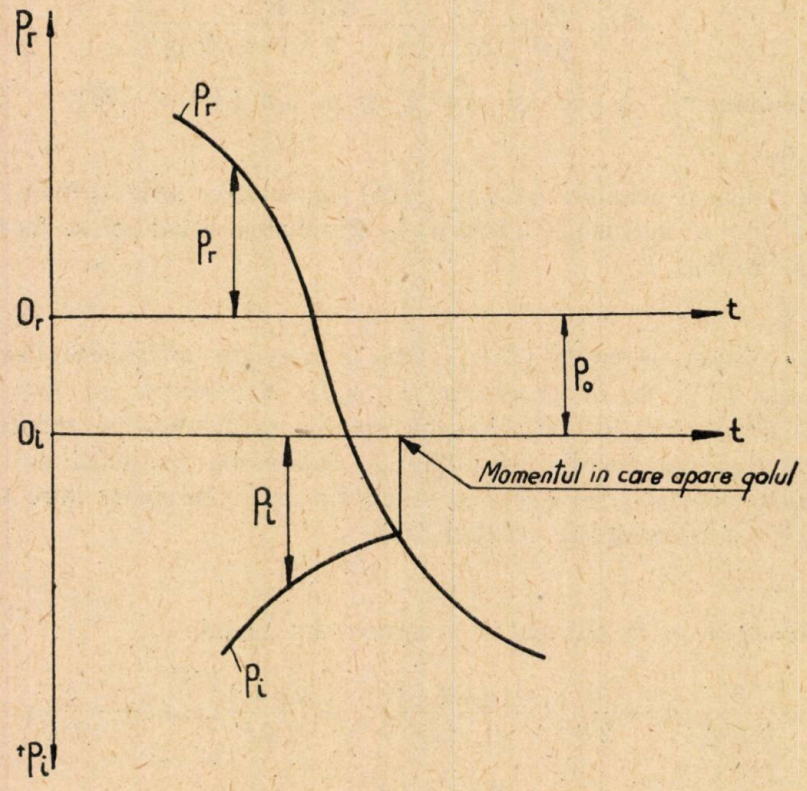


Fig. I-6

conform fig. 6. Viteza undei incidente se calculează din formula (22) în care se face $p = 0$. Durata golului este determinată de condiția

$$\int Q\,dt + \int \Omega\,ds = q \int c\,dt \qquad (41)$$

integrarea începînd din momentul în care apare golul.

Ecuațiile cu ajutorul cărora se calculează mărimile Q și s în perioada de gol, se obțin din ecuațiile precizate înainte pentru fiecare caz, suprimînd ecuația care provine din condiția de continuitate (14) și înlocuind $p = o$.

Cazul 1.

Din ecuațiile (23) ... (26) care corespunde acestui caz fără gol de combustibil la pompă, ecuațiile (23) și (25) rămîn neschimbate ecuația

(24) se suprimă, iar ecuația (26) devine

$$p_3^x = \frac{2}{\Omega}\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{\delta}{\Delta t} + \frac{k}{2}\right) s_3 - \frac{2}{\Omega}\left(\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{\delta}{\Delta t} - \frac{k}{2}\right) s_2 + \frac{2m}{\Omega \Delta t^2} s_1 - p_2^x + \frac{2}{\Omega}(P \pm R) \tag{42}$$

Rezolvarea ecuațiilor (23), (25) și (42) este arătată în fig. I-7. La reprezentarea în planul Q^x, p_3^x a dreptei corespunzătoare ecuației (42) se calculează din (42) valorile p_3^x pentru valorile parametrului s_3 folosite

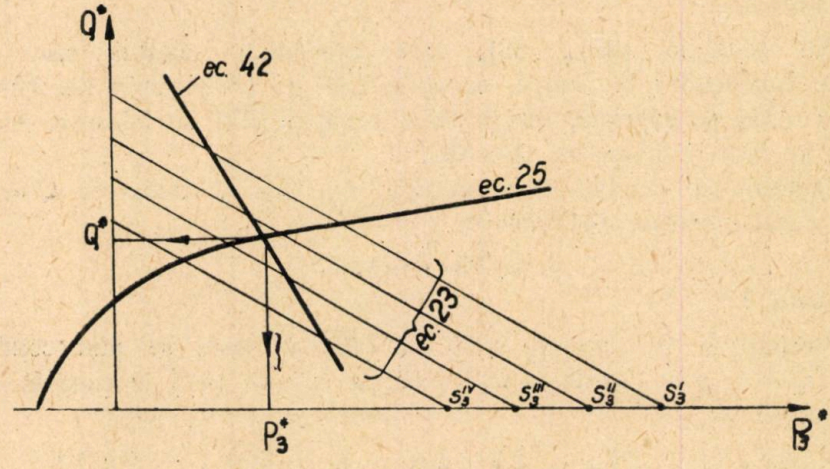


Fig. I-7

la reprezentarea familiei de drepte corespunzătoare ecuației (23); cu fiecare din aceste valori p_3^x se precizează cîte un punct pe dreapta din familia (23) de același parametru s_3.

Cazul 2.

Plecînd de la ecuațiile (17), (19) și (21) se obține folosind condițiile $Q^x = o$, $p = o$

$$Q = -B_1 p_3^x + D_1 - \frac{\Omega}{\Delta t} s_3, \tag{43}$$

$$Q = -B_3 p_3^x + D_3, \tag{44}$$

$$Q = \mu f \sqrt{\frac{1}{\varrho}} \sqrt{p_3^x + p_2^x}, \tag{45}$$

unde s-a notat

$$Z=\frac{1}{\Omega}\left(\frac{m}{\Delta t}+\delta+\frac{k\Delta t}{2}\right),$$

$$B_3=B_1+\frac{\Omega}{2Z},$$

$$D_3=D_1-\frac{1}{Z}\left(\frac{2m}{\Delta t^2}+\frac{\delta}{\Delta t}-\frac{k}{2}\right)s_2+\frac{m}{Z\Delta t^2}s_1-\frac{\Omega}{2Z,}p_2^x+\frac{1}{Z}(P\pm R)$$

Mărimile B_1 și D_1 au expresiile din (27).

Rezolvarea ecuațiilor (43)...(45) se face prin metoda din fig. 5

Cazul 3.

Din ecuațiile (32)...35), care corespunde acestui caz, fără gol de combustibil la pompă, ecuațiile (32) și (34) rămîn neschimbate ecuația (33) se suprimă, iar în locul ecuației (35) se folosește ecuația (42) ; se face și înlocuirea $\Omega \to \Omega_g$.

Ecuațiile se rezolvă prin metoda din fig. 6. Deoarece $Q = o$ și Ω_g = const. condiția (41) devine

$$\Omega_g \int d\,s = q \int c\,d\,t$$

Cazul 4.

Plecînd de la ecuațiile (13) și (15) în care se pun condițiile $Q^x = Q = o$, $p = o$ și $\Omega \to \Omega_g$ se obține ecuația (42) în care $\Omega \to \Omega_g$ și ecuația

$$s_3=\frac{\Delta t}{Z'}F\cdot v+\frac{1}{Z'}\left[\Omega_g+\frac{2V^x}{E\Omega_g}\left(\frac{2m}{\Delta t^2}+\frac{\delta}{\Delta t}-\frac{k}{2}\right)\right]s_2-\frac{2mV^x}{EZ'\Omega_g\Delta t^2}s_1+$$

$$+\frac{2V^x}{EZ'}p_2^x-\frac{2V^x}{EZ'}(P\pm R), \qquad (47)$$

unde s-a notat

$$Z'=\Omega_g+\frac{2V^x}{E\Omega_g}\left(\frac{m}{\Delta t^2}+\frac{\delta}{\Delta t}+\frac{k}{2}\right)$$

După calcularea deplasării s_3 din (47) se determină din (42) presiunea p_3^x. Sfîrșitul golului este precizat de condiția (46).

Cazul 5.

Se folosește formula (23) în care se înlocuiește $\mu f \to \psi_g f_g$ și $\Omega \to \Omega_g$, ecuația (25) și ecuația (42) în care $\Omega \to \Omega_g$. Rezolvarea se face după metoda din fig. 7. Sfîrșitul golului se determină din condiția (41).

Cazul 6.

În ecuațiile (43) ... (45) se înlocuiește $\mu f \rightarrow \mu_g f_g$ și $\Omega \rightarrow \Omega_g$

Rezolvarea se face după metoda din fig. 7, iar sfîrșitul golului se determină din condiția (41).

Cazul 7.

Supapa de refulare fiind închisă, urmează să se calculeze numai momentul încetării golului din condiția

$$\int c\,dt = 0$$

însumarea începînd din momentul $p = o$.

4. *Concluzii.*

Metoda de calcul prezentată ia în considerare fenomenele de la pompa de injecție cu o foarte bună precizie. Sînt folosite numai ipoteze simplicatoare de importanță secundară: neglijarea scăpărilor printre piston și cilindru și neglijarea variației cu presiunea a modulului de elasticitate al combustibilului. Prima ipoteză a fost introdusă dat fiind valoarea neglijabilă a scăpărilor de combustibil dintre piston și cilindru; ipoteza poate fi înlăturată, fără ca metoda de calcul să se modifice în principiu.

În comparație cu metodele existente, metoda de față este mai laborioasă dar mai precisă.

BIBLIOGRAFIE

1. *Blaum E.* — Injection dans les moteurs Diezel rapides, C.G.O.I.M. Paris 1,43.
2. *Manea C.* — Contribuții la studiul procesului de injecție. Diz. București 1959.
3. *Pischinger A.* — Gemischibildung und Verberennung in Dizelmotor Spinzer, Wien 1957.
4. *Suter T.* — Wanderwaller mit laminarer Reinbung, M.T.Z. 8/9 1957.

II. DETERMINAREA LEGII DE INJECȚIE CU CONSIDERAREA FRECĂRII DINTRE LICHID ȘI CONDUCTĂ ÎN CAZUL INJECTOARELOR DESCHISE

1. *Introducere*

La motoarele cu ardere internă cu injecție mecanică, legea după care se face injectarea combustibilului în cilindrii motorului, este determinată de factorii funcționali și constructivi ai instalației de injecție, precum și de caracteristicile fizice ale combustibilului.

Metodele de calcul existente pentru legea de injecție folosesc unele ipoteze simplificatoare, printre care figurează și neglijarea frecării dintre lichid și conducta care leagă pompa de injector. Această ipoteză poate introduce erori însemnate, mai ales în cazul combustibililor vîscoși și a conductelor lungi.

În articol se prezintă o metodă de calcul a legii de injecție pentru injectoarele deschise. Pe lîngă considerarea frecării dintre lichid și conductă, metoda ține seama și de unele perioade care se pot produce la injector în afară de perioada de scurgerea combustibilului în cilindru.

Undele incidente care sosesc la injector sînt presupuse cunoscute; ele se pot determina prin metoda arătată în lucrarea (I).

2. *Calculul procesului de injecție pentru perioada în care presiunea din conductă este mai mare decît presiunea din cilindru*

Se folosesc următoarele notații (fig. 1).

p — presiunea combustibilului în secțiune I;
p_i — presiunea undei incidente în secțiunea I;
p_r — presiunea undei reflectate în secțiunea I;
p_c — presiunea din cilindru;
p_o — presiunea din conductă la începutul injecției;
c — viteza combustibilului în secțiunea I;
c_i — viteza undei incidente în secțiunea I;
c_r — viteza undei reflectate în secțiunea I;
c_c — viteza combustibilului la intrarea în cilindru;
a — viteza de propagare a undelor prin conductă;
R — raza interioară a conductei;
L — lungimea conductei;
q — secțiunea de scurgere a conductei;
f — secțiunea de scurgere a orificiului injectorului;
μ — coeficientul de scurgere al orificiului injectorului;
V — volumul canalului dintre conducta și cilindrul motorului;
Q — debitul de combustibil scurs în cilindrul motorului;
ϱ — densitatea combustibilului;
η — vîscozitatea dinamică a combustibilului;
t — timp.

Presiunea p și viteza c sînt date de formulele

$$p = p_o + p_i + p_r , \tag{1}$$

$$c = c_i + c_r \tag{2}$$

Considerînd frecarea dintre lichid și conductă, presiunea undei incidente și viteza undei incidente la injector în momentul t sînt date de expresiile (1), (2)

$$p_i = \left(1 - A\frac{L}{a}\right) p_{io} ,$$

$$c_i = \left(1 - A\frac{L}{a}\right) c_{io} ,$$

unde p_{io} și c_{io} sînt respectiv presiunea undei incidente și viteza undei incidente plecate de la pompă în momentul $t - \frac{L}{a}$, iar A este un factor, corespunzător frecării dintre lichid și conductă, care pentru o distribuție

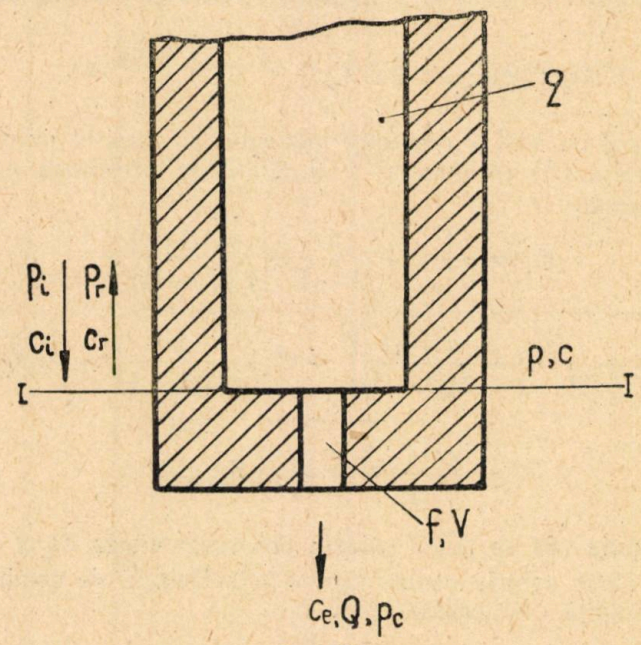


Fig. II-1

parabolică a vitezelor în secțiunea conductei are expresia

$$A = \frac{4\eta}{\varrho R^2}$$

La injecor, între mărimile p_r și c_r există următoarea ecuație de legătură

$$-p_r = a\varrho c_r + a\varrho A \int_0^t c_r \, dt , \tag{3}$$

integrarea începînd din momentul sosirii primei unde la injector.

Pentru cazul considerat condiția de continuitate la injector este

$$Q = qc = \mu f c_c , \tag{4}$$

unde viteza c_c este dată de formula

$$c_c^2 = c^2 + \frac{2}{\varrho}(p - p_c) \tag{5}$$

Din formulele (1), (2), (4) și (5) se obține

$$(\zeta^2 - 1) \cdot (c_i + c_r)^2 = \frac{2}{\varrho}(p_{rez} + p_i + p_r - p_c), \tag{6}$$

în care s-a notat $\zeta = \frac{q}{\mu f}$

În formula (6) intervin necunoscutele c_r și p_r. Una din ele se poate elimina folosind ecuația de legătură (3). În acest scop se efectuează calculul pe intervale mici de timp $\triangle t$. și se înlocuiește variația vitezei c_r pe intervalul $t - \triangle t$, t cu o variație liniară ; ecuația (3) devine astfel

$$-p_{r_2} = a\varrho c_{r_2} + a\varrho A \int_0^{t-\Delta t} c_r\, dt + \frac{c_{r_1} + c_{r_2}}{2} \Delta t \tag{7}$$

Se notează cu 1 și 2 respectiv începutul și sfîrșitul unui interval Δt. Aplicînd ecuația (6) în punctul 2 și eliminînd presiunea p_{r_2}, se obține după transformări.

$$c_{r_2} = -\left[c_{i_2} + \frac{a}{\zeta^2 - 1} + \frac{aA\Delta t}{2(\zeta^2 - 1)}\right] \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[c_{i_2} + \frac{a}{\zeta^2 - 1} + \frac{aA\Delta t}{2(\zeta^2 - 1)}\right]^2 - c_{i_2}^2 + \frac{2}{\varrho(\zeta^2 - 1)}\left(p_{rez} + p_{i_1} - p_{c_2} - \right.}$$

$$\left. - \frac{a\varrho A\Delta t}{2} c_{r_1} - a\varrho A \int_0^{t-\Delta t} c_r\, dt\right) \tag{8}$$

Din formula (8) se poate calcula progresiv viteza c_{r_2} a undei reflectate ; se va alege soluția pentru care $c > 0$. Debitul de combustibil scurs în cilindru rezultă din formula (4).

3. *Calculul procesului de injecție pentru perioada în care presiunea din conductă este mai mică decît presiunea din cilindru*

Dacă presiunea din conductă este mai mică decît presiunea din cilindru, în conductă se va scurge combustibilul aflat în canalul injectorului. Pentru acest caz ecuația de continuitate la injector devine

$$qc = \mu f \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \sqrt{p_c - p} \tag{9}$$

Aplicînd ecuația (9) în punctul 2 și folosind formulele (1), (2), și (7), se obține după transformări

$$c_{r_2} = -\left(c_{i_2} - \frac{a}{\zeta^2} - \frac{a A \Delta t}{2\zeta^2}\right) \pm \sqrt{\left(c_{i_2} - \frac{a}{\zeta^2} - \frac{a A \Delta t}{2\zeta^2}\right)^2 - c_{i_2}^2 +}$$

$$+ \frac{2}{\varrho \zeta^2}\left(p_{c_2} - p_{rez} - p_{i_2} + \frac{a \varrho A \Delta t}{2} c_{r_1} + a \varrho A \int_0^{t-\Delta t} c_r \, dt\right) \qquad (10)$$

Ținînd seama că scurgerea are loc în sensul injector-conductă din formula (10) se alege soluția pentru care se obține $c > 0$.

Calculul se continuă cu formula (10) pînă cînd tot combustibilul din canalul injectorului este introdus în conductă ; această condiție este exprimată prin egalitatea

$$-\mu f \int c \, dt = V,$$

integrarea începînd din momentul $p_c > p$.

Dacă în timpul perioadei considerate apare un gol de combustibil în conductă, ecuația de continuitate (9) se modifică și ca urmare formula (10) nu mai este valabilă. Golul fiind caracterizat de condiția $p = 0$, formula (1) devine

$$p_r = -(p_i + p_{rez}).$$

Viteza undei reflectate se obține din (7)

$$c_{r_2} = -\frac{1}{a \varrho \left(1 + \frac{A \Delta t}{2}\right)}\left(p_{r_2} + \frac{a \varrho A \Delta t}{2} c_{r_1} + a \varrho A \int_0^{t-\Delta t} c_r \, dt\right) \qquad (11)$$

În ipoteza că există suficient combustibil în canalul injectorului golul subsistă pînă la îndeplinirea condiției

$$-q \int c \, dt = \mu' f \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \int \sqrt{p_c} \, dt.$$

4. *Calculul procesului de injecție pentru perioada în care presiunea din conductă este egală cu presiunea din cilindru*

După refularea în conductă a combustibilului aflat în canalul injectorului, gazele din cilindru încep să pătrundă în conductă ; neglijînd laminarea gazelor, presiunea la extremitatea conductei este egală cu presiunea din cilindru. În aceste condiții se obține din ecuația (1)

$$p_r = p_c - p_i - p_{rez} \qquad (12)$$

viteza undei reflectate fiind dată de formula (11).

Dacă în momentul în care gazele din cilindru încep să pătrundă în conductă există în conductă golul ΔV, calculul cu formulele (11) și (12) se continuă pînă la îndeplinirea condiției

$$-q\int c\,dt = \Delta V, \tag{13}$$

integrarea începînd din momentul pătrunderii gazelor în conductă; în absența golului inițial ($\Delta V = 0$), condiția (13) devine

$$\int c\,dt = 0$$

5. *Concluzii*

Metoda expusă permite calculul legii de injecție în cazul injectoarelor deschise, cu o precizie superioară metodelor existente. Pe lîngă frecarea dintre lichid și conductă, se consideră și formarea de goluri la injector, precum și perioadele care preced sau urmează golul. Calculele sînt relativ simple, deoarece undele reflectate la injector se determină analitic; numai integrala din ecuația (7), care reprezintă urma formată la injector datorită frecării, trebuie efectuată grafic.

BIBLIOGRAFIE

1. *Pischinger A*: Gemischbildung und Verbiennung im Diesel motor, Springer, Wien 1957.

2. *Suter P.*: Wanderwellen mit laminarer Reibung, MTZ 8—1957.

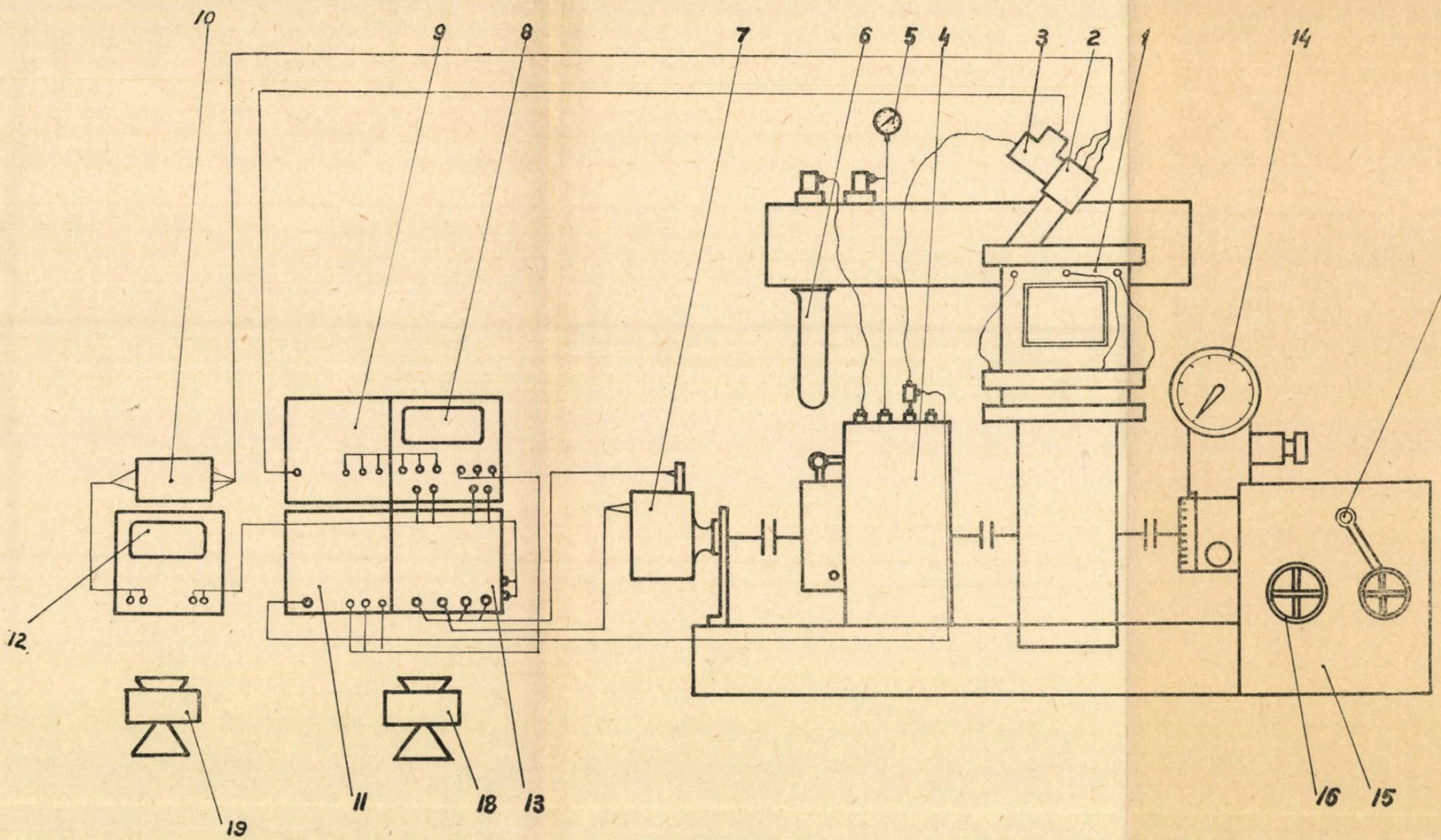


Fig. III-1

1. Aparat pentru determinarea legii de injecţie; 2. Injector cu dispozitiv pentru determinat legea de ridicare a acului injectorului; 3. Captator; 4. Pompă de injecţie; 5. Manometru 0—160 ata; 6. Vas gradat; 7. Transmiţătorul bazei de timp; 8. Osciloscop cu două spoturi; 9. Amplificator de curent continuu; 10. Amplificatorul legii de ridicare a acului injectorului; 11. Amplificator de curent continuu; 12. Osciloscop cu un spot; 13. Amplificatorul bazei de timp; 14. Tahometru cu două scări; 15. Electromotor; 16. Variator rapid de turaţie; 17. Inversor de turaţie; 18, 19. Aparate de fotografiat.

III. CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND INJECȚIA COMBUSTIBILIOR GREI IN MOTOARELE CU APRINDERE PRIN COMPRIMARE

În exploatarea motoarelor cu aprindere prin comprimare se manifestă tot mai mult tendința trecerii de la funcționarea cu motorină, la funcționarea cu combustibili grei.

Această modificare, care antrenează însemnate avantaje economice, nu este complet pusă la punct, datorită numeroaselor probleme de natură teoretică ,și mecanică ce trebuie rezolvate.

Din punct de vedere practic, consecințele care decurg prin schimbarea combustibilului se prezintă sub aspecte diferite. Consecințele mecanice depind în măsură mai mică de particularitățile motorului ; odată precizate măsurile care trebuie luate pentru evitarea uzurilor suplimentare cauzate de funcționarea cu combustibili grei, ele pot fi în majoritate aplicate oricărui motor. Consecințele asupra procesului termic depind însă mult de tipul motorului.

Una din modificările importante care apar la funcționarea cu combustibili grei, este schimbarea legii de injecție, cauzată de schimbarea caracteristicilor fizice ale lichidului injectat. Datorită vîscozității mari a combustibililor grei, undele care circulă prin conducta dintre pompă și injector suferă o amortizare, produsă de frecarea dintre lichid și conductă. Tot datorită frecării, fiecare undă care străbate un element din conductă lasă o urmă, din care cauză la un moment dat presiunea lichidului din element este mai mare decît suma algebrică a undelor incidente și reflectă după cum rezultă din analiza teoretică. Aceste fenomene influențează sensibil legea de injecție, deci și desfășurarea procesului de ardere.

Calculul legii de injecție cu considerarea frecării dintre lichid și conductă este tratat în primele două părți ale lucrării. În partea a treia se prezintă rezultatele unor cercetări experimentale, efectuate în vederea stabilirii unor modificări ale procesului de injecție, care apar prin înlocuirea motorinei cu un combustibil mai vîscos. Ele sînt confruntate cu rezultatele analizei teoretice efectuate în prima parte a studiului.

1. *Instalația experimentală*

Încercările au fost efectuate cu ajutorul unei instalații speciale (4) montată pe un banc de injecție Bosch (fig. III-1).

Instalația comportă un aparat pentru determinarea legii de injecție, format dintr-un ax de intrare orizontal, care antrenează un ax vertical prevăzut cu două discuri paralele. La periferia discului superior sînt practicate o serie de găuri, dispuse după un cerc. Discul inferior este echipat cu celule cilindrice ; fiecare celulă poate primi combustibilul care trece prin gaura din discul superior în dreptul căreia este plasată.

Injectorul alimentat de o pompă de injecție este montat la partea superioară a aparatului și debitează în fața orificiilor practicate în discul superior. Într-o celuă se colectează cantitatea de combusitbil injectată pe două grade de rotație a arborelui pompei de injecție. Aparatul furnizează o lege de injecție medie (pentru 2—300 injecții), deoarece cantitatea de combustibil care pătrunde înrt-o celulă pe o singură injecție este prea mică pentru a fi culeasă și evaluată.

Eroarea determinării se obține prin injectarea aceleiași cantități de combustibil într-un vas gradat. Numărul de injecții în unitatea de timp a fost determinat cu un dispozitiv special de numărare.

Instalația a fost prevăzută cu aparatură electronică pentru măsurarea variației presiunii în conducta dintre pompă și injector și pentru măsurarea deplasării acului injectorului, formată din osciloscopul și amplificatoarele necesare.

Ca traductor al variației de presiune s-au folosit captatoare piezoelectrice. Ca traductor al deplasării acului injectorului s-a folosit un dispozitiv alcătuit dintr-o bobină în interiorul căreia pătrunde o tije solidară cu acul injectorului; la deplasarea tijei apar modificări în cîmpul magnetic al bobinei, care sînt amplificate și transmise unui osciloscop.

Baza de timp a instalației electronice a fost realizată cu ajutorul unui dispozitiv montat pe axul pompei de injecție. Pentru mărirea preciziei de înregistrare, la baza de timp s-a folosit o camă specială, care a permis deplasarea spoturilor pe 40° rotație ale arborelui pompei.

Presiunea de deschidere a injectorului a fost determinată cu ajutorul unui manometru.

2. *Rezultatele experimentale*

Încercările au fost efectuate cu o instalație de injecție 4 T N-8,5×10, folosită la motoarele de tractor fabricate de uzinele „E. Thälman" Brașov care comportă o pompă de injecție cu piston sertar și injectoare de tip închis cu comandă hidraulică.

Drept combustibil s-a folosit motorina și două sorturi de păcură — A și B — obținute prin amestecarea unei păcuri vîscoase cu motorină: păcura A, de vîscozitate $^{\circ}E_{31,7} = 5$ și păcura B de vîscozitate $^{\circ}E_{20,6} = 12,71$. În cursul experiențelor s-a modificat și lungimea conductei dintre pompă și injector.

Cu ajutorul instalației descrise s-a înregistrat variația presiunii la pompa de injecție, variația presiunii la injector, deplasarea acului injectorului și legea de injecție. Combustibilul a fost injectat în aer, aflat la presiunea atmosferică.

a. Figurile III-2...III-4 conțin fotoînregistrările variațiile presiunii la pompa de injecție și variația presiunii la injector, respectiv pentru motorină păcura *A* și păcura *B*.

În aceste experiențe s-au păstrat neschimbate turația pompei de injecție și presiunea de deschidere a injectorului; s-a folosit o conductă cu lungimea de 320 mm.

Înregistrările arată că mărimea vîscozității combustibilului produce o puternică amortizare a variației presiunii, mai ales la injector. Tot odată, datorită efectului de uzură regimul de presiuni mari durează mai mult în cazul combustibilului mai vîscos iar presiunea maximă este mai

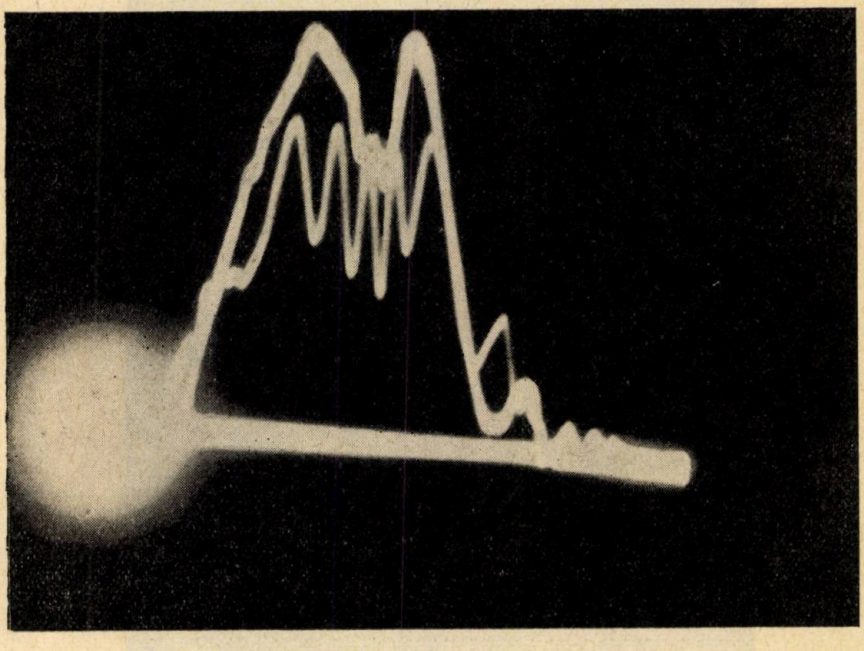


Fig. III-2

mare; valorile presiunii maxime în cazul înregistrărilor din fig. III-2, III-3 sînt trecute în tabela 1.

Tabelul 1

Combustibil	Presiunea maximă *)	
	la pompă	la injector
Motorină (fig. III-2)	155	120
Păcură A (fig.)III-3	188	150

*) Pentru precizarea presiunii maxime s-a utilizat o scară relativă a presiunilor.

b. Intensitatea amortizării depinde mult de lungimea conductei dintre pompă și injector. Din compararea fig. III-3 cu fig. III-5 care conține fotoînregistrarea variației presiunii la pompa de injecție și la injector, efectuate în condițiile fig. III-3 însă cu conductă de 600 mm lungime, se con-

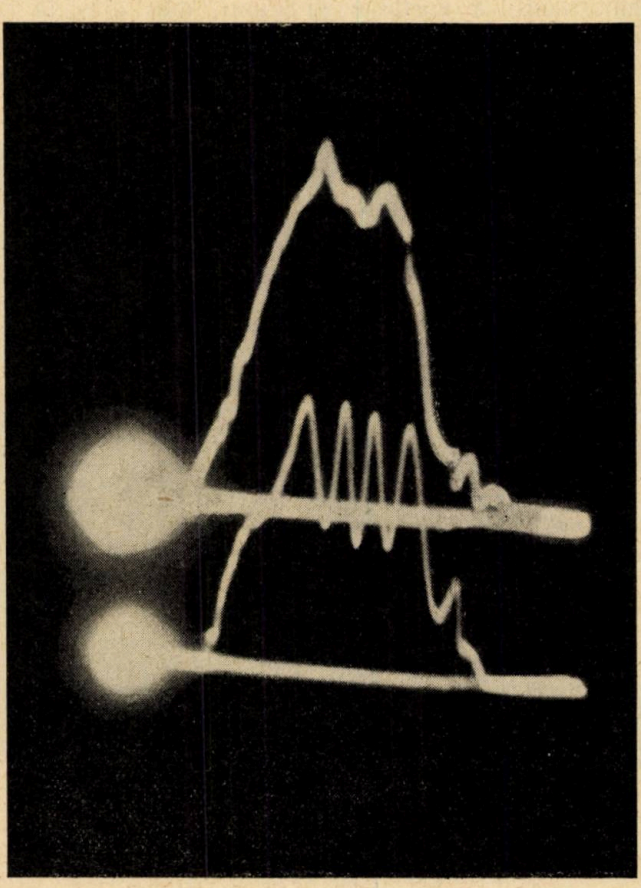


Fig. III-3

stată că amortizarea provoacă modificări importante mai ales la injector.

c. Efectul de urmă este bine pus în evidență de legea de ridicare a acului injectorului. Fig. III-6 și III-7 conțin fotoînregistrările deplasării acului injectorului, ridicate la aceiași turație, presiune de deschidere a injectorului, și lungime de conductă, însă pentru combustibili diferiți (respectiv motorină și păcură B).

Din aceste înregistrări s-a determinat momentul din care începe ridicarea acului injectorului măsurat față de o origine aleasă arbitrar

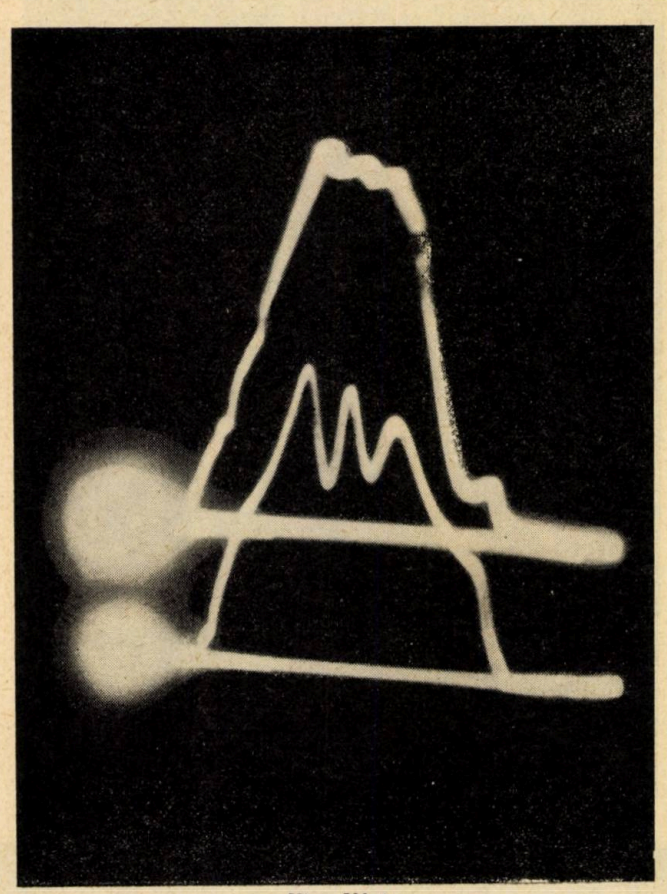


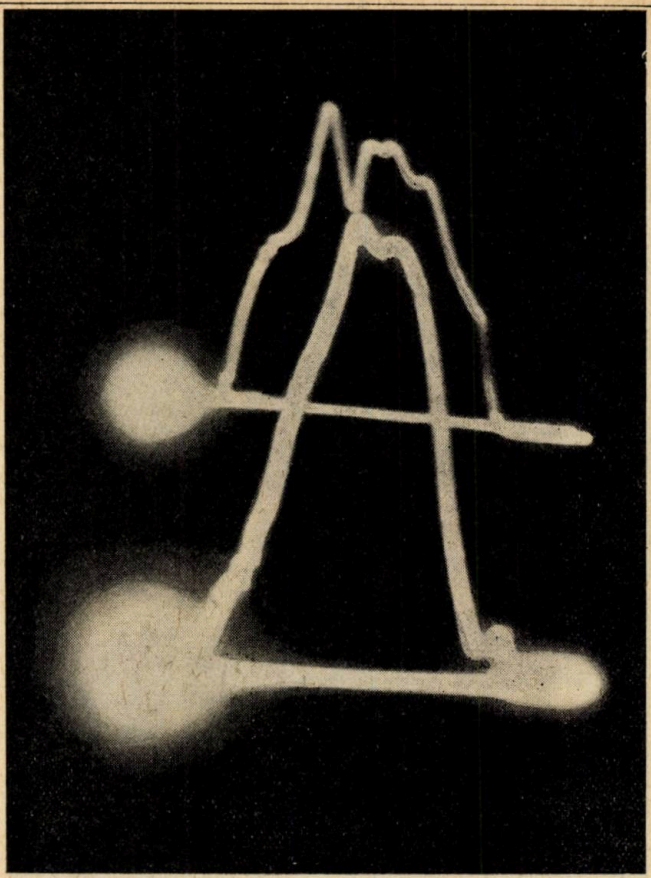
Fig. III-4

și durata de deschidere a injectorului măsurată în unghi de rotație al arborelui pompei de injecție (tab. 2).

Tabelul 2

Combustibil	Momentul ridicării actului	Durata deschiderii injectorului
	grad.	grad.
Motorină (fig. III-6)	26	12
Păcură B (fig. III-7)	23	15

Măsurătorile arată că în cazul combustibilului mai vîscos injecția începe mai devreme și durata ei este mai mare. Aceste particularități



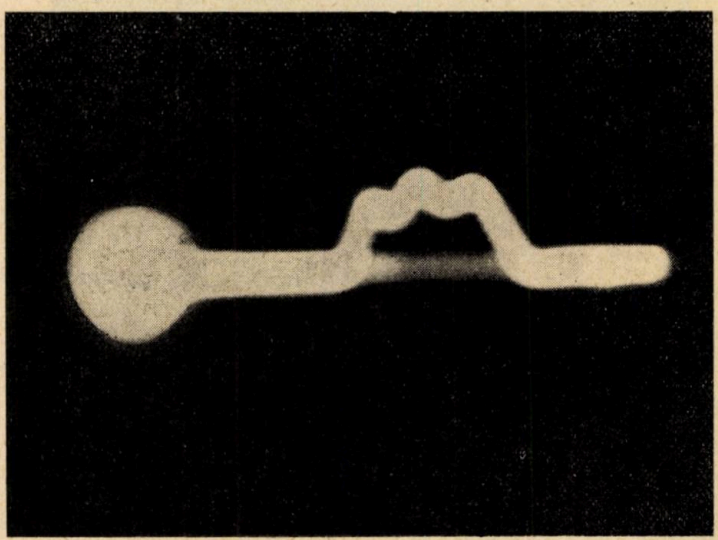


Fig. III-5 şi Fig. III-6

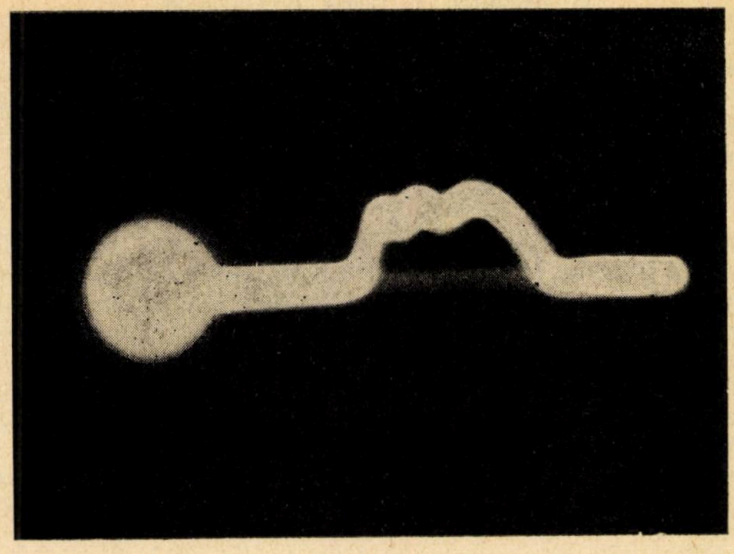


Fig. III-7

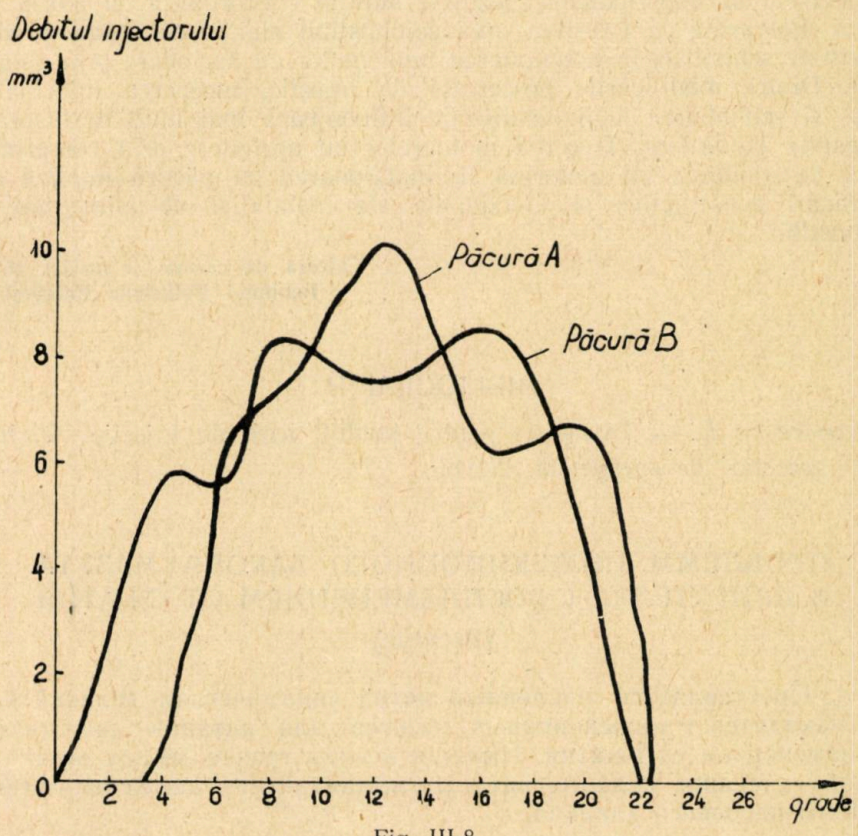


Fig. III-8

se datoresc efectului de urmă cauzat de frecarea dintre lichid și conductă, care este mai mare cu cît combustibilul este mai vîscos. Datorită acestui efect presiunea la injector crește mai repede în cazul combustibilului mai vîscos deci ridicarea acului injectorului începe mai devreme. De asemenea regimul de presiuni mari este prelungit fapt care provoacă mărirea perioadei de injecție.

d. Constatările precedente sînt verificate și de măsurătorile făcute asupra legii de injecție. În fig. III-8 sînt reprezentate legile de injecție obținute experimntal pentru cele două sorturi de păcură, turația pompei de injecție, presiunea de deschidere a injectorului și lungimea conductei fiind aceleași.

Se observă că la combustibilul mai vîscos (păcura *B*) injecția începe mai devreme, durează mai mult și totodată crește timpul în care debitul injectorului are valori mari ; ca urmare cantitatea de combustibil injectată în cazul combustibilului mai vîscos este mai mare. Toate aceste particularități se explică prin efectul de urmă, conform celor arătate înainte.

3. *Concluzii.*

Rezultatele experiențelor efectuate sînt în concordanță cu teoria elaborată. Ele arată că foolsirea unui combustibil mai vîscos poate produce însemnate schimbări în funcționarea unui motor cu aprindere prin comprimare. Dintre modificările procesului de injecție, începerea injecției cu avans și schimbarea legii de injecție influențează mai mult desfășurarea procesului de ardere. Trecerea motoarelor cu aprindere prin comprimare de la funcționarea cu motorină la funcționarea cu păcură implică deci modificări constructive și funcționale ale instalației de alimentare cu combustibil.

Catedra de cazane și mașini termice
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Teodorescu L.* — Instalație pentru studiul legii de injecție. Studii și cercetări de energetică. 2/1960.

ПРОБЛЕММ ИНЖЕКЦИОННОГО ЗАКОНА МАЗУТА В ДВИГАТЕЛЯХ С ВОСПЛАМЕНЕНИЕМ ОТ СЖАТИЯ

(Резюме)

I. Преставляется численный метод динамических явлений которые находятся у инжекционных насосов для питания двигателей с воспламенением от сжатия. Имеется в виду трение между жидком м трубой — стекание жидкого считается ламинарным — движение нагнетательного насосного клапана.

Численне формулы и методы решения установлены в варянтах без и с ямой топлива у насоса.

II. Преставляется численный метод инжекционный закона для открытых инжекторов, в которых принииается трение между жидкици и трубой как и образование ям у инжектора. Волны которие приходят к инжектору считаются знакомыми.

III. Преставляются резюльтаты опытньх исследований сделанных с целью установления поправок инжекционного процесса, которые появляются при заменении газойла с тойливой более вязкое. Эти изменения указывают, что переход от газойла к мазуту у двигателей с воспламенпем от сжатия требует функциональных и конструктивных поправок оборудования читания с топливом.

SOME PROBLEMS ON THE OIL INJECTION IN THE COMPRESSION IGNITION ENGINES

(Summary)

A computation method of the dynamic phenomena is presented, phenomena occurring at the fuel injection pump of the fuel system of the compression ignution engines tis taken into account the friction between liquid and pipe — the liquid flow being assumed as laminary — as well as the mouvement of the exhaust valve of the pump. There have been established the possible situations which may occur at the pump, for the case, more generally and frequently met with in practice, of the pumps with slide valve piston.

The computation formulae and solving methods are worked ont in the cases without or with noid of fuel at the pump.

II. A method for computing the injection law for the open fuel nazzles is presented, in which the friction between liquid and pipe is considered as well as the forming of void at the injection. The waves reaching the fuel nozzle are assumed as known. They may be determined by the methods slown in the paper (I).

III. Results of some experimental investigations carried ont with a view to establishing some modifications of the injection process occurring vohen oil is replaced by a more viscous fuel, are presented. Such modifications show that the changng of the compression ignition engines from working on gasoline to working on (oil) implies structural as well as working modification of the fuel system.

QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT L'INJECTION DU PÉTROLE BRUT DANS LES MOTEURS À ALLUMAGE PAR COMPRESSION

(Résumé)

I. On présente une méthode de calcul des phenomènes dynamiques qui se produisent à la pompe d'injection du moteur à allumage par compression. On tient compte du prottement existant entre le liquide et le conduite, l'écoh-

lement du liquide étant supposé laminaire — ainsi que du mouvement de la soupape de débit de la pompe. On précise les situations possibles qui se réalisent à la pompe dans le cas plus général et fréquent des pompes ayant un piston tiroir.

Les formules de calcul et les solutions sont établies pour les deux variantes : avec on sans vide de combustible à la pompe.

II. On présente une méthode de calcul de la loi d'injection pour les injecteurs ouverts dans laquelle on tient compte du frottement êntre le liquide et la tuyauterie ainsi que de la formation de vidès à l'injection. Les ondes de pression qui arrivent à l'injecteur sont supposées connues. Elles peuvent être déterminées a l'aide de la méthode présentées antérieurement (I).

III. On présente le résultat de certaines expériences effectuées en vue d'établir des modifications du processus d'injection qui apparaissent si l'on remplace le gasoil par un combustible plus lourd (visqueux).

Ces modifications prouvent que le passage des moteurs à allumage par compression du fonctionnement à gas — oil au fonctionnement au pétrole brut implique des modifications constructives et fonctionnelles de l'installation d'alimentation avec du combustible.

ÜBER DAS EINSPRITZGESETZ VON MIT SCHWERÖL BETRIEBENEN DIESELMOTOREN

(Zusammenfassung)

I. Es wird eine Berechnungsmethode der dynamischen Vorgörge die an der Einspritz pumpe der Dieselmotoren stattfinden, aufgestellt. Die Reiburg zwischen Flüssigkeit und Rohrleitung, unter nahme laminarer Strömung, und die Bewegung des Druckventils der Pumpe, werden berücksichtigt. Die möglichen Betriebzälbe der Pumpe werden untersucht, für die praktisch meisters vorkommande Pumpenbauert mit Kolbenschieber.

Die Berechnungsmethoden und-formeln sind in den Alternativen mit und ohne Brennstoffmangel an der Pumpe, aufgestellt.

II. Es wird eine Berechnungsmethode des Einspritzgesetzes für offene Einspritzdüsen ermittelt, unter Berücksichtigung der Reiburg zwischen Flüssigkeit und Rohrwond wie die auch des zeitweisen Mangels von Brennstoff an der Einspritzdüse. Dabei werden die zür Einspritzdüse gebengenden Druckwellen als bekannt angenommen. Diese können auf Grund der in der Arbeit (I) angegebenen Methoden bestimmt werden.

III. Zwecks Festotellung der infolge des Überganges von Gasöl auf einen Zähflüssigeren Brennstoff notwendigen Andernogen das Einspritzvorganges, wurden experimentelle untersuchnogen durchgefürt.

Es bertätigt sich, dass der zähflüssigere Brennstoff eine bedentende Dämpfurg der Druckschwenkurgen bewirkt, inbesondere an der Einspritzdüse. Der Einspritzvorgang setzt früher ein und dauert lärger. Die eingespritzte Brennstoff mange ist grösser. Abschliessend wird fertzestellt, dass der Übergang der Dieselmotoren von Gasöl auf Schweröl, Konstruktive und betriebliche anderungen der Brennstoffversorgang bedingt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

CONSTRUCȚII GRAFICE UTILE ÎN CADRUL METODEI COMPONENTELOR SIMETRICE *)

MARIUS PREDA

Folosirea metodei componentelor simetrice implică, întotdeauna, determinarea de componente simetrice $\underline{V}_0$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$, pe baza ecuațiilor (1), precum și compunerea de componente simetrice pentru determinarea sistemelor de mărimi trifazate corespunzătoare $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ — conform ecuațiilor (2)

$$\underline{V}_o = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) \qquad \underline{V}_1 = \underline{V}_o + \underline{V}_d + \underline{V}_i$$

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a\underline{V}_3) \quad (1) \qquad \underline{V}_2 = \underline{V}_o + a^2\underline{V}_d + a\underline{V}_i \quad (2)$$

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3) \qquad \underline{V}_3 = \underline{V}_o + a\underline{V}_d + a^2\underline{V}_i$$

În aceste ecuații prin a s-a notat operatorul $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ care se știe că satisface relația $1 + a + a^2 = 0$ (3).

În literatura de specialitate, ținînd seamă de intuitivitate și expeditivitatea metodelor grafice, s-au publicat numeroase metode grafice pentru determinarea componentelor simetrice (*B*1, *B*2, *B*3).

Aceste metode grafice se referă atît la construcții grafice care realizează direct operațiile corespunzătoare ecuațiilor (1) cît și la unele construcții grafice care simplifică determinarea grafică a componentelor simetrice.

În lucrarea de față se indică două metode grafice care simplifică determinarea unui sistem trifazat de mărimi atunci cnd se cunosc componentele sale simetrice. Utilizarea acestor metode grafice prezintă deci interes în toate problemele rezolvate prin metoda componentelor simetrice, cînd se folosesc metode grafice ca un control al corectitudinii calculelor făcute sau cînd, nefiind necesară o precizie prea mare, ne putem mulțumi numai cu metode grafice.

---

*) Prezentat la redacție la 20 iunie 1961.

1. *Determinarea grafică a mărimilor $\underline{V}_2$ și $\underline{V}_3$, corespunzătoare fazelor 2 și 3, în funcție de componentele simetrice $\underline{V}_o$, $\underline{V}_d$ și $\underline{V}_i$.*

Folosind relația (3), a doua și a treia ecuație din sistemul de ecuații (2) se pot exprima astfel:

$$\begin{aligned} \underline{V}_2 &= \underline{V}_0 - (1+a)\,\underline{V}_d + a\,\underline{V}_i = (\underline{V}_0 - \underline{V}_d) - a\,(\underline{V}_d - \underline{V}_i) \\ \underline{V}_3 &= \underline{V}_0 - (1+a^2)\,\underline{V}_d + a^2\,\underline{V}_i = (\underline{V}_0 - \underline{V}_d) - a^2\,(\underline{V}_d - \underline{V}_i) \end{aligned} \tag{4}$$

Notînd diferențele componentelor simetrice cu

$$\begin{aligned} \underline{V}_{od} &= \underline{V}_o - \underline{V}_d \\ \underline{V}_{di} &= \underline{V}_d - \underline{V}_i \\ \underline{V}_{to} &= \underline{V}_i - \underline{V}_o \end{aligned} \tag{5}$$

în reprezentarea grafică corespunde figura 1.

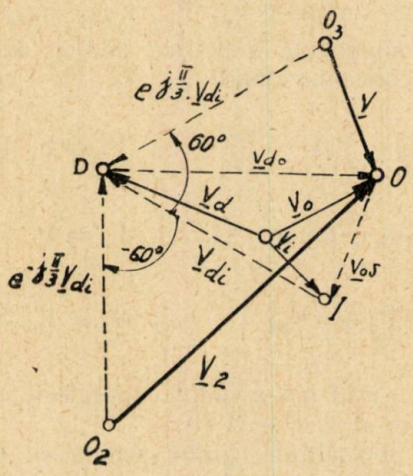


Fig. 1

Cu aceste notații ecuațiile (4) capătă forma

$$\begin{aligned} \underline{V}_2 &= \underline{V}_{od} - a\,\underline{V}_{di}. \\ \underline{V}_3 &= \underline{V}_{od} - a^2\,\underline{V}_{di} \end{aligned} \tag{6}$$

Din definiția operatorului a rezultă $-a = -e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\pi} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{\pi}{3}}$ și $-a^2 = -e^{-j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\pi} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{\pi}{3}}$. Ca urmare, prima din ecuațiile (6) arată că vectorul care reprezintă mărimea $\underline{V}_2$ corespunzătoare fazei 2, este egal cu suma dintre vectorul $\underline{V}_{od}$ și vectorul $\underline{V}_{di}$ rotit cu 60° în urmă (adică în sensul rotirii acelor de ceasornic). Realizarea grafică a acestor operații este indicată în fig. 1, prin linii punctate, (triunghiul O_2DO).

A doua ecuație din (16) ne arată că vectorul care reprezintă mărimea $\underline{V}_3$ corespunzătoare fazei 3, este egal cu suma dintre vectorul $\underline{V}_{od}$ și vectorul $\underline{V}_{di}$ rotit cu 60° înainte. Realizarea grafică a operației de rotire și însumare este indicată în aceeași figură (triunghiul O_3DO). Mărimile $\underline{V}_2$ și $\underline{V}_3$ sînt indicate în această figură prin linii îngroșate.

Determinarea punctelor 0_1 și 0_2, care sînt respectiv originile vectorilor $\underline{V}_1$ și $\underline{V}_2$, se poate face simplu pe baza observației că triunghiurile DO_2I și DO_3I sînt triunghiuri echilaterale (deoarece au cîte un unghiu de 60° cuprins între două laturi egale). Rezultă construcția grafică simpli-

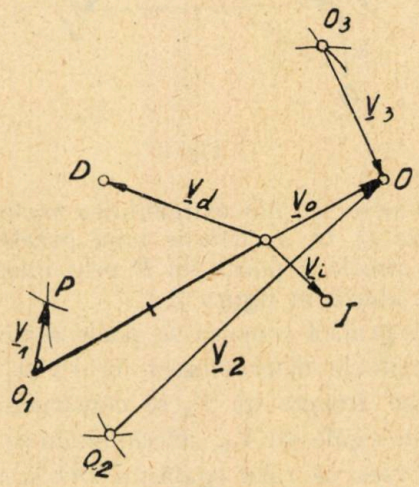


Fig. 2

ficată a vectorilor $\underline{V}_2$ și $\underline{V}_3$, așa cum se indică în fig. 2 — se construiesc cu o origine comună vectorii $\underline{V}_o$, $\underline{V}_d$ și $\underline{V}_i$; se determină originile O_2 și O_3 ale vectorilor $\underline{V}_2$ respectiv $\underline{V}_3$ la intersecția arcelor de cerc cu centrele în punctele D respectiv I (vîrfurile vectorilor $\underline{V}_d$ respectiv $\underline{V}_i$) și de rază egal cu segmentul DI; vectorii $\underline{V}_2$ și $\underline{V}_3$ sînt respectiv vectorii care au originea în O_2 și extremitatea în O, respectiv originea în O_3 și extremitatea în O. Identificarea punctelor O_2 respectiv O_3 se face observînd că punctul O_3 este punctul în care ajunge punctul I în urma rotirii segmentului orientat ID, în jurul punctului D, cu 60° în urmă (în sensul rotirii acelor de ceasornic).

2. *Determinarea grafică a mărimii $\underline{V}_1$, corespunzătoarei fazei 1 în funcție de componentele simetrice ale sistemului de mărimi trifazat.*

Pentru determinarea mărimii $\underline{V}_1$, prima ecuație din sistemul de ecuații (2) se poate pune sub forma:

$$\underline{V}_1 = 3\,\underline{V}_o + (\underline{V}_d - \underline{V}_o) + (\underline{V}_i - \underline{V}_o) = 3\,\underline{V}_o + \underline{V}_{do} + \underline{V}_{io} \qquad (7)$$

Ecuația (7) permite utilizarea vectoriilor $\underline{V}_o$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$ — dispuși ca la metoda precedentă — pentru determinarea mărimii $\underline{V}_1$. Într-adevăr ecuația (7) exprimă faptul că vectorul sumă $(\underline{V}_{do}+\underline{V}_{io})$ însumat cu vectorul 3 $\underline{V}_o$ ne dă vectorul $\underline{V}_1$. Rezultă construcția grafică indicată în figura 3.

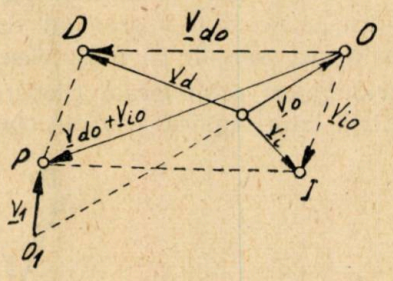


Fig. 3

Observînd că punctul P, din extremitatea vectorului $\overline{OP} = \overline{V}_{do}+\overline{V}_{io}$, formează cu punctele D, O, I vîrfurile unui paralelogram rezultă posibilitatea determinării directe a punctului P prin intersecția a două arce de cerc — așa cum se indică în figura 2.

Prin construcția grafică propusă se poate realiza determinarea lui $\underline{V}_1$ pe figura care servește la determinarea lui $\underline{V}_2$ și $\underline{V}_3$. Pentru aceasta se procedează astfel: pe dreapta lui $\underline{V}_o$ se construiesc din originea acestui vector două segmente egale cu V_0, determinîndu-se astfel punctul O_1; se trasează un arc de cerc de rază egală cu DO și avînd centrul în I; se trasează cu centrul în D un arc de cerc avînd raza OI; la intersecția acestor două arce de cerc se află punctul P; vectorul O_1P reprezintă vectorul căutat $\underline{V}_1$.

3. *Problema generală a determinării de metode grafice pentru aflarea sistemelor de mărimi trifazate, corespunzătoare unor componente simetrice date.*

Din punct de vedere matematic, operația obținerii componentelor simetrice corespunzătoare unui sistem trifazat de mărimi se poate interpreta ca o transformare liniară a unui vector, a cărui componente formează o matrice $[\underline{V}]$, într-un vector a cărui componente formează o matrice $[\underline{V}_s]$.

Folosind matricele:

$$[\underline{V}]=\begin{bmatrix}\underline{V}_1\\ \underline{V}_2\\ \underline{V}_3\end{bmatrix};\quad [\underline{V}_s]=\begin{bmatrix}\underline{V}_o\\ \underline{V}_d\\ \underline{V}_i\end{bmatrix}\quad \text{și}\quad [S]=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{bmatrix} \tag{8}$$

ecuația de definiție a componentelor simetrice se scrie:

$$[\underline{V}_s]=[S]\,[\underline{V}] \tag{9}$$

Determinarea componentelor simetrice $\underline{V}_{os}$, $\underline{V}_{ds}$, $\underline{V}_{ts}$ ale sistemului trifazat, format de cele trei componente simetrice $\underline{V}_o$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$, revine astfel la aplicarea transformării liniare de matrice $[S]$ vectorului $[\underline{V}_s]$, avem deci:

$$[\underline{V}_{ss}] = \begin{bmatrix} \underline{V}_{os} \\ \underline{V}_{ds} \\ \underline{V}_{is} \end{bmatrix} = [S]\ [\underline{V}_s] = [S] \cdot [S] \cdot [\underline{V}] . \qquad (10)$$

Luînd valoarea matricei $[S]$ corespunzătoare sistemului de componente simetrice — ecuația (8) — se obține:

$$[\underline{V}_{ss}] = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot [\underline{V}] = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot [\underline{V}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_3 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$\text{adică: } \underline{V}_{os} = \frac{1}{3}\underline{V}_1,\ \underline{V}_{ds} = \frac{1}{3}\underline{V}_3 \text{ și } \underline{V}_{is} = \frac{1}{3}\underline{V}_2 \qquad (11)$$

Ecuațiie (11) arată că din cunoașterea componentelor simetrice ale sistemului de componente simetrice $\underline{V}_o$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$, rezultă imediat sistemul de mărimi trifazate care are componentele simetrice $\underline{V}_o$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$.

Din cele demonstrate mai sus, rezultă că aplicînd sistmului $\underline{V}_o$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$, metodele grafice de determinare a componentei omopolare se obține mărimea $\frac{1}{3}\underline{V}_1$; aplicînd metodele grafice de determinare a componentei directe se obține $\frac{1}{3}\underline{V}_3$ și aplicînd metodele grafice de determinare a componenței inverse se obține $\frac{1}{3}\underline{V}_2$. Metodele grafice cunoscute — care pornind de la $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ determină segmente orientate corespunzătoare lui $3\underline{V}_o$, $3\underline{V}_d$, $3\underline{V}_i$ — aplicate sistemului de mărimi $\underline{V}_o$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$, determină direct vectorii $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$, (și nu $3\underline{V}_1$, $3\underline{V}_2$ sau $3\underline{V}_3$).

Ecuațiile (11) fiind general valabile rezultă imediat posibilitatea determinării experimentale a sistemelor trifazate de mărimi în funcție de componentele lor simetrice, cu ajutorul unor aparate de măsură alimentate corespunzător prin filtre de componente simetrice. Această ultimă chestiune prezintă interes atunci cînd se folosesc mese de calcul. La utilizarea unor astfel de scheme de măsură trebuie să se dea o atenție deosebită respectării condițiilor în care filtrele funcționează corect (lipsa firului neutru, etc.).

Catedra de Electrotehnică
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Neiman L.* și *Kalantarov P.*: Teoreticeskie osnovî elektrotehnikii, CEI, Moscova 1954
2. *Wagner C. F.* și *Evans R. D.*: Symetrical components. Mc Graw Hill Book Company, 1933
3. *Hochrainer A.*: Simmetrische Komponenten in Drehstrom-systemen, Springer Verlag, Berlin, 1957.
4. *Antoniu I. S.*: Chestiuni speciale de electrotehnică, Editura Academiei R.P.R., București, 1956.

ПОЛЕЗНЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ОБЛАСТИ МЕТОДА СИМИЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

(Краткое содержание)

В работе указаны графические построения, которые позволяют просто и быстро определить трехфазные системы величин в зависимости от их симметричных составляющих.

Эти построения не требуют определения всех векторов, которые составляют системы симметричных составляющих, а используют единое изображение главных векторов систем симметричных составляющих.

GRAPHIC DESIGNS AVAILABLE WITHIN THE FRAMEWORK OF THE SYMETRICAL COMPONENT METHOD

(Summary)

The present paper deals with graphic designs allowing a simple and rapid determination of the threephased systems of quantities, in function of their symmetrical components.

These graphs de not need the determination of all the vectors forming the symmetrical component systems, they use a single representation of the main vectors of the symmetrical component systems.

CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES UTILES DANS LE CADRE DE LA MÉTHODE DES COMPOSANTES SYMÉTRIQUES

(Résumé)

L'auteur présente quelques constructions graphiques permettant la détermination simple et expéditive des systèmes triphasées de vecteurs en fonction de leur composantes symétriques.

Ces constructions ne nécessitent pas la connaissance de tous les vecteurs formant les coordonnées symétriques du système, la seule connaissance des vecterus principaux de ces coordonnées symétriques étant suffisante.

NÜTZLICHE GRAPHISCHE KONSTRUKTIONEN IM RAHMEN DER METHODE DER SYMETRISCHEN KOMPONENTEN

(Zusammenfassung)

Es werden graphische Konstruktionen vorgeführt, die eine einfache und schnelle Ermittlung der dreiphasischen Systeme von Grössen, in Funktion ihrer symetrischen Komponenten, ermöglichen.

Diese Konstruktionen erforden nicht die Ermitlung aller Vektoren, welche die Systeme von symetrische Komponenten bilden, sondern verwenden einen einzige Darstellung der wichtigsten Vektorem der Systeme von symetrischen Komponenten.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

ELECTRONICĂ

BETRACHTUNGEN ÜBER EINIGE GRUNDAUFGABEN DES FARBFERNSEHENS

AL. SPĂTARU

Das Farbfernsehen war und ist noch heute der Gegenstand einer grossen Zahl von Forschungsarbeiten und wertvollen technischen Arbeiten.

In den letzten Jahren ist das Interesse für diese Aufgabe immer grosser geworden, weil sie immer mehr von dem grossen Publikum verlangt wird.

Die grossen Fortschritte, die auf dem Gebiet des monochromen Fernsehens erreicht worden sind, und die vollkommene Genugtuung, die es in den meisten Fällen geben kann, führen dazu, dass das Farbfernsehen nicht als ein Ersatz des monochromen Fersehens, sondern als dessen Vervollständigung erscheint.

Die Übertragung der Farbinformation, abgesehen von dem künstlerischen Genuss, wird in manchen Fällen, wie z.B. die Anwendung in der Technik und in der Medizin, eine dringende Notwendigkeit.

Der Zweck des Farbfernsehens ist die Wiedergabe eines Bildes, auf dem Bildschirm des Empfangsapparates, das die Eigenschaft hat, genau dieselbe optische Empfindung hervorzurufen als diejenige, die ein Zuschauer haben würde, wenn er sich selbst an Ort und Stelle der betreffenden Szene, wo auch die Kamera aufgestellt ist, befinden würde. Demzufolge ist es notwendig für die Ausarbeitung des Systems für das Farbfernsehen, den physischen Prozess der Umwandlung und der Übertragung der Zeichen, zwecks Erhaltung des Bildes, sowie den psychologischen Prozess, den der Zuschauer zur Deutung des Bildes nötig hat, in Betracht zu ziehen.

Die Wissenschaft, die die Verbindung zwischen dem Bereich der Physik (wo die Phänomene mathematisch aufgefasst werden können) und dem Bereich der Psychologie (wo die Phänomene nicht mathematisch aufgefasst werden können), ist die Psychophysik. Die Psychophysik kann als eine statistische Wissenschaft angesehen werden, die sich auf experimentelle Daten stützt — sie arbeitet nur mit Mittelwerten.

Der Beitrag der Physik, der Psychophysik und der Psychologie zum Farbfernsehen kann schematisch wie folgt dargestellt werden:

Der Prozess	*Das Gebiet*
1. Erzeugung von Lichtenergie; Umänderung der Lichtenergie durch die Flächen der Szenen, die durch die Fernsehkamera aufgenommen werden.	der Physik
2. Die Deutung der Szene durch den Programmregisseur, wodurch Schlüsse betreffs Lichtanordnung und Kameraaufstellung u.s.w., gezogen werden können	der Psychologie
3. Erzeugung von elektrischen Signalen zwecks Wiedergabe des farbigen Bildes der Szene.	der Physik (u. zwar Optik und Elektronik) und der Psychophysik (bzw. ihrer speziellen Abzweigung, der Kolorimetrie)
4. Die Übertragung der Signale von der Kamera zum Empfänger.	der Physik (in Einzelnen der Radiotechnik)
5. Die Erzeugung eines Bildes im Empfänger, das das Auge erregt.	der Physik (im Einzelnen der Elektronik) und der Psychophysik (der Kolorimetrie)
6. Die Deutung des Bildes vom Fernsehzuschauer.	der Psychologie

Das soll nicht bedeuten, dass andere Wissenschaften nicht ihren Beitrag zum Farbfernsehen liefern, da beinahe alle Grundwissenschaften dazu beitragen, wenn es sich um manche Einzelheiten handelt. So z. B. spielt die Chemie eine hervorragende Rolle in den Untersuchungen über die Verbesserung der Phosphormaterialien, die für die Farbbildröhren Verwendung finden.

Die Farbe ist eine Eigenschaft des Lichtes, die man schwer definieren kann. Man konnte sagen, dass nach der Beseitigung der Variationen des Lichtes in Raum und Zeit, die anederen ichteigenschaften die Farbe bilden (Das Licht mag als visuelle Bewertung der strahlenden Energie betrachtet werden).

Die Farbe hat einen psychophysischen Charakter und in Verbindung damit müssen wir auch eine klare Unterscheidung zwischen Reiz und Empfindung machen. Der Reiz ist physischer Natur, eine bestimmte Energiemenge für jede Wellenlänge. Die Empfindungen sind rein psychologisch und hängen vom Individuum ab.

Das Erforschen der Verbindungen zwischen dem physischen und psychischen Charakter der Farbe wurde in einer langen Reihe von Jahren, in denen man einen schweren Kampfampf der Ansichten führen musste,

durchgeführt. Zu diesem Gegenstand haben eine grosse Anzahl vor Forchern ihren Beitrag geliefert. Darunter sind auch die terühmten Physiker Isac Newton, Herman von Helmholtz und James Maxwell und neuerdings E. Schrödinger.

Die Strahlungen des sichtbaren Spektrums werden farbig wahrgenommen, jeder Wellenlänge entspricht eine Farbe. Die Korrespondenz ist aber nicht eine zweideutige, sondern eine bestimmte Farbe kann einem sehr verschiedenartigen Gemisch von Spektralenergien entsprechen. Es giht nämlich eine grosse, unbegrenzte Zahl von Kombinationen der Spektralenergien, die dieselbe Empfindung erregen können.

Diese Eigenschaft des Auges ist ganz verschieden von der des Ohres, das die Töne nach den verschiedenen Frequenzkomponenten analysiert.

Die wichtigste und die interessanteste Charakteristik des Auges ist die, dass es in einem ziemlich grossen Bereich der Lichtstärke fast eine jede Farbe durch eine Kombination von drei Farben wahrnehmen kann.

Diese trichromatische Natur des Auges ist eine bemerkenswerte Tatsache und bildet einen der Grundsätze, auf den das Farbfernsehen aufgebaut ist.

So kann man eine Farbgleichung schreiben

$$C_1 = R_1(R) + G_1(G) + B_1(B)$$

die man folgendermassen deuten kann: (fig. 1) Durch die Wahl der Primärfarben (R), (G), (B) als Einheiten können wir die Farbe C_1, durch die Mischung der drei Farben, mit den Mengen: R_1, G_1, B_1, erhalten. Sind einmal die Primärfarben gewählt, so ist die Gleichstellung eindeutig.

Die Auswahl der Primärfarben kann willkürlich sein, falls diese sich genug unterscheiden, so dass sie drei ausgezeichnete Bereiche aus dem sichtbaren Gebiet darstellen.

Die Einheiten, die die Primärfarben ausdrücken, sind derart ausgewählt dass wir damit für $R = G = B = 1$, weiss erhalten

$$W = (R) + (G) + (B)$$

Diese drei Erregungswerte, bezw. die Koeffizienten R, G. B, definieren die Farbe im Verhältnis zu den ausgewählten Primärfarben.

Die drei Erregungswerte von denen wir gesprochen haben, sind aber nicht die einzigen Veränderlichen, die zur Beschreibung der Farbe verwendet werden konnen. Eine ganze Reihe von verschiedenen Veränderlichen können verwendet werden, aufgebaut auf psychologischen Wahrnehmungen und zwar: Helligkeit, Tönung und Sättigung.

Die Helligkeit ist als Eigenschaft der Farbe definiert, die uns gestattet, sie mit einer achromatischen Farbe gleichzustellen (im schwarzweissen Bereich).

Die Tönung ist diejenige Eigenschaft der Farbe, die uns gestattet, die Trennung von Farben in Gruppen Vorzunehmen, die rot, grün, blau u.s.w. genannt werden.

Die Sättigung ist ein Mass des Grades, in dem eine bestimmte Farbe mit weissem Licht geschwächt ist.

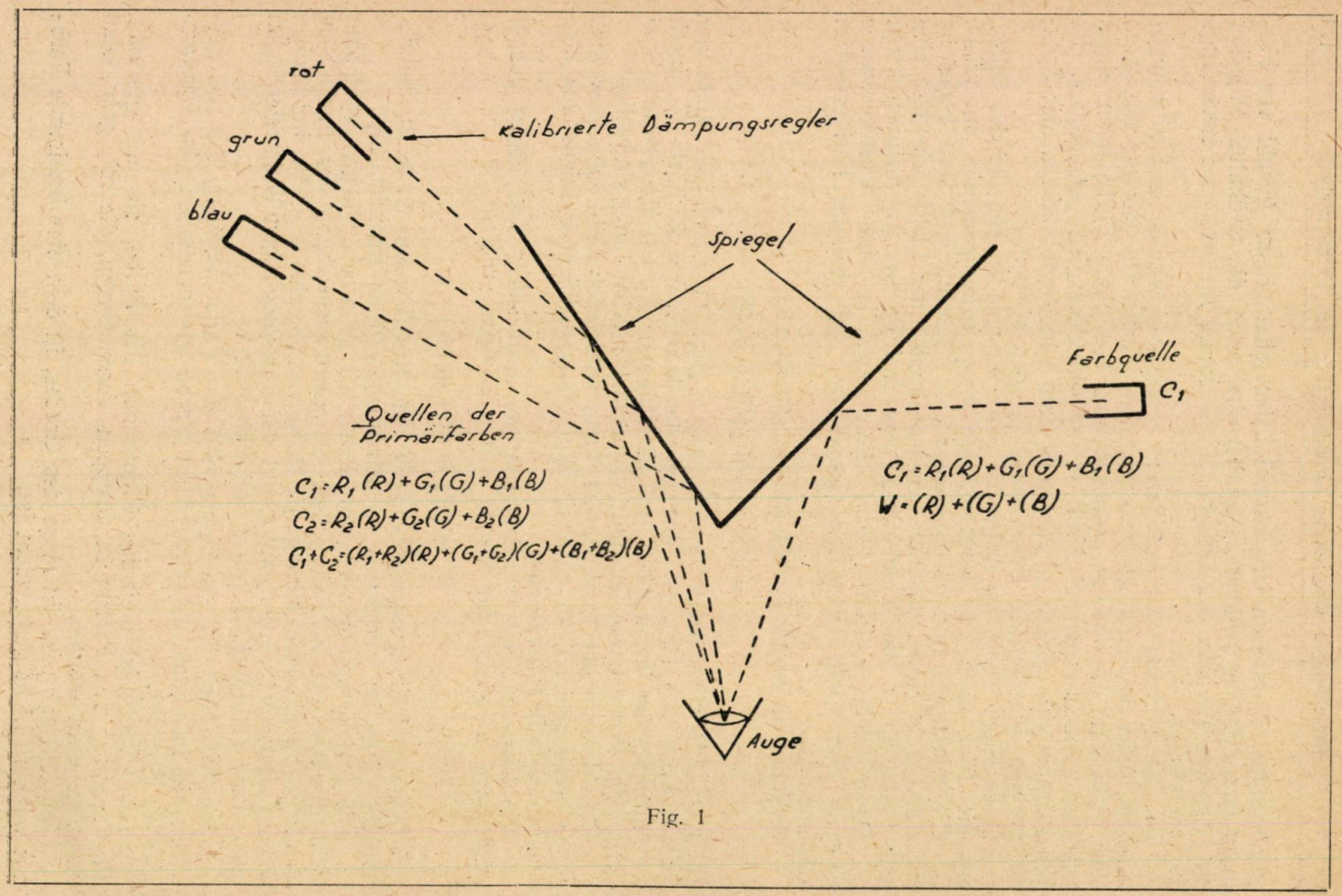

rot
grun
blau
kalibrierte Dämpungsregler
Spiegel
Farbquelle
C1
Quellen der Primärfarben
C1 = R1 (R) + G1 (G) + B1 (B)
C2 = R2 (R) + G2 (G) + B2 (B)
C1 + C2 = (R1 + R2)(R) + (G1 + G2)(G) + (B1 + B2)(B)
C1 = R1 (R) + G1 (G) + B1 (B)
W = (R) + (G) + (B)
Auge

Fig. 1

Dieser Veränderlichen psychologischer Natur entsprechen die Veränderlichen psychophysischer Natur und zwar :

Die Luminanz, die herschende Wellenlänge und die Reinheit.

Noch vor 100 Jahren gelangte der deutsche Professor H. Grassmann durch tiefgehende Studien über die Farbe zu einer Reihe von Gesetzen grundlegender Bedeutung, und zwar :

I. Das Augekann nur drei Arten vor Änderungen (die wir heutzutage als Luminanz, herschende Wellenlänge und Reinheit bezeichnen) unterscheiden.

II. Quellen derselben Farbe erzeugen gleiche Wirkungen in einem Gemisch, ungeachtet ihrer spektralen Zusammensetzung. Dieses Gesetz ist von grosser Wichtigkeit, da es, im Grunde genommen, nur eine Bestätigung des additiven Grundsatzes aus der Kolorimetrie ist. Falls wir zwei Farben haben :

$$C_1 = R_1\ (R) + G_1\ (G) + B_1\ (B) \text{ und}$$

$$C_2 = R_2\ (R) + G_2\ (G) + B_2\ (B)$$

dann erhalten wir durch ihre Zusammenmischung eine neue Farbe die durch die Gleichung

$$C = C_1 + C_2 = (R_1 + R_2)(R) + (G_1 + G_2)\ (G) + (B_1 + B_2)$$

gegeben ist.

III. Die gesamte Luminanz einer Farbe ist gleich der aritmetischen Summe der Komponenten der Luminanzen.

Diese Gesetze bilden der Grund des Farbfernsehens. Das erste Gesetz zeigt uns, dass es genügt, drei Informationen zu übertragen, die sich auf die Sznenelemente, die wir wiedergeben wollen, beziehen. Das zweite Gesetz besagt, dass eine ganze Reihe von linearen Umwandlungen erlaubt sind, welche zwecks Übertragung der angemessensten Farbinformationen angewendet werden.

Für die Bestimmung der zur Übertragung notwendigen Information zwecks Erhaltung eines farbigen Bildes ist die Kenntnis der Eigenschaften der Farbwahrnehmung unentbehrlich. Es ist ganz unvernünftig, mehr Informationen als das Auge wahrzunehmen vermag zu übertragen.

Das ist also eine erste Aufgabe, das Anpassen des Farbfernsehsystems an die Notwendigkeiten und die Wahrnehmungskapazität des Auges durchzuführen.

Eine zweite Aufgabe ist es, ein Farbfernsehsystem zu verwirklichen, das dieselbe Grundsätze verwendet und dieselbe Bandbreite hat, als das monochrome Fernsehen, zwecks Sicherung der Kompatibilität.

Als Folge der grossen Verbreitung des monochromen Fernsehens wird eine Sicherstelung des Empfanges der Farbfernsehübertragungen mit monochromen Apparaten und umgekehrt unentbehrlich.

Im Zusammenhang mit dem Anpassen des Farbfernsehsystems an die Möglichkeiten des Auges muss man folgendes voraussetzen :

— Die Empfindlichkeit des Auges ist nicht die Gleiche für alle Farben. Bei den feinen Einzelheiten wird das Auge unempfindlich für Farbe, das

heisst gleichgültig gegenüber der Farbe, sie erscheinen schwarz-weiss. Wir können in diesem Falle sagen, dass das Auge monochromatisch ist.

— Bei den mittleren Einzelheiten (Sehwinkeln zwischen 10 und 25 Minuten) wird das Auge dichromatisch, das heisst, die gesehenen Farben können nur mit Hilfe von zwei Primärfarben synthetisiert werden. In dieser Lage verwechselt es eine ganze Reihe von Farben und zwar: blau, grau, gelb — grün.

Bei den grossen Einzelheiten sind alle Farben zu sehen. Alle diese Eigenschaften des Auges in Betracht ziehend, ergibt sich, dass die für die Übertragung notwendige Information, um ein farbiges Bild zu erhalten, nur bis zu dreimal grösser ist als die zur monochromen Übertragung notwendige Information.

Im Falle von grossen Einzelheiten ist es notwendig Informationen auf allen drei Kanäle, aber nur mit einer engen Bandbreite (z. B. 0—600 kHz), zu übertragen.

Im Falle von mittleren Einzelheiten genügt es, nur auf zwei Kanälen, aber mit einer grösseren Bandbreite zu übertragen (z.B. 0—1,5 MHz) und im Falle feiner Einzelheiten genügt, es auf einem einzigen Kanal von grosser Bandbreite (z.B. 0—6 MHz), zu übertragen.

Das breitbandige Signal Ey ist für den monochromen Empfang bestimmt und aus den drei Primärfarben gebildet, aber nicht in gleichen Mengen, sondern im Verhältnis des betreffenden Beitrages an der Luminanz.

$$Ey = \alpha E_R + \beta E_G + \gamma E_B \text{ wobei}$$
$$\alpha + \beta + \lambda = 1 \text{ ist.}$$

Auf diese Weise kann man eine Verbesserung des Verhältnisses Signal/Geräusch und eine bessere Wiedergabe des Bildes bei den monochromen Empfängern erhalten. Das Ergebnis ist ähnlich den photographischen Wiedergaben mit orthopanchromatischen Emulsion.

Auf den anderen zwei Kanälen können die Grundsignale rot und blau (E_R und E_B) mit einer mindestnotwendigen Bandbreite übertragen werden. Das wird aber nicht angewendet, da in diesem Falle, der Grundsatz „konstante Luminanz" nicht beachtet wird.

Der Grundsatz der „konstanten Luminanz", der besagt, dass „die Signale in den Farbkanälen die Luimnanz des wiedergegebenen Bildes nicht beeinträchtigen sollen", wird durch die Tatsache begründet, dass die Empfindlichkeit des Auges bei Helligkeitsänderungen grösser wird, als bei Chrominanzänderungen.

Wird dieser Grundsatz beachtet, so bedeutet dies, dass die Interferenzen und die Geräusche aus den Chrominanzkanälen nur Farbveränderungen erzeugen werden, die sich beträchtlich weniger störend auswirken als diejenigen der Luminanz.

Falls wir an Stelle der Farbsignale E_R und E_B, die Differenzsignale $E_R—E_y$ übertragen, so wird der Grundsatz der konstanten Luminanz beachtet. Das merkt man gleich, wenn wir in Betracht ziehen, dass wir eine weisse Szene zu übertragen haben (also nur die Information einer Helligkeit).

In diesem Falle ist $E_R = E_B = E_G$ und demzufolge

$$E_R - E_y = 0 \text{ und } E_B - E_y = 0,$$

nämlich durch die Farbkanäle wird keine Information übertragen.

Zwecks Verwirklichung einer möglichst grossen Ersparnis an „Bandbreite", können die Signale der Farbdifferenz $E_R - E_y$ und $E_B - E_y$ durch Matrizen in zwei andere Signale E_Z und E_Q linear transformiert werden, so das die für E_Q notwendige Bandbreite ein Minimum wird.

Durch Matrizen erhält man beim Empfang die drei Farbinformation E_R, E_G und E_B, die zwischen Gitter und Kathode des trichromatischen Kineskops gelegt werden, so dass man das gewünschte Bild erhält.

Wie vorher behauptet wurde, ist est für die Übertragung einer farbigen Szene notwendig, Informationen bezüglich der drei Parameter zu übertragen. Diese Informationen können nach dem Sequential—, Simultan- oder Sequential - Simultanverfahren übertragen werden.

Beim ersten Verfahren werden die drei Kanäle rot, grün und blau der Reihe nach übertragen und die Trägheit des Bildes, auf der Rethina trägt zur Wiederherstellung des farbigen Bildes bei.

Die Systeme, die das Sequentialverfahren anwenden, haben den Vorteil der Einfachheit, aber sie führen zu einer schlechten Ausnutzung des Frequenzbandes und ausserdem noch sind sie nicht kompatibel.

Das zweite System der simultanen Übertragung, behält die Bandbreite und stützt sich auf die Tatsache, dass in dem monochromen Fernsehsigalspektrum eine Folge von Intervallen sind, in denen man die spektrale Leistungsdichte als ungefähr Null betrachten kann. Wenn wir eine statische Szene haben würden, hätte das Signalspektrum diskrete Komponenten, auf den harmonischen der Zeilenfrequenz und, um diese herum, eine Gruppe von distanzierten Komponenten mit der Rasterfrequenz (fig. 2).

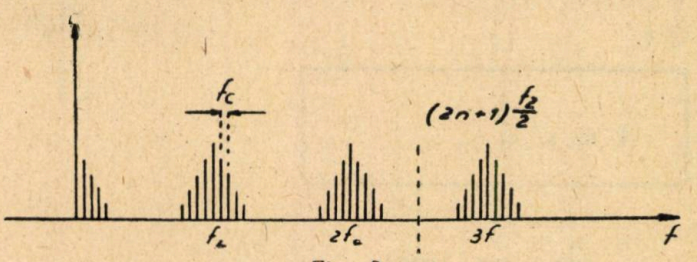
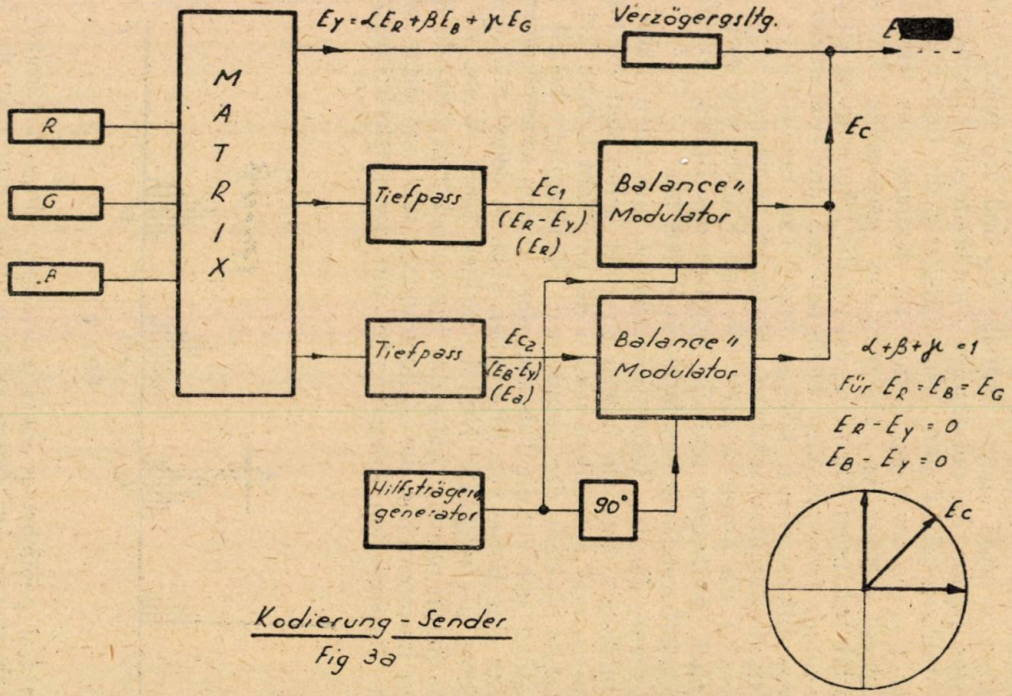


Fig. 2

In den frei gebliebenen Zwischenräumen eines ungeraden Vielfachen der halben Frequenz der Zeilen entsprechend, kann man die Farbinoformation übertragen. Die Chrominanzsignale, sei es in der Differenzform $E_R - E_y$ und $E_B - E_y$ oder der Form E_I und E_Q oder, im allgemeinen, in jeder Form E_{C1} und E_{C2}, können mittels diesen Intervallen verschiedenartig übertragen werden, ohne dadurch die Qualität des Bildes, das mittels eines monochromen Fernsehapparates zu empfangen ist, irgendwie gestört ist. Das ist moglich, da jede Komponente von einem ungeraden Vielfachen der halben Zeilenfrequenz, eine sehr verringerte Sichtbarkeit hat.



Kodierung - Sender

Fig 3a

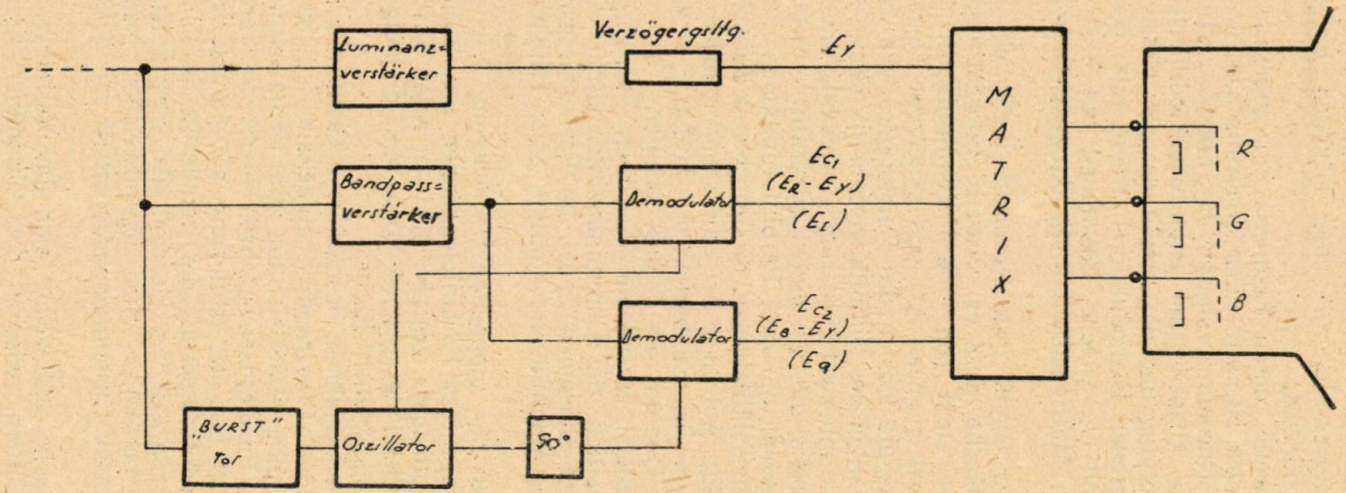

Luminanz-verstärker
Verzögergsltg.
E_Y
Bandpass-verstärker
Demodulator
E_{C1}
$(E_R - E_Y)$
(E_I)
Demodulator
E_{C2}
$(E_B - E_Y)$
(E_Q)
MATRIX
R
G
B
„BURST" Tor
Oszillator
90°

Fig. 3 b

Das meist verbreitete Übertragungsverfahren NTSC (Fig. 3) verwendet eine Hilfsträgerwelle, mit einer erhöhten Frequenz im oberen Bereich des Videospektrums.

Die Hilfsträgerwelle, deren Frequenz ein ungerades Vielfaches der Halbfrequenz der Zeilen ist, wird einer quadratischen Modulation unterzogen, durch die zwei Chrominanzsignale E_{C1} und E_{C2} entsehen. Auf diese Art erhält man eine phasen- und amplitudenmodulierte Welle, bei der die Phase der Farbtönung und die Amplitude der Sättigung ensprechen. Mit Hilfe von synchronen Demodulatoren trennt man beim Empfang, die zwei Signale C_1 und C_2, welche zussmmen mit dem Signal E_y und einer entsprechenden Matrizenbildung die Anfagssignale E_R, E_G und E_B ergeben.

Dieses Verfahren ergibt gute Resultate bezüglich der Qualität des Bildes, aber die Tatsache, dass es schwere Anforderungen bezüglich der Linearität der Phase stellt (da eine Farbinformation durch die Phase des Chrominanzsignals gegeben ist) und synchrone Demodulatoren benötigt, führt dazu, dass die Kosten des Empfängers sehr hoch liegen.

Als andere Varianten des Simultanverfahrens führen wir an :

— Das Verfahren mit zwei Hilfsträgern, welches, um die Phasenschwirigkeiten des Verfahrens, des mit einem quadratisch modulierten Hilfsträger arbeitet, zu umgehen, die zwei Farbinformationen durch die Amplitudenmodulation von zwei Hilfstrager, die im oberen Bereich des Videospektrums liegen, überträgt. Auf diese Art erhält man manche Vereinfachungen des Empfängers, aber die Sictbarkeit der Hilfsträger wird stärker und demzufolge wird die Qualität des Bildes geringer.

— Das von Valensi erarbeitete Verfahren überträgt normalerweise die Helligkeitsinformation, die Chrominanzinformation wird in 29 Werte quantisiert, die 29 verschiedenen Zonen im Farbendiagramm entsprechen und dann durch eine Amplitudenmodulation eines Hilfsträgers übertragen werden.

— Das Verfahren der „doppelten Übertragung"", vorgeschlagen vom Prof. Boutry, überträgt drei Farbinformationen und zwar : die positiven Amplituden des Hauptträgers, entsprechend der roten Farbe, die negativen Amplituden, entsprechend der grünen Farbe und diejenige eines Hilfsträgers, entsprechend der blauen Farbe.

Ein interessantes Verfahren, des auf dem Grundsatz einer simultanen und einer sequentialen Übertragung aufgebaut ist, ist das Verfahren „Secan". Dieses Verfahren stützt sich auf zwei Gedanken und zwar :

In den anderen Farbfernsehverfahren bleibt die verticale Auflösung praktisch unvrerändert und die Auflösung auf der Horizontalen ist sehr gering, als Folge der Verringerung der Bandbreite der Chrominanzsignale.

Weil die Auflösung auf der Horizontalen gering ist, kann man die Auflösung auf der Vertikalen ohne irgendwelchen Nachteil durch die Erzeugung einer neuen Chrominanzinformation zu jeder zweiten Zeile verringen.

Die zweite Tatsache, auf welche sich das Verfahren „Secam" stützt, ist die starke Korrelation zwischen den Chrominanzsignalen der Nachbarzeilen.

Zusammenfassend ist der Grundsatz des „Secam" Verfahrens folgender: Bei der Übertragung des Helligkeitssignals E_y wird bei allen Zeilen mit grosser Bandbreite übertragen, aber jedes von den zwei Chrominanzsignalen E_{C1} und E_{C2} wird abwechselnd durch Zeitteilung, je eins in jeder Zeile, übertragen. Die für eine gewisse Zeile nicht übertragene Chroominanzinformation unterscheidet sich sehr wenig vor derjenigen der vorhergehenden Zeile. Dies gestattet, beim Empfang mit Hilfe einer Verzögerungsleitung, immer die Anwesenheit von zwei Chrominanzsignale E_{C1} und E_{C2} zu haben, von denen eins von der vorangehenden Zeile herrkommt, aber sich sehr wenig von dem, was tatsächlich übertragen sein sollte, unterscheidet.

Zusammenfassend sind beim Emfang drei Signale anwesend, eins für die Helligkeit E_y und zwei, E_{C1} und E_{C2} für die Farbe. Auf diese zwei muss man in der Folge dieselben Matrizenoperationen, wie beim Simultanverfahren, N.T.S.C. anwenden.

Die zwei Farbinformationen werden für jede Zeile durch Frequenz modulation eines Hilsträgers mit einem ungeraden Vielfachen der Zeilenfrequenz der Reihe nach übertragen.

Ohne in Einzelheiten einzugehen, werden wir folgendes feststellen:

Das vollständige Signal E'_T (mit Strich wurden die Signale notiert, die noch Hochfrequenz-Anteile enthalten) wird folgendermassen gebildet:

— Ein Helligkeitssignal E'_y

— Die sequentialen Signale der Chrominanz E_{C1} und E_{C2}

— Ein Synchronisiersignal S'_y, das sowohl die klassischen Synchronisiersignale für die Zeilen und Raster, als auch ein Farbsynchronisiersignal hat, das die Trennung der Signale E_{C1} und E_{C2} beim Emfang gestattet.

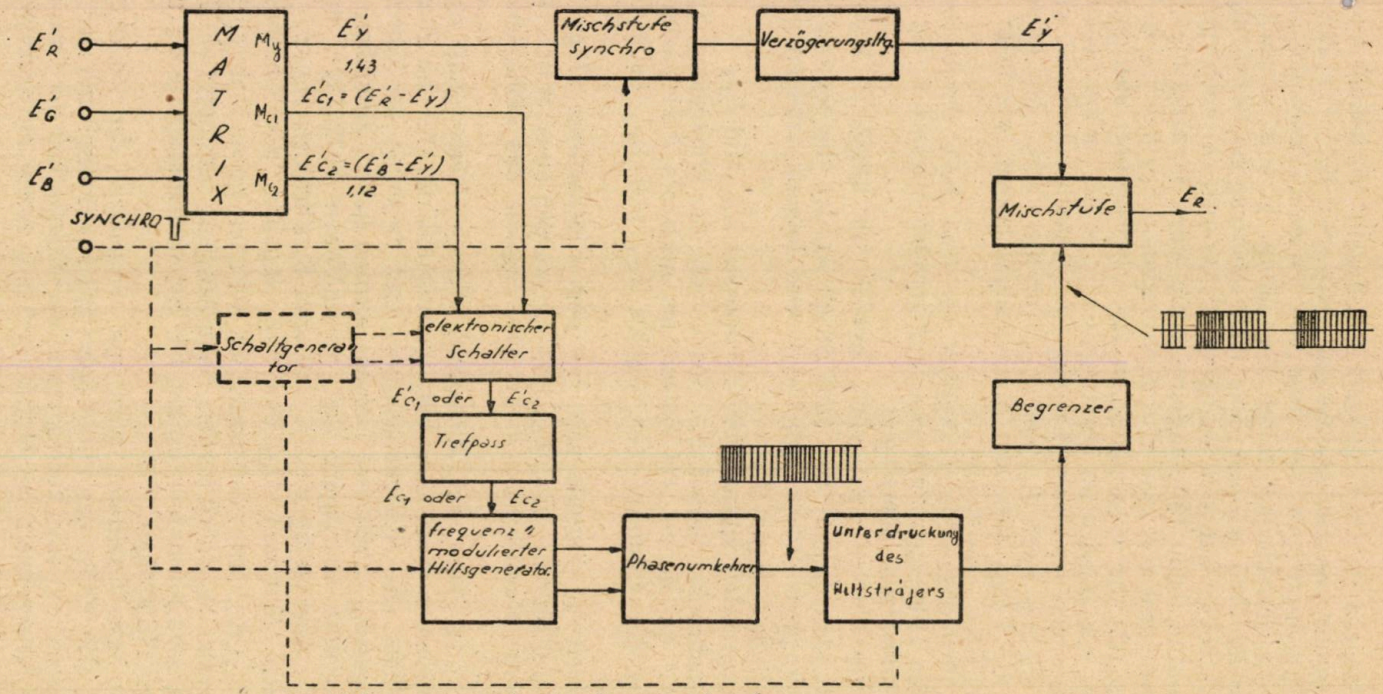
Das Kodieren der Signale wird mit dem Blockschema (Fig. 4) verwirklicht. Die drei Signale E'_R, E'_G, und E'_y werden einer Matrix M_y, die durch eine lineare Kombination dieser drei Signale das Helligkeitssignal bildet, zugeleitet.

Diesem Signal wird das klassische Synchronisiersignal zugesetzt und dann durchlaufen beide eine Verzögerungsleitung, die den Zweck hat die richtige Phase des Helligkeitssignals und diejenige der Chrominanz die eine Verzögerung durch den Tiefpass erlitten haben, zu sichern.

Eine Mischstufe überlagert den modulatierter Hilfsträger mit dem Chrominanz —, dem Helligkeits — und dem Synchronisiersignal.

Zwei andere Matrizen M_{C1} und M_{C2} ergeben die Chrominansignale E'_{C2} und E'_{C2}, die einem elektronischen Schalter, gesteurt durch Signale der Zeilenfrequenz, zugeführt werden. Beim Ausgang verringert ein Tiefpass die Bandbreite der Chrominanzsignale. Die Schmalbandsignale E_{C1} und E_{C2} modulieren den Hilfsträger.

Der modulierte Oszillator wird mit *Impulsen der Zeilenfrequenz synchronisiert*. Die Phase des Hilfsträgers wird periodisch mit der Rasterfrequenz umgekert, um eine Verringerung der Sichtbarkeit der Granulation, die durch die Anwesenheit des Hilfsträgers auf einem monochromen Bild bedingt ist, zu erhalten.


E'R
E'G
E'B
MATRIX
My
Mc1
Mc2
E'y
1,43
E'c1 = (E'R - E'y)
E'c2 = (E'B - E'y)
1,12
SYNCHRO
Mischstufe synchro
Verzögerungsltg.
E'y
Mischstufe
ER
Schaltgenerator
elektronischer Schalter
E'c1 oder E'c2
Tiefpass
Ec1 oder Ec2
frequenz u. modulierter Hilfsgenerator
Phasenumkehrer
Unterdruckung des Hilfsträgers
Begrenzer
Identifizierungssignal der Sequenz Ec1, Ec2

Sender

Fig. 4

Zur Identifizierung der Sequenz der Chrominanzsignale wird der Hilfsträger (frequenzmoduliert) in den Linienzwischenräumen unterdrückt. Der Breitenunterschied zwischen den Intervallen, in denen der Hilfsträger unterdrückt wird, erzeugt das Identifizierungs signal der Sequenz.

In Fig. 5 ist das Blockschema vom „Decoder" beim Emfang angegeben.

Das gesamte Signal E_T' wird vom Eingang eines Bandfilters abgeleitet, welches den modulierten Hilfsträger trennt und dann direkt dem Umschalter (1) und durch die Verzögerungsleitung dem Umschalter (2) zugeführt. Die Verzögerungsleitung wandelt die sequentialen Informationen in simultane Informationen um. Die notwendige Verzögerung ist gleich der Dauer einer Zeile.

Ein Schaltgenerator steuert die Umschalter (1) und (2) so, dass an deren Ausgang nach der Demodulation des Hilfsträgers gleichzeitig auch die Signale E_{C_1} und E_{C_2} erhalten werden.

Eine Chrominanzmatrix wandelt die Signale E_{C_1} und E_{C_2} in den Differenzsignale $E_R - E_y$, $E_G - E_y$ und $E_B - E_y$ um.

Das E_y-Signal enthält keine Hochfrequenzanteile des Helligkeitssignals, die durch die Differenz $E_y' - E_y$ gegeben sind und den drei Primärsignalen E_R' E_G' und E_B' gemeinsam sind.

Durch die Zuleitung des Helligkeitssignals E_y' zum Kathodenkreis der Dreifarbenröhre und der Differenzsignale auf die entsprechenden Gitter ergibt sich, dass jede Elektronenkanone durch ein einer einzelnen Primärfarbe entsprechendes Signal gesteuert wird. Zum Beispiel, ist dieses Signal für rot die Summe von $E_R - E_y$ und E_y' bzw. $E_R + (E_y' - E_y)$, das heisst von dem niederfrequenten Anteil des Signal für rot, E_R' und aus dem Hochfrequenzanteil, der den drei Farben gemeinsam ist, gebildet.

Aus dieser summarischen Beschreibung kann man die Einfachheit der zusätzlichen Kreise, die ein Farbfernsehapparat im System „Secam" benötigt, ersehen, was einen sehr grossen Vorteil des Verfahrens bedeutet.

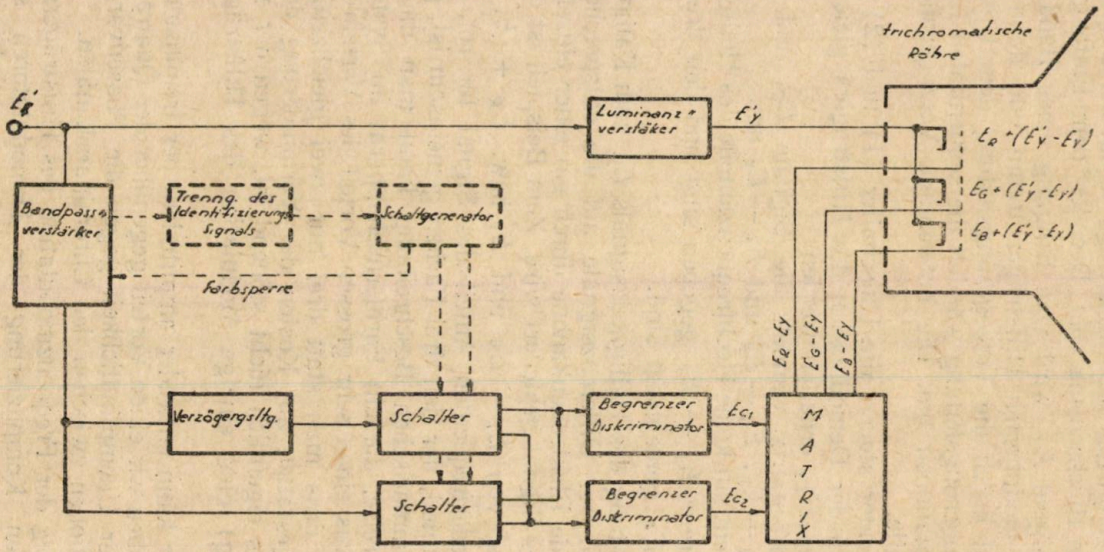
Die Tatsache,, dass man statt drei nur zwei gleichzeitige Informationen überträgt, gestattet, auf Kosten der Verminderung der vertikalen Farbauflösung (was eigentlich nicht stönend ist, wegen der verminderten Horizontalauflösung) eine einzige Modulation des Hilfsträgers zu verwenden.

Der Hilfsträger kann entweder amplituden- oer frequnzmoduliert sein. In beiden Fällen haben wir einen Vorteil gegenüber der Quatratur — Modulation als Folge der Unempfindlichkeit gegen die Phasenvariationen und kleine Intermodulationen zwischen den Chrominanzkanälen.

Die Verwendung der Frequenzmodulation des Hilfsträgers auf Kosten einer unbedeutenden Komplizierung der Demodulatoren sichert einen erhöhten Schutz gegen Störungen und eine nennenswerte Unempfindichkeit für die Nichtlineartitäten des Übertragungskanal.

Zusammenfassend wird das „Secam"-Verfahren charakterisiert durch:

— Simultane Übertragung von nur zwei Farbinformationen
— Eine einzige Modulation des Chrominanzhilfsträgers
— Eine Übertragung der Farbinformation mit der Zeilensequenz



Empfänger
Fig 5

— Die Verwendung einer Gedächtnisvorrichtung beim Empfang zur Erhaltung der simultanen Farbinformationen.

Die Variante „Secam" mit Frequenzmodulation stellt gegenüber das rein simultane Verfahren folgende Vorteile dar:

— Das Fehlen der gegenseitigen Einwirkung zwischen den zwei Chrominanzsignalen.

— Die Verminderung der gegenseitigen Einwirkungen zwischen den Luminanz- und Chrominanzsignale auf ein Mindestmass, weil einige veränderliche Amplituden haben, während die anderen eine konstante Amplitude und eine veränderliche Frequenz haben.

— Die Sicherung eines guten Störungsschutzes des Chrominanzsignals wegen der Übertragung mit Frequenzmodulation.

— Unempfindlichkeit im grösseren Mass gegen Verzerrungen bei den Übertragunskanälen (differentielle Verstärkung und differentielle Phase)

— Grosse Einfachhiet der Empfangskreise

— Einfachheit bei der Abstimmung des Empfängers, wobei keine anderen Abstimmungen als bei einem gewöhnlichen monochromen Empfänger rötig sind.

Vergleichsstudien zwischen dem „Secam""- und dem N.T.S.C.-Verfahren, die in Japan und Frankreich durchgeführt worden sind, haben das Resultat ergeben, dass vom Standpunkt der Bildqualität, die zwei Systeme beinahe gleichwertig sind, das N.T.S.C. - Verfahren aber etwas höher gestellt wird.

Das „Secam"-Verfahren, das experimentell ausgeführt worden ist, nützt noch immer nicht alle seine theoretischen Möglichekiten aus. Es kann nämlich, der Schutz gegen innere oder äussere Störungen verbessert werden durch die Anwendung von Akzentuierungs- oder Entzerrungsvorrichtungen. Die wichtigste Aufgabe aber, die gelöst werden soll, ist diejenige der Vergrösserung der Stabilität der Ultraschall Verzögerrungslinie.

★

Die Auswahl des angemessensten Farbfernsehverfahrens ist eine extrem komplizierte Aufgabe, wofür die Feststellung eines optimalen Kompromisses zwischen den ökonomischen und qualitativen Faktoren zu treffen ist.

Die gegenwärtige, relativ beschränkte Verbreitung des Farbfersehens ist in erster Linie auf den erhöhten Preis des Empfängers zurückzuführen. Die Farbfernsehempfänger sind teur aus zwei Gründen: Erstens, weil die Farbildröhre viel teurer ist und zweitens, weil der Empfänger eine ganze Reihe von zusätzlichen Kreisen benötigt die für die Farbsignale mit grosser Präzision auszuführen sind.

Bis jetzt sind die einzigen Farbbildröhren, die in Massen hergestellt im Laboratorium experimentiert, aber es liegen noch immer nicht genüwerden, die Röhren mit drei Elektronenstrahlen mit Maske. Es wird mit verschiedenen Typen von Bildröhren mit einem einzigen Elektronenstrahl gende Gründe vor, um behaupten zu könen, dass diese der Aufbau von Empfangsapparate vereinfachen werden.

Jedoch ist eine Überraschung auf diesem Wege nicht ausgeschlossen, dass durch Erarbeitung eines neuen Grundsatzes, wie z.B. die Anwendung eines Differenzsystems mit einem lichtpolarisierten Filter, es zur Verwirklichung eines billigen Empfängers kommt.

Jedenfalls bleibt aber die Grundaufgabe die Erhaltung des Spektrums, und diese wurde zufriedenstellend in den erwähnten Systemen gelöst. Ein jedes neu vorgeschlagenes Farbfernsehsystem, das diese Begrenzung nicht beachtet, wird ausser Rede gestellt.

Die grosse Entwicklung der Radiodienste erfordert eine strenge Ökonomie des Spektrums und diese Aufgabe wird in der Zukunft immer dringender. Die ökonomischen Kriterien, die jetzt den ersten Platz einnehmen, werden möglicherweise ihren Platz Kriterien, die möglichst grossen Wirkungsgrad anstreben und auf der Informationstheorie begründet sind, überlassen.

BIBLIOGRAFIE

Цветное телевидение (Информационный сборник) министерства связи СССР 1958.

Цветное телевидение (Информационный сборник) связьиздат Москва 1957.

Principles of color television by the hazeltine laboratoiries staff New-York, John Wiley &, sons 1956.

Le système sequentiel de television en couleurs H.D.F. Television, mai 1960, juin 1960

Kritische Betrachtungen des „Henri-de-France" Farbfernsenverfahrens und einer modifcation mit verbesserter vertikalauf-Lösung, P. Neidhardt nachrichtentechnik, Neft 7 1960

Normungsfragen des europaeischen farbfernsehens. W. Gerber vi rassegna internazionale elettronica e nucleare, Giugno 1959, Roma.

Colour television transmission systems. F. W. de Vrijer vi rassegna internazionale elettronoica e nucleare, Giugno 1959, Roma.

ОБСУЖДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ВОПРОСОВ ЦВЕТНОГО ТЕЛЕВИДЕНИЯ

(Резюме)

Излагаются требования к системе цветного телевидения, и после краткого вычисления более известных в настоящее время систем, обсуждается система телевидения с запоминающей одновременно последовательной передачи цветов.

CONSIDERATION ON SOME ESSENTIAL PROBLEMS OF THE COLOUR TELEVISION

(Contents)

Conditions to fulfil for a color TV-systems are given and after the enumeration of to day wel-known colour TV-Systems, the simultaneous-sequential TV-System, with memory, is discussed.

CONSIDERATIONS SUR QUELQUES PROBLÈMES FONDAMENTALES DE LA TÉLÉVISION EN COULEURS

(Résumé)

On éxpose les conditions à remplir par le système de télévision en couleurs et après une énnumeration des systèmes les plus connus, a prezent, pour la T. V. en couleurs, l-on discute le Système, simultane-sèquentiel á memoire.

BETRACHTUNGEN ÜBER EINIGE GRUNDAUFGABEN DES FARBFERNSEHENS

(Zusammenfassung)

Es sind die zu erfüllenden Anforderungen des Farbfernschsystems dargelegt und nach einer Aufzählung der heutzutage bekantesten. Fernsehsysteme wurde das Simultan-Zeitfolgeverfahren, mit Gedächtniss, zur Diskussion gebracht.

TIPOGRAFIA
INVAŢĂMÎNTULUI
C. 2666

INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană şi engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele şi iniţialele de pronume ale autorului, titlul şi volumul lucrării, editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

R F 1130 REFERÁLVA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIII — FASCICOLA 4

OCTOMBRIE — DECEMBRIE

1961

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов «Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées» и «Buletinul Politehnicei din Bucureşti».

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului“)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“ et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti“.

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec lamention „pentru Buletinul Institutului“)

OROSZ MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1833

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXIII — FASCICOLA 4

OCTOMBRIE — DECEMBRIE

1961

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*; Conf. *I. Berceanu*; Prof. Dr. *E. Bratu*; Prof. *Gh. Buzdugan*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*; Acad. Prof. Dr. *Tr. Negrescu*; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*; Prof. *M. Postelnicescu*; Prof. Dr. *R. Rădulet*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. Dr. *T. Tănăsescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei R.P.R

SUMAR

MATEMATICA — Pag.

I. M. MIU — Metoda pentru calculul rapid al secțiunilor culeelor oblice 13

M. N. ROȘCULEȚ — Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic (III) . . . 29

A. TĂNĂSESCU — The descriptive aspect of Lobacevski's geometry on the interpretation of Poincare's space geometry 61

I. ENACHE — Reprezentări axonometrice după epura Monge simplificată 73

MECANICA

AL. STOENESCU, D. BOIANGIU, V. CEAUȘU — Elemente de balistică pentru rachete cu rază mare de acțiune 81

CHIMIE

I. DRIMUS, V. PRIBNOW, R. AVRAM, I. FLOREA — L'oxydation photo et phonochimique de certains hydrocarbures 119

E. RUCKENSTEIN — On mass transfer in rectification of mixtures (I) 129

V. PĂRĂUȘANU, F. DANEȘ — Modelarea coloanelor de schimb ionic 141

METALURGIE

I. TRIPȘA — Studiul unui nou proces metalurgic: Afinarea fontei și oțelului cu ajutorul aburului . . . 153

CONSTRUCȚIA DE MASINI

G. BĂRĂNESCU, N. APOSTOLESCU — Determinarea stelajelor manivelelor și a unghiurilor dintre liniile de cilindrii la motoarele în V în doi timpi cu aprinderi uniform repartizate. 170

ELECTROTEHNICA

Pag.

M. PREDA — Asupra teoremelor lui Thévenin și Norton 181

ELECTRONICA

GH. RULEA — Încadrarea studiului ghidurilor uniforme în teoria generală a rețelelor cu constante concentrate 191

M. DRĂGĂNESCU — The dependance of the small signal A. C. parameters of a junction transistor on the injection level. A tehoretical approach 205

C. VASILIU — Un procedeu nou de descompunere a semnalelor 221

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр.

И. Н. МИУ — Метод быстрого исчисления сечения устоев 13

М. Н. РОШКУЛЕЦ — К изучению уравнений с гостными пройзводными параболического типа. (III) 29

А. ТАНАСЕСКУ — Начертательный аспект геометрии Лобачевского в пространственной интерпретации Поанкаре 61

И. ЕНАКЕ — Аксонометрические изображения по упрощенному эпюре Монжа 73

МЕХАНИКА

Ал. СТОЕНЕСКУ, Д. БОЯНЖИУ, В. ЧАУШУ — Ракетные баллистические элементы с большим радиусом действия 81

ХИМИЯ

Н. ДРИМУШ, В. ПРИБНОВ, Р. АВРАМ, Н. ФЛОРЯ — Фото и фонохимическое окисление некоторых углеводородов нефти 119

Е. РУКЕНШТЕЙН — К вопросу о переносе массы в случае ректификации смесей (I) 129

В. ПАРАИШАНУ, Ф. Д. ДАНЕШ — Моделирования ионообменного процесса на колоние 141

МЕТАЛЛУРГИЯ

И. ТРИПША — Исследование нового металлургического процесса рафинирование чугуна и стали с помощью пара 153

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Стр.

Г. БЭРЭНЕСКУ, Н. АПОСТОЛЕСКУ — Определение стеллажа кривошипов и углов между осями цилиндров в V-обр зных двухтактных двигателях с равномерным зажиганием 170

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

М. ПРЕДА — К вопросу о теоремах Тевенена и Нортона 181

ЭЛЕКТРОНИКА

Г. РУЛЯ — Волноводы как четырех полюсники . . 191

М. ДРАГАНЕСКУ — Зависимость параметрах транзистора (малые сигналы) от уровня инжекций теоретический анализ 205

К. ВАСИЛИУ — Другой способ разложения сигналов 221

CONTENTS

MATHEMATICS

Pag.

I. M. MIU — Methode for the rapid calculation of the infrastructure of oblique bridges 13

M. N. ROȘCULEȚ — Contributions on study of differential equations of parabolic type 29

A. TĂNĂSESCU — The descriptive aspect of Lobacevski's geometry on the interpretation of Poincare's space geometry 61

I. ENACHE — Axonometrie reprezentations according to the simplified Monge draught 73

MECHANICS

AL. STOENESCU , D. BOIANGIU, V. CEAUȘU — Elements of ballistics for rackets with a large radius of action 81

CHEMISTRY

I. DRIMUS, B. PRIBNOW, R. AVRAM, I. FLOREA — The photo — and phonochemical oxidation of certain petrol hydrocarbons 119

E. RUCKENSTEIN — On mass transfer in rectification of mixtures (I) 129

V. PĂRĂUȘANU, F. DANEȘ — The modelation of the ionexchange process, on columns 141

METALLURGY

I. TRIPȘA — Study of a new metallurgical process : steam refining of iron and steel 153

MECHANICAL ENGINNERIG

Pag.

G. BĂRĂNESCU, N. APOSTOLESCU — Determination of crankstars and cylinder lines angels for V two stroke engines, with uniformly distributed ignitions 170

ELECTRICITY

M. PREDA — On Thévenin and Norton's theoremes . . 181

GH. RULEA — The equivalence between the transmission lines and the waveguides 191

M. DRĂGĂNESCU — The dependence of the small signal A. C. parameters of a junction transistor on the injection level. A theoretical approach 205

C. VASILIU — Another method of signales decomposition 221

SOMMAIRE

MATHEMATIQUE

Page.

I. M. MIU — Methode rapide de calcul des section de l'infrastructure des points obliques 13

M. N. ROŞCULEŢ — Contributions a l'étude des équations aux dérivées partielles du type parabolique . 29

A. TĂNĂSESCU — L'aspect descriptif de la géometrie de Lobacevski sur le model de Poincaré 61

I. ENACHE — Représentations axonométrique d'aprés l'épure Monge simplifiée 73

MECANIQUE

AL. STOENESCU, D. BOIANGIU, V. CEAŞU. — Eléments de balistiques pour les fusées à grand rayon d'action 81

CHIMIE

I. DRIMUS, V. PRIBNOW, R. AVRAM, I. FLOREA — L'oxydation photo et phonochimique de certains hydrocarbures du pétrole. 119

E. RUCKENSTEIN — Sur le transfert de masse dans le caz de la rectification des mélanges (I) . . . 129

V. PĂRĂUŞANU, F. DANEŞ — Modélation des colonnes pour le procéssus d'échange ionique 141

METALLURGIE

I. TRIPŞA — Étude d'un nouveau procédé métallurgique ; l'affinage de la fonte et de l'acier par la vapeur . 153

CONSTRUCTION MECANIQUE

Page.

G. BĂRĂNESCU, N. APOSTOLESCU — Détermination des stelages des manivelles et des angles entre les lignes des cilindres chez les moteurs en V, en deux temps avec des allumages uniformément repartis . 170

ELECTROTECHNIQUE

M. PREDA — Sur les théorèmes de Thévenin et de Norton 181

GH. RULEA — L'équivalence entre les lignes de transmission et les guides d'ondes 191

M. DRĂGĂNESCU — La dependance des parametres (pour petits signaux) du transistor a jonctions en fonction du nivel d'injection. Analyse theoretique . 205

C. VASILIU — Un autre procédé de décomposition des signaux 221

INHALT

MATHEMATIK

Seid.

I. M. MIU — Methode für rasche Berechnung der Querschnitte der Infrastruktur von schiefen Brückner . 13

M. N. ROȘCULEȚ — Beiträge zum Studium der diferențial Gleichungen parabolischer art. (III) . . . 29

A. TĂNĂSESCU — Der Darstellende charakter der Lobatschefskyschen Geometrie in der Deutung des Raumes Poincaré 61

I. ENACHE — Axonometrische Darstellung der vereinfachen Epure von Monge 73

MECHANIK

AL. STOENESCU, D. BOIANGIU, V. CEAȘU — Elemente der Balistik für Raketen mit grossen Wirkungsbereich 81

CHEMIE

I. DRIMUS, V. PRIBNOK, R. AVRAM, I. FLOREA — Oxidierung gewisser erdölkohlenwassterstoffe unter der Einwirklung von UV Strahlungen und Ultraschalwellen 119

E. RUKENSTEIN — Uber den Stoffaustausch bei der Rektifizierung von Gemischen (I) 129

V. PĂRĂUȘANU, F. DANEȘ — Das Modellieren des Ionenaustausch Prozesses au Kolomnen 141

METALURGIE

I. TRIPȘA — Studium über ein neues Verfahren in Eisen — hüttenkunde: Wasserdanpffrische von Eisen und Stahl 153

MASCHINENBAU

Seid.

G. BĂRĂNESCU, N. APOSTOLESCU — Bestimmung des Kurbelsterns und der Winkel zwischen den Zylinderreihen bei zweitakt V — Motoren mit gleicher zündfolge 170

ELEKTROTECHNIK

M. PREDA — Die Verallgemeinerung der Theoremen (Lehrsätze) von Thévenin und Norton . . . 181

ELEKTRONIK

GH. RULEA — Der Gleichstellung zwischen den Transmisions linien und Wellenleiter 191

M. DRĂGĂNESCU — Abhängigkeit der Wechselstrom — Kleinsignal — Parameter eines Transistors vom Injektionsniveau. Theoretische Untersuchung . . . 205

G. VASILIU — Ein anders Verfahren zur Signalzerlegung 221

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

METODĂ PENTRU CALCULUL RAPID AL SECȚIUNILOR CULEELOR OBLICE

ION M. MIU

Metodele ce le vom indica, contribuie în mod considerabil la scurtarea timpului de calcul al secțiunilor culeelor podurilor în general și al culeelor podurilor oblice în special, precum și al secțiunilor diverselor ziduri de sprijin, etc.

Secțiunile de care ne vom ocupa în special, vor fi cele în formă de paralelogram și trapezoidale, întîlnite frecvent la calculul podurilor.

A. Un caz de transformare a secțiunilor.

Considerăm o secțiune Ω oarecare (fig. 1) solicitată în E de o forță N normală pe ea.

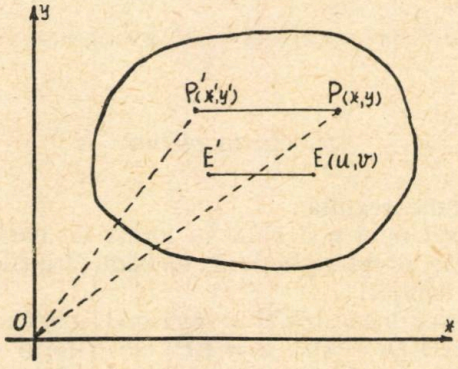


Fig. 1

Se știe [1] — pag. 81 — că dacă o secțiune Ω se transformă în altă secțiune Ω', astfel încît un punct $P(x, y)$ din secțiunea Ω se transformă în alt punct $P'(x', y')$ din secțiunea Ω' prin formulele de transformare :

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 \\ y = \alpha_2 x' + \beta_2 z' + \gamma_2 \end{cases} \tag{1}$$

atunci între eforturile unitare σ și σ' din două puncte omoloage ale secțiunii Ω și Ω' există relația:

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \tag{2}$$

Să presupunem că toate punctele secțiunii Ω' se transformă astfel:
— ordonatele rămîn aceleași
— abscisele se micșorează sau se măresc cu o cantitate proporțională cu ordonata.

Formulele de transformare sînt:

$$\begin{cases} x' = x + k y \\ y' = y \end{cases} \tag{3}$$ sau $$\begin{cases} x = x' - k y' \\ y = y \end{cases} \tag{3'}$$

Pentru transformarea aceasta formula 2) devine

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\begin{vmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

sau

$$\sigma = \sigma' \tag{4}$$

Concluzie. În transformarea studiată, eforturile unitare în secțiunea dată și cea obținută rămîn neschimbate.

Acest lucru se putea deduce și din faptul că în această transformare ariile secțiunilor rămîn aceleași și din relația ([1], pag. 81):

$$\sigma = \frac{A'}{A}\sigma', \quad \text{cum } A = A' \text{ avem } \sigma = \sigma'$$

Aplicații la poduri

Din cele precedente rezultă:

1. Secțiunea culeei unui pod oblic în formă de paralelogram se poate calcula ca o secțiune dreptunghiulară folosind transformarea 3'), care duce la calcule mai simple.

În fig. 2 avem secțiunea $ABCD$ a unei culei oblice în formă de paralelogram solicitată în $E(u = ME,\ v = EP)$ de o forță N. Pentru calculul acestei secțiuni aplicăm teoria de mai sus luînd originea axelor în G.

Secțiunea $ABCD$ o transformăm în secțiunea dreptunghiulară $A'B'C'D'$ cu baza $A'B' = AB = a$ egală cu baza paralelogramului.

Secțiunea dreptunghiulară este solicitată în $E'(M'E' = u,\ E'P' = v)$ de aceeași forță normală N.

Rezultă că eforturile unitare în punctele omoloage ale secțiunii $ABCD$ și secțiunii $A'B'C'D'$ sînt egale.

Deci eforturile unitare în punctele A, B, C, D ale secțiunii paralelogramice, sînt respectiv egale cu eforturile unitare în punctele A', B', C', D' ale secțiunii dreptunghiulare.

Notînd cu a, b și θ laturile și unghiul ascuțit al paralelogramului atunci dreptunghiul $A'B'C'D'$ are laturile a, $h = b \sin \theta$.

2. Secțiunea culeei unui pod oblic este în forma de trapez. Acest caz intervine frecvent la culeele podurilor oblice pe linii duble cînd secțiunile în formă de paralelogram au rosturi de dilatație, sau în diverse zidării.

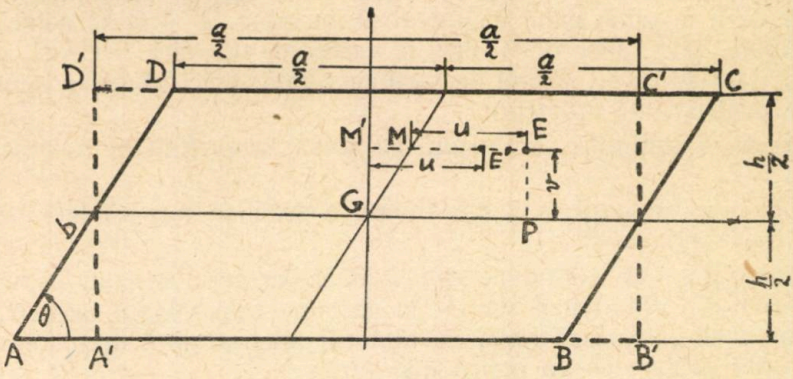


Fig. 2

În fig. 3 avem o secțiune trapezoidală $ABCD$, solicitată în punctul $E(u = ME,\ v = EP)$ de o forță N normală pe secțiune.

În mod analog ca la secțiunea în formă de paralelogram, luăm originea axelor în centrul de greutate G al trapezului. Transformăm secțiu-

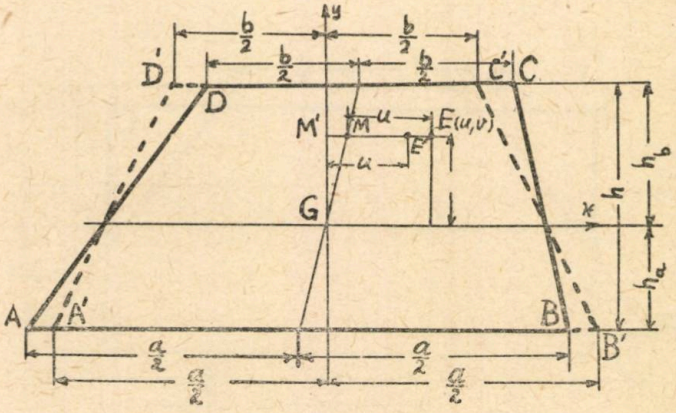


Fig. 3

nea trapezoidală $A\,BC\,D$ într-o altă secțiune trapezoidală isoscelă $A'B'C'D'$ cu aceleași baze $AB = A'B' = a$, $CD = C'D' = b$ și cu înălțimea h egală cu a secțiunii date, avînd axa y ca axă de simetrie.

Secțiunea trapezoidală isoscelă $A'B'C'D'$ este solicitată în $E'(M'E' = u,\ E'P' = v)$ de aceeași forță normală N. Eforturile unitare în punctele omoloage ale celor două secțiuni fiind egale, rezultă că eforturile unitare în punctele A, B, C, D ale secțiunii $ABCD$ sînt respectiv egale cu eforturile unitare în punctele A', B', C', D' ale secțiunii $A'B'C'D'$.

B. Echivalența secțiunii trapezoidale și triunghiulare, cu o secțiune dreptunghiulară.

Am arătat în [1] că orice secțiune se poate aduce la o altă secțiune ca formă (adică la o secțiune asemenea cu o secțiune arbitrară). Noua secțiune va fi așezată astfel încît centrul de greutate al ei să coincidă cu al secțiunii date, apoi două drepte oarecare să aibă aceleași puncte reciproce față de ea cît și față de secțiunea dată. (căci atunci proprietatea subsistă pentru toate dreptele).

Cele două secțiuni ce se bucură de aceste proprietăți se numesc echivalente.

În cele ce urmează vom transforma o secțiune trapezoidală isoscelă în alta dreptunghiulară.

În caz că se dă o secțiune trapezoidală oarecare, se transformă ușor — așa cum s-a arătat mai sus — în secțiune trapezoidală isoscelă, care la rîndul ei se calculează rapid cu ajutorul unei secțiuni dreptunghiulare după modul în care se va indica mai jos.

Problema prezintă importanță deosebită mai ales din punct de vedere practic, deoarece calculul acestor secțiuni intervin des la zădiriile culeelor, la zidurile de sprijin și chiar la calculul secțiunilor dreptunghiulare de beton armat, datorită poziției axei neutre în cazul secțiunii active.

Fie secțiunea trapezoidală isoscelă $ABCD$ și $A'B'C'D'$ secțiunea dreptunghiulară căutată (fig. 4).

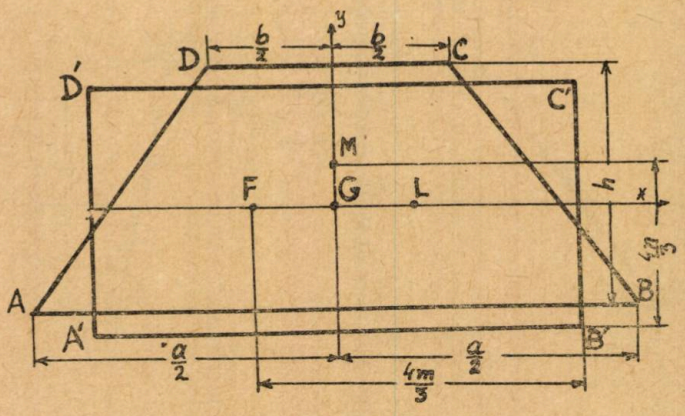


Fig. 4

Centrele de greutate și axele principale de inerție ale celor două secțiuni trebuie să coincidă.

Centrul de greutate al dreptunghiului îl luăm chiar în centrul de greutate al trapezului și axele de coordonate cu originea în G ca în fig. 4.

Mai trebuie să punem condițiile ca să aibă comune două drepte $\triangle$, $\triangle'$ respectiv cu punctele lor reciproce.

Considerînd o dreaptă $\triangle$ ca axă neutră, distanța la ea a punctului de aplicație al forței este:

$$\delta_{\triangle} = \frac{I_{\triangle}}{S_{\triangle}} \tag{5}$$

unde $I_{\triangle}$ și $S_{\triangle}$ sînt respectiv momentul de inerție și momentul static ale secțiunii în raport cu $\triangle$.

a) Pentru a afla latura $A'B' = 2m$ a dreptunghiului, luăm pe $\triangle$ să coincidă cu latura $B'C'$ a dreptunghiului și scriem că punctul reciproc al dreptei $\triangle$ (punctul de aplicație al forței cînd axa neutră este $\triangle$) în raport cu trapezul $ABCD$ este același cu punctul reciproc al dreptei $\triangle$ în raport cu dreptunghiul $A'B'C'D'$, adică este punctul F situat la treimea mijlocie.

Notînd cu $I_{\triangle}$ și $S_{\triangle}$ momentul de inerție și static al trapezului în raport cu $\triangle$ avem după formula 5)

$$\frac{I_{\triangle}}{S_{\triangle}} = \frac{4m}{3} \tag{5'}$$

Calculînd pe $I_{\triangle}$ și $S_{\triangle}$ se obține:

$$I_{\triangle} = \frac{h}{48}(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) + \frac{a+b}{2} h m^2$$

$$S_{\triangle} = \frac{a+b}{2} h m$$

Înlocuind aceste valori în 5) se găsește

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Latura dreptunghiului este:

$$A'B' = a_1 = 2m = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Punem:

$$\alpha = \frac{b}{a}, \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2}} \tag{6}$$

și obținem:

$$a_1 = \nu_1 a \tag{7}$$

b) Luăm acum latura $A'B'$ ca dreaptă $\triangle'$ și punem condiția ca punctul M reciprocul dreptei $\triangle'$ în raport cu dreptunghiul să fie și reciprocul aceleiași drepte în raport cu trapezul.

Notînd cu $I_{\triangle'}$ și $S_{\triangle'}$ momentul de inerție și static al trapezului în raport cu $\triangle'$ și cu $B'C' = 2n$ înălțimea dreptunghiului (fig. 4), avem:

$$I_{\triangle'} = \frac{h^3}{36}\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b} + \frac{a+b}{2} h n^2$$

$$S_{\triangle'} = \frac{a+b}{2} h n$$

Înlocuind în relația : (dedusă din 5)

$$\frac{I_{\Delta'}}{S_{\Delta'}} = \frac{4}{3} n$$

obținem :

$$n = h \sqrt{\frac{a^2 + 4ab + b^2}{6(a+b)^2}}$$

Înălțimea dreptunghiului este :

$$B'C' = h_1 = 2n = h \sqrt{\frac{2}{3} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}}$$

Punem :

$$\nu_2 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1 + 4\alpha + \alpha^2}{(1+\alpha)^2}} \tag{8}$$

și obținem :

$$h_1 = \nu_2 h \tag{9}$$

C) Notăm cu σ și σ_2 respectiv eforturile unitare în două puncte omoloage, primul din secțiunea trapezoidală și celălalt din secțiunea dreptunghiulară, cu A și A_1 respectiv ariile secțiunii trapezoidale și dreptunghiulare și avem :

$$\sigma = \frac{Ns}{S_\delta}, \quad \sigma_1 = \frac{Ns_1}{S_{1\delta}} \tag{10}$$

unde S_δ și $S_{1\delta}$ sînt momentele statice ale trapezului și dreptunghiului în raport cu axa neutră δ, iar s și s_1 sînt distanțele de la punctele omoloage considerate la axa neutră δ.

Cum $S_\delta = kA$, $S_{1\delta} = kA_1$, din 10) obținem :

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{A_1 s}{A s_1} \tag{11}$$

Ecuația axei neutre referitoare la punctul de aplicație $E(u, v)$ — scrisă cu elementele dreptunghiului — este :

$$\frac{ux}{I_y} + \frac{vy}{I_x} + \frac{1}{A_1} = 0$$

Fie $M(x, y)$ și $M_1(x_1, y_1)$ cele două puncte omoloage respectiv din trapez și dreptunghi.

Distanțele de la aceste puncte la axa neutră δ sînt:

$$s = \frac{\frac{ux}{I_x} + \frac{vy}{I_x} = \frac{1}{A_1}}{\sqrt{\frac{u^2}{I_y^2} + \frac{v^2}{I_x^2}}}, \quad s_1 = \frac{\frac{ux_1}{I_y} + \frac{vy_1}{I_x} + \frac{1}{A}}{\sqrt{\frac{u^2}{I_y^2} + \frac{v^2}{I_x^2}}}$$

Efortul unitar σ_1 este dat de:

$$\sigma_1 = N\left(\frac{ux_1}{I_y} + \frac{vy_1}{I_x} + \frac{1}{A_1}\right)$$

Ținînd cont de expresiile lui s, s_1, σ_1 în 11) și notînd $k = \frac{A_1}{A}$, rezultă;

$$\sigma = KN\left(\frac{ux}{I_y} + \frac{vy}{I_x} + \frac{1}{A_1}\right) \qquad (12)$$

Rezultă de aici concluzia importantă:

Eforturile unitare în punctele secțiunii trapezoidale sînt egale cu eforturile unitare din aceleași puncte considerate ca aparținînd dreptunghiului, înmulțite cu factorul $k = \frac{A_1}{A}$

Vom scrie formula 12) sub altă formă.

Avem

$$I_y = \frac{1}{12} a_1^3 h_1 = A_1 a^2 \frac{\nu_1^2}{12} = A_1 a^2 \varrho_1$$

$$I_x = \frac{1}{12} a_1 h_1^3 = A_1 h^2 \frac{\nu_2^2}{12} = A_1 h^2 \varrho_2$$

$$A_1 = a_1 h_1$$

unde s-a pus:

$$\alpha = \frac{b}{a}, \quad \varrho_1 = \frac{\nu_1^2}{12} = \frac{1+\alpha^2}{24}, \quad \varrho_2 = \frac{\nu_2^2}{12} = \frac{1+4\alpha+\alpha^2}{18(1+\alpha)^2} \qquad (13)$$

Ținînd cont de valorile lui K, I_y, I_x, expresia 12) devine:

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(\frac{u\,x}{a^2\,\varrho_1} + \frac{v\,y}{h^2\,\varrho_2} + 1\right) \tag{14}$$

Această formulă dă efortul unitar σ într-un punct $M(x, y)$ al secțiunii trapezoidale cînd această secțiune este solicitată în punctul $E(u, v)$ de o forță N normală pe ea.

Dacă punem:

$$\frac{u}{a} = u', \quad \frac{v}{h} = v', \quad \frac{x}{a} = x', \quad \frac{y}{a} = y' \tag{15}$$

formula 14) devine:

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(\frac{u'\,x'}{\varrho_1} + \frac{v'\,y'}{\varrho_2} + 1\right) \tag{14'}$$

Eforturile unitare în secțiunile trapezoidale se calculează ușor cu una din formulele 14) sau 14').

În cazul cel mai frecvent, cînd se pune problema să aflăm eforturile unitare în vîrfurile trapezului putem folosi formula 14'), elementele (x', y') pentru cele patru vîrfuri fiind trecute pe fig. 5.

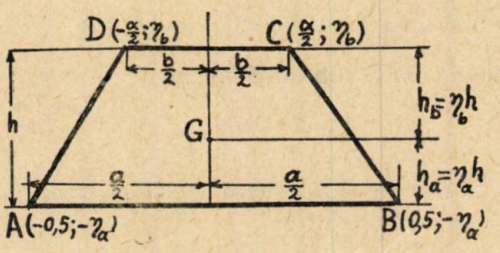


Fig. 5

Dăm un tablou în care s-au calculat în funcție de α, valorile η_a, η_b, ϱ_1, ϱ_2. Valorile η_a, η_b dau pe: $h_a = \eta_a\,h$; $h_b = \eta_b\,h$, unde h_a și h_b sînt distanțele de la centrul de greutate G al trapezului respectiv la bazele a și b:

$$\eta_a = \frac{1+2\alpha}{3\,(1+\alpha)}, \qquad \eta_b = 1 - \eta_a.$$

TABELA PENTRU CALCULUL ELEMENTELOR LA TRAPEZ ȘI TRIUNGHI

$\alpha = \frac{b}{a}$	$h_a = \frac{\eta_a h}{\eta_a}$	$h_b = \frac{\eta_b h}{\eta_b}$	$\rho_1 = \frac{1+\alpha^2}{24}$	$\rho_2 = \frac{1+4\alpha+\alpha^2}{18(1+\alpha)^2}$
0,00	0,3333	0,6667	0,04167	0,05555
0,01	0,3366	0,6634	0,04167	0,05665
0,02	0,3399	0,6601	0,04168	0,05769
0,03	0,3430	0,6570	0,04170	0,05870
0,04	0,3461	0,6539	0,04173	0,05966
0,05	0,3492	0,6508	0,04177	0,06059
0,06	0,3522	0,6478	0,04182	0,06149
0,07	0,3551	0,6449	0,04187	0,06235
0,08	0,3580	0,6420	0,04193	0,06318
0,09	0,3608	0,6392	0,04200	0,06397
0,10	0,3636	0,6364	0,04208	0,06474
0,11	0,3664	0,6336	0,04217	0,06547
0,12	0,3690	0,6310	0,04227	0,06618
0,13	0,3717	0,6283	0,04237	0,06687
0,14	0,3743	0,6257	0,04248	0,06752
0,15	0,3768	0,6232	0,04260	0,06816
0,16	0,3793	0,6207	0,04273	0,06877
0,17	0,3818	0,6182	0,04287	0,06935
0,18	0,3842	0,6158	0,04302	0,06992
0,19	0,3865	0,6135	0,04317	0,07046
0,20	0,3889	0,6111	0,04333	0,07099
0,21	0,3912	0,6088	0,04350	0,07149
0,22	0,3934	0,6065	0,04368	0,07198
0,23	0,3957	0,6043	0,04387	0,07245
0,24	0,3978	0,6022	0,04407	0,07290
0,25	0,4000	0,6000	0,04427	0,07333
0,26	0,4021	0,5979	0,04448	0,07375
0,27	0,4042	0,5958	0,04470	0,07415
0,28	0,4062	0,5938	0,04493	0,07454
0,29	0,4083	0,5917	0,04517	0,07492
0,30	0,4102	0,5898	0,04542	0,07528
0,31	0,4122	0,5878	0,04567	0,07563
0,32	0,4141	0,5859	0,04593	0,07596
0,33	0,4160	0,5840	0,04620	0,07628
0,34	0,4179	0,5821	0,04648	0,07659
0,35	0,4197	0,5803	0,04677	0,07689
0,36	0,4216	0,5784	0,04707	0,07718
0,37	0,4233	0,5767	0,04737	0,07746
0,38	0,4251	0,5749	0,04768	0,07773
0,39	0,4268	0,5732	0,04800	0,07798
0,40	0,4286	0,5714	0,04833	0,07823
0,41	0,4303	0,5697	0,04867	0,07847
0,42	0,4319	0,5681	0,04902	0,07870
0,43	0,4336	0,5664	0,04937	0,07892
0,44	0,4352	0,5648	0,04973	0,07913
0,45	0,4368	0,5632	0,05010	0,07934
0,46	0,4383	0,5617	0,05048	0,07953
0,47	0,4599	0,5601	0,05087	0,07972
0,48	0,4414	0,5586	0,05127	0,07990
0,49	0,4429	0,5571	0,05167	0,08008
0,50	0,4444	0,5556	0,05208	0,08025

$\alpha = \frac{b}{a}$	$\frac{h_a + \eta_a h}{\eta_a}$	$\frac{h_b = \eta_b h}{\eta_b}$	$\rho_1 = \frac{1+\alpha^2}{24}$	$\rho_2 = \frac{1+4\alpha+\alpha^2}{18(1+\alpha)^2}$
0,51	0,4450	0,5550	0,05250	0,08041
0,52	0,4474	0,5526	0,05293	0,08056
0,53	0,4488	0,5512	0,05337	0,08071
0,54	0,4502	0,5498	0,05382	0,08085
0,55	0,4516	0,5484	0,05427	0,08099
0,56	0,4530	0,5470	0,05473	0,08112
0,57	0,4543	0,5457	0,05520	0,08125
0,58	0,4557	0,5443	0,05568	0,08137
0,59	0,4570	0,5430	0,05617	0,08149
0,60	0,4583	0,5417	0,05667	0,08160
0,61	0,4596	0,5404	0,05717	0,08170
0,62	0,4609	0,5391	0,05768	0,08180
0,63	0,4622	0,5378	0,05820	0,08190
0,64	0,4634	0,5366	0,05873	0,08199
0,65	0,4646	0,5354	0,05927	0,08208
0,66	0,4658	0,5343	0,05982	0,08217
0,67	0,4671	0,5329	0,06037	0,08225
0,68	0,4682	0,5318	0,06093	0,08232
0,69	0,4694	0,5306	0,06150	0,08240
0,70	0,4706	0,5294	0,06208	0,08247
0,71	0,4717	0,5283	0,06267	0,08253
0,72	0,4729	0,5271	0,06327	0,08260
0,73	0,4740	0,5260	0,06387	0,08266
0,74	0,4751	0,5249	0,06449	0,08271
0,75	0,4762	0,5238	0,06510	0,08277
0,76	0,4773	0,5227	0,06573	0,08282
0,77	0,4783	0,5217	0,06637	0,08286
0,78	0,4792	0,5208	0,06702	0,08291
0,79	0,4804	0,5196	0,06767	0,08295
0,80	0,4815	0,5185	0,06833	0,08299
0,81	0,4825	0,5175	0,06900	0,08303
0,82	0,4835	0,5165	0,06968	0,08306
0,83	0,4845	0,5155	0,07037	0,08309
0,84	0,4855	0,5145	0,07107	0,08312
0,85	0,4865	0,5135	0,07177	0,08315
0,86	0,4874	0,5126	0,07248	0,08317
0,87	0,4884	0,5116	0,07320	0,08320
0,88	0,4894	0,5106	0,07393	0,08322
0,89	0,4903	0,5097	0,07467	0,08324
0,90	0,4912	0,5088	0,07542	0,08326
0,91	0,4921	0,5079	0,07617	0,08327
0,92	0,4930	0,5070	0,07693	0,08328
0,93	0,4939	0,5061	0,07770	0,08330
0,94	0,4948	0,5052	0,07848	0,08331
0,95	0,4957	0,5043	0,07927	0,08331
0,96	0,4966	0,5034	0,08007	0,08332
0,97	0,4975	0,5025	0,08087	0,08333
0,98	0,4983	0,5017	0,08168	0,08333
0,99	0,4992	0,5008	0,08250	0,08333
1,00	0,5000	0,5000	0,08333	0,08333

Ecuația axei neutre se obține din 14) și este:

$$\frac{u\,x}{a^2\,\varrho_1}+\frac{v\,y}{h^2\,\varrho_2}+1=0 \qquad (16)$$

Observații:

— Secțiunile triunghiulare sînt un caz particular al celor trapezoidale cînd $b=0$, adică $\alpha=0$.

— O secțiune poligonală oarecare, se poate calcula descompunînd-o în trapeze și triunghiuri, apoi utilizînd tabelele indicate se găsesc pentru două drepte oarecare punctele lor reciproce, după care se aplică metodele indicate în [1].

Dacă secțiunea este supusă numai la un moment încovoietor, atunci se aplică o forță N în centrul de greutate, normală pe secțiune și se aplică metoda indicată aici, urmînd a scădea din eforturile unitare căpătate pe $\frac{N}{A}$

C. **Aplicații.**

1) Secțiunea culeei unui pod oblic are forma de paralelogram cu dimensiunile din figură (fig. 6) și este solicitată în punctul E de o forță $N=640$ tone.

Se cer:

a) Eforturile unitare în cele patru vîrfuri ale secțiunii,

b) Efortul unitar maxim în cazul cînd se consideră secțiunea activă.

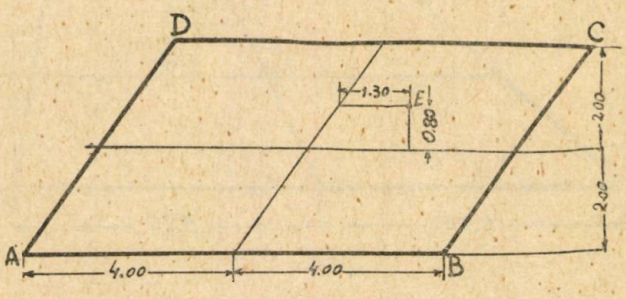


Fig. 6

Rezolvare: Problema revine a calcula secțiunea dreptunghiulară cu dimensiunile $a_1=a=8$ m, $h=b_1=4$ m, solicitată de forța $N=640$ tone aplicată în punctul $E(u=1{,}30$ m, $v=0{,}80$ m).

Avem :

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 \pm \frac{6u}{a} \pm \frac{6v}{b_1}\right)$$

$$\sigma = \frac{640\,000}{320\,000}\left(1 \pm \frac{6.130}{800} \pm \frac{6.80}{400}\right)$$

$$\sigma = 2\,(1 \pm 0{,}974 \pm 1{,}200)$$

$\sigma_A = 2(1-0{,}974-1{,}2) = -2{,}34$ kg/cm², $\sigma_B = 2(1+0{,}974-1{,}2) = 1{,}55$ kg/cm²

$\sigma_C = 2(1+0{,}974+1{,}2) = 6{,}35$ „ , $\sigma_D = 2(1-0{,}974+1{,}2) = 2{,}46$ „

Pentru a calcula efortul unitar maxim în cazul că se consideră secțiunea activă ne folosim de tabelele de secțiune activă pentru dreptunghi (manualul pentru beton armat, editura tehnică, 1949, pag. 103).

Avem :

$$\frac{u}{a} = \frac{130}{800} = 0{,}162, \quad \frac{v}{b_1} = \frac{80}{400} = 0{,}200, \quad \mu = 3{,}70.$$

Efortul unitar de compresiune maxim are loc în vîrful C al secțiunii și este :

$$\sigma_{max} = \mu \frac{N}{A} = 3{,}70 \frac{640\,000}{320\,000} = 7{,}40 \text{ kg/cm}^2$$

2. Secțiunea unei zidării are forma de trapez cu dimensiunile din figură (fig. 7) și este solicitată în punctul E de o forță de compresiune $N = 600$ tone.

Se cer eforturile unitare în vîrfurile secțiunii.

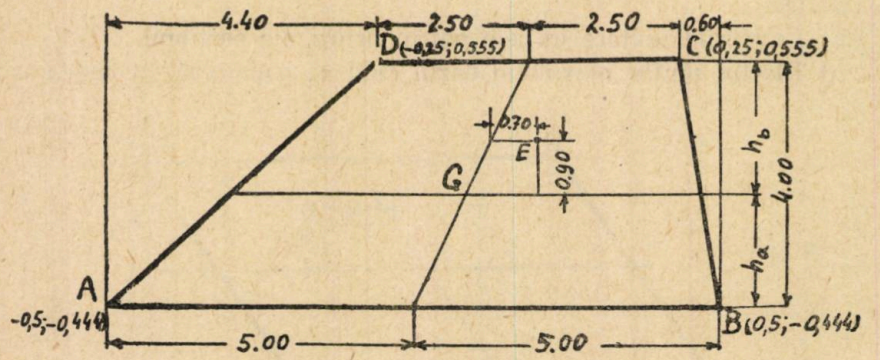


Fig. 7

Rezolvare : Secțiunea se calculează ca una dreptunghiulară cu ajutorul tabelei date mai sus.

Intrăm în tabelă cu $\alpha = \frac{b}{a} = \frac{5}{10} = 0{,}50$ căreia îi corespunde $\rho_1 = 0{,}052$, $\rho_2 = 01080$.

Cu aceeași tabelă calculăm elementele x', y' ale vîrfurilor secțiunii date în figura 5. Avem:

$A(-0{,}5; -0{,}444)$; $B(0{,}5; -0{,}444)$; $C(0{,}25; 0{,}555)$, $D(-0{,}25; 0{,}555)$

Aplicăm formula 14')

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(\frac{u'x'}{\varrho_1} + \frac{v'y'}{\varrho_2} + 1\right)$$

$$\sigma_A = \frac{600\,000}{300\,000}\left(-\frac{0{,}07 \cdot 0{,}50}{0{,}052} - \frac{0{,}0225 \cdot 0{,}444}{0{,}080} + 1\right) = -1{,}84 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = 2\left(\frac{0{,}07 \cdot 0{,}50}{0{,}052} - \frac{0{,}225 \cdot 0{,}444}{0{,}080} + 1\right) = 0{,}84 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_C = 2\left(\frac{0{,}07 \cdot 0{,}25}{0{,}052} + \frac{0{,}225 \cdot 0{,}555}{0{,}080} + 1\right) = 5{,}82 \text{ kg cm}^2$$

$$\sigma_D = 2\left(-\frac{0{,}07 \cdot 0{,}25}{0{,}052} + \frac{0{,}225 \cdot 0{,}555}{0{,}080} + 1\right) = 4{,}46 \text{ kg/cm}^2$$

Observație:

— În cazul cînd se cere efortul unitar maxim de compresiune cînd lucrează secțiunea activă se va aplica metoda dată de autor în [1].

3) Secțiunea unei zidării are formă triunghiulară cu dimensiunile din figură (fig. 8) și este solicitată în punctul E de o forță de compresiune $N = 315$ tone.

Se cer eforturile unitare în vîrfurile secțiunii.

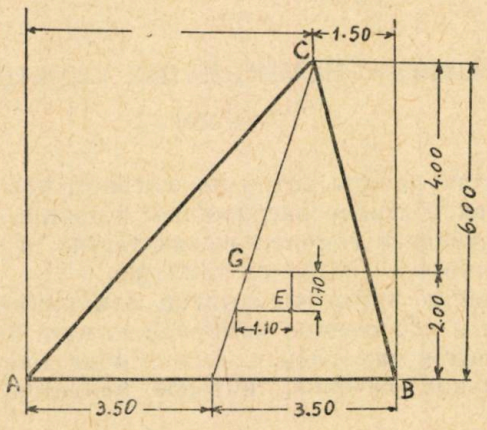


Fig. 8

Rezolvare: Secțiunea se calculează ca un dreptunghi cu ajutorul tabelei date mai sus.

Pentru $\alpha = \frac{b}{a} = 0$ găsim $\varrho_1 = 0{,}0417$, $\varrho_2 = 0{,}0555$.

Din tabelă calculăm și elementele x', y' ale vîrfurilor secțiunii date în figura 5 (cazul $b = 0$).

Avem : $A(-0{,}5\,;\ -0{,}333)$, $B(0{,}5\,;\ -0{,}333)$, $C(0\,;\ 0{,}666)$.

Mai calculăm : $u' = \frac{u}{a} = \frac{1{,}10}{7{,}00} = 1{,}57$; $v' = \frac{v}{h} = -\frac{0{,}70}{6{,}00} = -0{,}117$

Aplicăm formula 14′) și avem

$$\sigma_A = \frac{315\,000}{210\,000}\left(-\frac{0{,}157 \cdot 0{,}50}{0{,}0417} + \frac{0{,}117 \cdot 0{,}333}{0{,}0555} + 1\right) = -0{,}29 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = 1{,}5\left(\frac{0{,}157 \cdot 0{,}50}{0{,}0417} + \frac{0{,}117 \cdot 0{,}333}{0{,}0555} + 1\right) = 5{,}40 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_C = 1{,}5\left(-\frac{0{,}117 \cdot 0{,}666}{0{,}0555} + 1\right) = -0{,}70 \text{ kg/cm}^2$$

BIBLIOGRAFIE

[1] *Ion Miu :* „Metode noi pentru calculul secțiunilor solicitate excentric. Editura tehnică 1956.

[2] *M. M. Filonenco-Borodici :* „Curs de rezistența materialelor". Traducere din limba rusă, Editura tehnică, 1952.

МЕТОД БЫСТРОГО ИСНИСЛЕНИЯ СЕЧЕНИЙ УСТОЕВ

(Резюме)

В первой части работы автор показывает, как превращается некоторое сечение, экспентричо нагруженное в другое сечение, так чтобы унитарные напряжения в гомологических тастях двух сечений — данного и превращенного — остались теми же.

Во второй части автор показывает, как применяются выше показанные методы к исчислению каменной кладки косых мостов.

В месте сечения каменной кладки в виде параллелограмма, берется прямоугольное сеченне, которое является преобразованием первого.

Для трапезоидального сечения, часто встречаемого у косых мостов, производят во первых превращение в равнобедренное трапезоидальное сечение и потом приравнивают к прямоугольнику / которые имеет те же центры тяжелости, ту же симетричную ось / те же главные оси / — и те же главные моменты инерции /.

С этой целью приложены таблицы, с помощью которых немедленно исчисляются напряжения.

METHOD FOR THE RAPID CALCULATION OF THE INFRASTRUCTURE OF OBLIQUE BRIDGES

(Summary)

In the first part of the paper a section under an excentric load is transformed into another section, so that the unit stresses on then homologous points of the two sections remain the same.

The second part deals with the way in which the above mentioned method is applied to computing the oblique infrastructure of bridges, and to this end tables have been worked out.

MÉTHODE RAPIDE DE CALCUL DES SECTIONS DE L'INFRASTRUCTURE DES PONTS OBLIQUES

(Résumé)

Dans la première partie de l'ouvrage on transforme un section quelconque sollicitée excentriquement en une autre section, de telle manière que les efforts unitaires dans les points homologues de ces deux sections restent les mêmes.

Dans la deuxième partie, l'auteur montre comment s'applique la théorie exposée ci-dessus au calcul de l'infrastructure des ponts obliques. Dans ce but on a fait des tableaux numériques.

METHODE FÜR RASCHE BERECHNUNG DER QUERSCHNITTE DER INFRASTRUKTUR VON SCHIEFEN BRÜCKNER

(Zusammenfassung)

Im ersten Teil der Abhandlung zeigt der Verfasser, wie man einen beliebigen, exzentrisch belasteten Querschnitt in einen anderen Querschnitt umwandelt, so dab die Einheisbelastungen in den homologen Punkten beider Querschnitte — des gegebenen und des transformierten — dieselben bleiben.

Im zweiten Teil zeigt der Autor, wie man die oben erwähnte Methode zur Berechnung der Unterbauten bei schiefen Brücken anwendet.

Man nimmt anstatt eines eines parallelogrammförmigen Querschnittes einen rechteckförmigen Querschnitt, der die transformierte Figur des ersteren darstellt.

Für einen trapezoidalen Querschnitt, der bei schiefen Brücken sehr oft vorkommt, vollführt man zuerst eine Umwadlung in einen gleichschenkligen trapezoidalen Querschnitt, den man mit einem Rechteck gleichstellt (mit demselben Schwerpunkt, denselben Hauptachsen, denselben Hauptträgheitsmomenten). Zu diesem Zweck wurden Tabellen aufgestellt, mit deren Hilfe man die Belasungen direkt berechnen kann.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

CONTRIBUȚII LA STUDIUL ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP PARABOLIC. (III)

PROBLEMA LUI CAUCHY PENTRU O CLASĂ DE ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

MARCEL N. ROȘCULEȚ

Introducere. Obiectul acestei lucrări este rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_p^{2m}} - Y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} - Y_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} - \cdots - Y_q \frac{\partial u}{\partial y_q} = 0 \quad (\alpha)$$

cu

$$Y_k = Y_k (y_1, y_2, \cdots y_q)$$

și

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial Y_q}{\partial y_q} = 0$$

Pentru a se atinge acest scop a trebuit mai întîi să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuația

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^{2m}} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\beta)$$

A fost necesar să se studieze separat pentru ecuația (β) cazul cînd m este impar sau par. Rezultatele obținute se pot extinde pentru o ecuație (β) unde în partea întîi avem un operator linear, cu coeficienți, constanți, neomogen, însă supus la anumite restricții care sînt cerute de convergenta uniformă a unui anumit operator integral ce intervine în soluția problemei.

Cap. I. **Soluția fundamentală pentru ecuația**

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

1° *Soluţii care conţin funcţii arbitrare.* Vom face calculele pentru ecuaţia

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

urmînd ca rezultatele finale, necesare rezolvării problemei lui Cauchy să le transcriem şi pentru cazul cînd numărul variabilelor x este oarecare.

Să căutăm pentru ecuaţia (1) o soluţie de forma următoare

$$u(x,t) = \varphi_0(t) + \frac{x}{1!}\varphi_1(t) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\varphi_n(t) + \cdots \tag{2}$$

cu $\varphi_k(t)$ funcţii arbitrare, derivabile de t pentru $t \in (t_0, t_1)$. Procedăm deocamdată formal. Înlocuind în (1) pe (2) trebuie să avem

$$\varphi_{2m}(t) + \frac{x}{1!}\varphi_{2m+1}(t) + \cdots + \frac{x^k}{1!}\varphi_{2m+k}(t) + \cdots =$$

$$\varphi_0'(t) + \frac{x}{1!}\varphi_1'(t) + \cdots + \frac{x^k}{k!}\varphi_k'(t) + \cdots$$

egalitate ce trebuie să fie adevărată oricare ar fi x, deci

$$\begin{aligned} \varphi_0'(t) &= \varphi_{2m}(t), \\ \varphi_1'(t) &= \varphi_{2m+1}(t) \\ &\cdots\cdots \\ \varphi_k'(t) &= \varphi_{2m+k}(t) \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

De unde se deduce că putem considera arbitrare numai pe $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2m-1}$, celelalte φ_{2m+k} rezultînd imediat din (3) încît soluţia $u(x,t)$ căutată capătă următoarea expresie:

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \varphi_0(t) + \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi_0'(t) + \cdots + \frac{x^{2mn}}{(2mn)!}\varphi_0^{(n)}(t) + \cdots \\ & + \frac{x}{1!}\varphi_1(t) + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\varphi_1'(t) + \cdots + \frac{x^{2mn+1}}{(2mn+1)!}\varphi_1^{(n)}(t) + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi_{2m-1}(t) + \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!}\varphi_{2m-1}'(t) + \cdots + \\ & + \frac{x^{2mn+2m-1}}{(2mn+2m-1)!}\varphi_{2m-1}^{(n)}(t) + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + \cdots + u_{2m-1}(x,t) \tag{4'}$$

cu

$$u_k(x,t)=\frac{x^k}{k!}\varphi_k(t)+\frac{x^{2m+k}}{(2m+k)!}\varphi_k'(t)+\cdots+\frac{x^{2mn+k}}{(2mn+k)!}\varphi_k^{(n)}(t)+\cdots$$

fiecare din funcțiile componente $u_k(x,t)$ depinzînd de o funcție arbitrară de t, care trebuie să fie însă indefinit derivabilă în (t_0, t_1). Soluția (4) depinde așa dar de $2m$ funcții arbitrare, iar pentru a fi soluția efectivă a ecuației (1.) trebuie ca pentru $t\in(t_0', t_1)<(t_0, t_1)$ $u(x,t)$ considerată ca serie de puteri în x să aibă raza de convergență diferită de zero. Să punem acum

$$\varphi_0(t)=t^{-\frac{1}{2m}}$$

avem:

$$\varphi_0^{(k)}(t)=(-1)^k\frac{(2m+1)(4m+1)\cdots(2km-2m+1)}{(2m)^k}t^{-\frac{1}{2m}-k}$$

cu această valoare pentru φ_0 obținem

$$u_0(x,t)=t^{-\frac{1}{2m}}\left[1-\frac{1}{(2m)!}\cdot\frac{x^{2m}}{2mt}+\frac{2m+1}{(4m)!}\cdot\left(\frac{x^{2m}}{2mt}\right)^2-\cdots\right. \tag{5}$$

$$\left.\cdots+(-1)^k\frac{(2m+1)(4m+1)\cdots(2km-2m+1)}{(2km)!}\left(\frac{x^{2m}}{2mt}\right)^k+\cdots\right]$$

În continuare dacă punem

$$\varphi_p(t)=t^{-\frac{p+1}{2m}}\qquad p=0,1,2\cdots,2m-1$$

avem:

$$\varphi_p^{(k)}(t)=(-1)^k\frac{(p+1)(2m+p+1)\cdots(2mk-2m+p+1)}{(2m)^k}t^{-\frac{p+1}{2m}-k}$$

de unde rezultă că:

$$u_p(x,t)=(2m)^{\frac{p}{2m}}\cdot t^{-\frac{1}{2m}}\left[\frac{1}{p!}\cdot\frac{x^{2m}}{2mt}-\frac{p+1}{(2m+p)!}\left(\frac{x^{2m}}{2mt}\right)^{\frac{p}{2m}+1}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^k\frac{(p+1)(2m+p+1)\cdots(2mk-2m+p+1)}{(2mk+p)!}\left(\frac{x^{2m}}{2mt}\right)^{\frac{p}{2m}+k}+\cdots\right] \tag{6}$$

Seria care reprezintă pe $u_p(x,t)$ este convergentă pentru orice x, dacă $t>0$. În adevăr:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{x^{2m}}{2mt}\cdot\frac{(2mk+p)!}{(2mk-2m+p+1)(2mk-2m+p+2)\cdots(2mk+p)}=0$$

pentru orice x finit şi $t \neq 0$.
Deci pentru $t>0$ şi orice x funcţia $u_k(x,t)$ reprezintă o soluţie a ecuaţiei (1).

O combinaţie lineară prin factori constanţi a funcţiilor $u_0, u_1 \ldots, u_{2m-1}$, — ceea ce este echivalent cu o uşoară modificare a funcţiilor $\varphi_k(t)$ — va furniza soluţia fundamentală căutată ce va permite rezolvarea problemei lui Cauchy.

2. *Forma integrală a soluţiei* $u_0(x,t)$.

Pentru a găsi o expresie integrală a funcţiei $u_0(x,t)$ pornim de la formula [1] *

$$\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\, d\tau = \frac{1}{2m}\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)$$

în care dacă înlocuim pe τ^{2m} cu $\alpha\,\tau^{2m}$ sîntem conduşi la

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha\,\tau^{2m})\, d\tau = \frac{1}{2m}\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\alpha^{-\frac{1}{2m}} \tag{7}$$

prin derivare în raport cu α obţinem

$$\int_0^\infty \tau^{2m}\exp(-\alpha\,\tau^{2m})\, d\tau = \frac{1}{(2m)^2}\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\alpha^{-\frac{1+2m}{2m}}$$

$$\int_0^\infty \tau^{4m}\exp(-\alpha\,\tau^{2m})\, d\tau = \frac{1+2m}{(2m)^3}\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\alpha^{-\frac{1+4m}{2m}}$$

şi în general

$$\int_0^\infty \tau^{2km}\exp(-\alpha\,\tau^{2m})\, d\tau =$$

$$= \frac{(1+2m)(1+4m)\cdots(1+2km-2m)}{(2m)^{k+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\alpha^{-\frac{1+2km}{2m}} \tag{8}$$

încît putem scrie

$$\frac{(-1)^k}{(2mk)!}\cdot\frac{2m}{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)}\alpha^{\frac{1}{2m}}\int_0^\infty \tau^{2mk}\exp(-\alpha\,\tau^{2m})\, d\tau = \tag{8'}$$

$$= \frac{(-)^k}{(2m)^k} - \frac{(1+2m)(1+4m)\cdots(1+2mk-2m)}{(2mk)!}\alpha^{-k},\quad k=1,2,\cdots$$

* Pag. 163

dacă însumăm în (8′) în raport cu k de la o la $+\infty$ (pentru $k=0$ se ia valoarea (7)), apare în primul termen suma

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2mk)!} \tau^{2mk}$$

care este un cosinus al lui *P. Appell* relativ la ecuația

$$\theta^{2m} + 1 = 0 \tag{9}$$

și are valoare

$$\frac{1}{2m} (\exp \gamma_1 \tau + exp\, \gamma_2 \tau + \cdots + exp\, \gamma_{2m} \tau) \tag{10}$$

unde γ_k $(k=1, 2, \ldots, 2m)$ sînt rădăcinile ecuației (9). Pentru $m=1$, cosinusul lui P. Appell, considerat mai sus se reduce la cosinusul circular, $\cos \tau$.

Deoarece γ_k sînt dați de

$$\gamma_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2m}$$

avem

$$exp\,(\gamma_k \tau) = \left[\cos\left(\tau \sin \frac{2k+1}{2m}\pi\right) + \right.$$

$$\left. + i \sin\left(\tau \sin \frac{2k+1}{2m}\pi\right)\right] \cdot \exp\left(\tau \cos \frac{2k+1}{2m}\pi\right)$$

și cum punctele γ_k sînt simetrice față de axa ox urmează că suma (10) pe care o notăm cu

$$ap_{2m,\,o}\,(\tau)$$

este reală și are ca valoare

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{2}{m} \cos\left(\tau \sin \frac{2k+1}{2m}\pi\right) ch\left(\tau \cos \frac{2k+1}{2m}\pi\right) \tag{11}$$

În particular, pentru $m=2$, avem

$$ap_{4,\,0}\,(\tau) = \cos \frac{\sqrt{2}\,\tau}{2} \cdot ch \frac{\sqrt{2}\,\tau}{2}$$

În general ecuaţia (9) se asociază $2m$ funcţii. P. Appell, $ap_{2m,k}$ care admit dezvoltările

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\tau^{2mk+p}}{(2mk+p)}, \quad p=0, 1, \ldots, 2m-1$$

şi care pot fi exprimate prin formule analoage lui (10).

Să revenim acum la (8'). Dacă înlocuim pe α cu $\frac{t}{x^{-m}}$ şi însumăm de la 0 la $+\infty$, obţinem o expresie integrală a lui $u_0(x,t)$

$$u_0(x,t) = \frac{2m}{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} ap_{2m,0}(\tau) \exp\left(-t\frac{\tau^{2m}}{x^{2m}}\right) d\tau \tag{12}$$

sau, folosind pe (11),

$$u_0(x,t) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)} \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \cos\left(\tau \sin\frac{2k+1}{2m}\pi\right) ch\left(\tau\cos\frac{2k+1}{2m}\pi\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-t\frac{\tau^{2m}}{x^{2m}}\right) d\tau. \tag{12'}$$

Dacă în (12) facem înlocuirea

$$\lambda^{2m} = \frac{\tau^{2m}}{x^{2m}} t,$$

deci

$$\lambda = t^{\frac{1}{2m}} \cdot \frac{\tau}{x}, \quad d\tau = \frac{x}{t^{\frac{1}{2m}}} d\lambda,$$

$u_0(x,t)$ se transformă în

$$u_0(x,t) = \frac{2m}{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2m}}} ap_{2m,0}\left(\frac{x\lambda}{t^{\frac{1}{2m}}}\right) \exp(-\lambda^{2m})\, d\lambda \tag{13}$$

formă sub care se obţine imediat soluţia fundamentală din cazul ecuaţiei căldurii dacă se ia $m=1$. În adevăr în această situaţie

$$ap_{2,0}\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}\right) = \cos\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$$

și

$$u_0(x,t)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{x\lambda}{\sqrt{t}}\right)\exp(-\lambda^2)\,d\lambda=\frac{1}{\sqrt{t}}\,exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

3. *Soluția fundamentală. Cazul cînd m este impar.*

Dacă căutăm pentru ecuația (1) soluții prin funcții monogene de variabilă hypercomplexă $\theta x+\varphi t$, cu θ,φ legate prin relația:

$$\theta^{2m}-\varphi=0$$

din cauză că ecuația (1) este neomogenă soluțiile nu sînt decît exponențiale [2] * de unde rezultă imediat că

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\exp(\theta x+\theta^{2m}t)\,d\theta \qquad (14)$$

este de asemenea soluție a ecuației (1) ori care ar fi α. Dacă ne asigurăm de convergenta integralei (14) putem lua și $\alpha=+\infty$.

Să presupunem acum că m este impar și să înlocuim pe θ cu $\theta\sqrt{-1}$. În această situație putem lua $\alpha=+\infty$, și în afara unui factor imaginar, funcția $v(x,t)$ se scrie

$$v(x,t)=\int_0^{\infty}\exp(-\theta^{2m}t)\cos\theta x\,d\theta \qquad (14')$$

pentru $m=1$ și această soluție se reduce la soluția fundamentală a ecuației căldurii. Să stabilim legătura între $v(x,t)$ și funcția $u(x,t)$ prezentată în aliniatele precedente cu componentele u_p date de (6). Ținînd seamă că [1] *

$$\int_0^{\infty}\theta^p\exp(-\theta^q)\,d\theta=\frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

integrala (14') după ce se pune $\theta^{2m}t=\tau^{2m}$ și se integrează termen cu termen, operație posibilă pentru orice x dacă $t>0$, devine

$$v(x,t)=\frac{1}{t^{\frac{1}{2m}}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\Gamma\left(\frac{2p+1}{2m}\right)\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2m}}}\right)^{2p} \qquad (15)$$

*Pag. 355.
*Pag. 170.

şi se verifică imediat că este identică cu $u(x,t)$ dată de (4') dacă se ia

$$\varphi_{2k-1} \equiv 0$$

şi

$$\varphi_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2m)^{\frac{k}{m}}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right) t^{\frac{2k+1}{2m}}$$

Vom numi soluţia fundamentală a ecuaţiei (1) cu m impar, funcţia $v(x,t)$ definită de

$$v(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} \displaystyle\int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} d\tau, & \text{dacă } t > t_0 \\ 0, & \text{dacă } t \leqslant t_0 \end{cases} \tag{16}$$

4. *Proprietăţile soluţiei fundamentale* $v(x,t)$.

a) Integrala care reprezintă soluţia fundamentală este uniform convergentă pentru orice $x \in (-\infty, +\infty)$; avem

$$|v(x,t)| < \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m})\, d\tau < \infty$$

b) Funcţia $v(x,t)$ satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x^{2m-1}} + \frac{1}{2m} \frac{x-\xi}{t-t_0} v = 0 \tag{17}$$

Inadevăr

$$\frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x^{2m-1}} + \frac{1}{t-t_0} \int_0^\infty \tau^{2m-1} \exp(-\tau^{2m}) \cos\left[\frac{x-\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} \tau + (2m-1)\frac{\pi}{2}\right] d\tau$$

şi pentru că m este impar urmează că

$$\cos\left(\frac{(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} + (2m-1)\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{(x-\xi)}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}$$

încît

$$\frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x^{2\xi-1}} = -\frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{t-t_0} \int_0^\infty \exp(-\tau^{2m}) \sin \frac{(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} d(\tau^{2m}) \tag{18}$$

care integrată prin părți ne dă

$$\frac{\partial^{2m-1}v}{\partial x^{2m-1}} = -\frac{1}{2m}\frac{x-\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m})\cos\frac{(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}d\tau$$

deci

$$\frac{\partial^{2m-1}v}{\partial x^{2m-1}} = -\frac{1}{2m}\frac{x-\xi}{t-t_0}v$$

Urmează de aici că v este soluția particulară a ecuației (17) determinată de condițiile inițiale

$$\frac{\partial^{2p}v}{\partial x^{2p}}\Big|_{\xi} = \frac{(-1)^p}{2m}\cdot\frac{1}{(t-t_0)^{\frac{2p+1}{2m}}}\Gamma\left(\frac{2p+1}{2m}\right) \tag{19}$$

și

$$\frac{\partial^{2p+1}v}{\partial x^{2p+1}}\Big|_{\xi} = 0, \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1$$

este necesar de făcut observația că în cazul cînd $m=1$, această proprietate permite calculului efectiv al soluției fundamentale $v(x,t)$.

c) Avem

$$\lim_{x\to\infty} x^2 v(x,t) = 0 \tag{20}$$

Din (17) și (18) rezultă că

$$v(x,t) = \frac{2m}{x-\xi}\int_0^{\infty}\tau^{2m-1}\exp(-\tau^{2m})\sin\frac{(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}d\tau \tag{21}$$

și integrala din partea doua este mărginită ori care ar fi x, deci

$$\lim_{x\to\infty} v(x,t) = 0$$

Să derivăm acum pe (17) de $2m$—1 ori în raport cu x

$$\frac{\partial^{4m-2}v}{\partial x^{4m-2}} + \frac{1}{2m}\cdot\frac{x-\xi}{t-t_0}\cdot\frac{\partial^{2m-1}v}{\partial x^{2m-1}} + \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{1}{t-t_0}\cdot\frac{\partial^{2m-2}v}{\partial x^{2m-2}} = 0$$

și dacă ținem seamă de (17) obținem

$$\frac{\partial^{4m-2}v}{\partial x^{4m-2}} - \frac{1}{m^2}\left(\frac{x-\xi}{t-t_0}\right)^2\cdot v + \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{1}{t-t_0}\cdot\frac{\partial^{2m-2}v}{\partial x^{2m-2}} = 0$$

de unde rezultă imediat printr-un raționament analog ca la (20) că

$$\lim_{x\to\infty}(x-\xi)v(x,t) = 0$$

deci

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot v(x,t) = 0$$

În mod asemănător se arată că avem şi

$$\lim_{x\to\infty} x^2 v(x,t) = 0$$

proprietatea fiind adevărată şi dacă se înlocuieşte x^2 cu x^p, p oarecare. Această proprietate ne permite să afirmăm că

d) Integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)\,dx \tag{22}$$

este absolut convergentă. Avem deci

$$\lim_{N'\to\infty,\ N''\to\infty} \int_{N'}^{N''} v(x,t)\,dx = 0$$

Convergenta absolută a integralei (22) va sta la baza rezolvării problemei lui Cauchy pentru ecuţia (1) cu m impar.

Dacă notăm cu $\mu(m)$ valoarea integralei (22) urmează că putem scrie

$$\frac{1}{\mu(m)} \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau = 1 \tag{23}$$

e) Pentru ecuaţia

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{24}$$

soluţia fundamentală este dată

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(t-t_0)^{\frac{n}{2m}}} \prod_{i=1}^{n} \displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-\tau_i^{2m}) \cos \frac{(x_i-\xi_i)\tau_i}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau_i, & t - t_0 > 0 \\ 0, & \text{dacă } t - t_0 \leqslant 0 \end{cases} \tag{25}$$

iar integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} v(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\, dx_n = \mu(m, n) \tag{26}$$

este uniform convergentă.

5. *Soluția fundamentală. Cazul cînd m este par.* Să presupunem acum că în ecuația (1) m este par și iar α o rădăcină a ecuației

$$\alpha^{2m} + 1 = 0 \tag{27}$$

Din rezultatele § 3 urmează că funcția

$$v^*(x, t) = \int_0^{\infty} \exp\left[-\theta^{2m}(t - t_0)\right] \exp\left[\alpha\,\theta(x - \xi)\right] d\theta \tag{28}$$

este soluție a ecuației (1) pentru orice $x - \xi \geqslant 0$ și $t - t_0 > 0$ dacă real $\alpha < 0$, iar funcția

$$v^{**}(x, t) = \int_0^{\infty} \exp\left[-\theta^{2m}(t - t_0)\right] \exp\left[\alpha'\,\theta(x - \xi)\right] d\theta \tag{29}$$

este de asemenea soluție a ecuației (1) pentru orice $x - \xi \leqslant 0$, $t - t_0 > 0$ dacă real $\alpha' > 0$, α' fiind tot o rădăcină a ecuației (27). Să introducem și funcțiile

$$\tilde{v}^*(x, t) = \int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\theta^{2m}(t - t_0)\right] \exp\left[\alpha'\,\theta(x - \xi)\right] d\theta \tag{28'}$$

și

$$\tilde{v}^{**}(x, t) = \int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\theta^{2m}(t - t_0)\right] \exp\left[\alpha\,\theta(x - \xi)\right] d\theta \tag{29'}$$

care reprezintă soluții ale ecuației (1) pentru $(x - \xi) \geqslant 0$, $t - t_0 > 0$ și $x - \xi \leqslant 0$, $t - t_0 > 0$, respectiv.

Pentru orice m putem întotdeauna găsi două rădăcini α și α' ale ecuației (27) încît să avem

$$\begin{aligned} &\text{imag } \alpha = \text{imag } \alpha' \\ &\text{real } \alpha + \text{real } \alpha' = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Din rădăcinile ale ecuației (27) vom alege două α, α' care îndeplinesc condițiile (30) (real $\alpha < 0$) și cu ajutorul lor construim soluțiile v^*, v^{**}, $\tilde{v}^*$, $\tilde{v}^{**}$.

Să observăm că avem și

$$\begin{aligned} v^*(\xi, t) &= v^{**}(\xi, t) \\ \tilde{v}^*(\xi, t) &= \tilde{v}^{**}(\xi, t) \end{aligned} \tag{31}$$

Vom numi soluție fundamentală a ecuației (1) în cazul cînd m este par funcția $v(x, t)$ dată de

$$v(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[v^*(x,t)+\tilde{v}^*(x,t)\right] \text{ dacă } x-\xi\geqslant 0,\ t-t_0>0\\ \frac{1}{2}\left[v^{**}(x,t)+\tilde{v}^{**}(x,t)\right] \text{ dacă } x-\xi\leqslant 0,\ t-t_0>0\\ 0, \quad \text{dacă } t-t_0\leqslant 0\end{cases} \tag{32}$$

În virtutea relațiilor (30) urmează că funcția $v(x, t)$ dată de (32) este continuă în punctul $x = \xi$ iar în acest punct are valoarea

$$v(\xi,t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\theta^{2m}(t-t_0)\right]d\theta=\frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\cdot\frac{1}{2m}\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right),\ t-t_0>0$$

Soluția fundamentală (32) se transformă în soluția fundamentală a ecuației (1) cînd m este impar dacă se înlocuiește α și α' cu i, ceea ce este posibil totdeauna deoarece ecuația (27) cu m impar admite soluția $\alpha = i$

Dacă punem $\alpha = -a + ib$, $\alpha' = a + ib$, $a > 0$, obținem pentru $v(x, t)$ expresiile

$$v(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\displaystyle\int_0^{\infty}\exp\left[-\tau^{2m}-\right.\\ \left.-a\dfrac{(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right]\cos\dfrac{b(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}d\tau,\ t-t_0>0\ x-\xi\geqslant 0\\ \dfrac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\displaystyle\int_0^{\infty}\exp\left[-\tau^{2m}+\right.\\ \left.+a\dfrac{(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right]\cdot\cos\dfrac{b(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}d\tau,\ t-t_0>0,\ x-\xi\leqslant 0\\ 0, \quad t-t_0\leqslant 0\end{cases} \tag{33}$$

Dacă $a = 0$, $b = 1$ obținem soluția fundamentală în cazul cînd m este impar.

Pentru ecuația (24) cu m par soluția fundamentală este dată de

$$v(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{(t-t_0)^{\frac{n}{2m}}}\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}\exp\left[-\tau^{2m}-\right.\\ \left.-a\dfrac{(x_i-\xi_i)\tau_i}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right]\cos\dfrac{b(x_i-\xi_i)\tau_i}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}d\tau_i,\ x_i-\xi_i\geqslant 0,\ t-t_0>0\\ \dfrac{1}{(t-t_0)^{\frac{n}{2m}}}\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}\exp\left[-\tau^{2m}+\right.\\ \left.+a\dfrac{(x_i-\xi_i)\tau_i}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right]\cos\dfrac{b(x_i-\xi_i)\tau_i}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\cdot d\tau_i,\ x_i-\xi_i\leqslant 0,\ t-t_0>0\\ 0,\qquad \text{dacă } t-t_0\leqslant 0\end{cases}\tag{34}$$

și în această situație pentru $a=0$ și $b=1$ obținem soluția (25) în cazul cînd m este impar.

Cap. II. **Problema lui Cauchy.**

1. *Proprietățile unei integrale.* La baza rezolvării problemei lui Cauchy pentru ecuația (1) stă studiul integralei:

$$J=\frac{2}{\mu(m)}\cdot\frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\int_a^b\omega(\xi)\,d\xi\int_0^{\infty}\exp(-\tau^{2m})\cos\frac{\xi\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\,d\tau\tag{35}$$

cu $\omega(\xi)$ mărginită în (a, b) și $t>t_0$.
Dacă în (35) facem schimbarea de variabila

$$\tau=\frac{s}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}},\quad d\tau=\frac{ds}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}$$

obținem

$$J=\frac{2}{\mu(m)}\int_a^b\omega(\xi)\,d\xi\int_0^{\infty}\frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}}\exp\left(-\frac{s^{2m}}{t-t_0}\right)\cos\left(\frac{s\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}}\right)ds\tag{36}$$

Ne propunem să studiem limita acestei integrale cînd $t\to t_0+0$.
Avem mai multe situații
1) Cazul cînd $b>a>0$. Prin ipoteză

$$|\omega(\xi)|<M,\quad \xi\in(a,b)$$

deci

$$|J| \leqslant 2M \left| \frac{1}{\mu(m)} \int_a^b d\xi \int_0^\infty \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}} \exp\left(-\frac{s^{2m}}{t-t_0}\right) \cos \frac{s\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}} ds \right|$$

sau

$$|J| \leqslant 2M(b-a) |\mu(m)^{-1}| \int_0^\infty \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}} \exp\left(-\frac{s^{2m}}{t-t_0}\right) ds$$

şi din cauza exponenţialei de sub semnul integral care hotărăşte valoarea integralei cînd $t \to t_0 + 0$ urmează că

$$\lim_{t \to t_0 + 0} J = 0 \tag{37}$$

rezultatul este adevărat şi cînd $b \to +\infty$ deoarece integrala (36) pentru $t > t_0$ este mărginită şi în acest caz, conform cap. I, § 4, (d), iar funcţia de sub semnul integral, după transformarea efectuată, tinde către zero cînd $t \to t_0 + 0$

II) Cazul $a = 0$, $b > 0$. Fie,

$$\lim_{\xi \to +0} \omega(\xi) = \omega(+0)$$

şi $\beta > 0$ încît să avem pentru $s \in (0, \beta)$

$$|\omega(s) - \omega(+0)| < \eta$$

Aranjînd convenabil putem scrie

$$J = \frac{2\omega(+0)}{\mu(m)} \int_0^\beta d\xi \int_0^\infty \frac{1}{(t-t^0)^{\frac{1}{m}}} \exp\left(-\frac{s^{2m}}{t-t_0}\right) \cos \frac{\xi s}{(t-t^0)^{\frac{1}{m}}} ds +$$

$$+ \frac{2}{\mu(m)} \int_0^\beta \left[\omega(\xi) - \omega(+0)\right] d\xi \int_0^\infty \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}} \exp\left(-\frac{s^{2m}}{t-t_0}\right) \cos \frac{\xi s}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}} ds +$$

$$+ \frac{2}{\mu(m)} \int_0^\beta \omega(\xi)\, d\xi \int_0^\infty \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}} \exp\left(-\frac{s^{2m}}{t-t_0}\right) \cos \frac{\xi s}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}} ds$$

în care să facem schimbarea de variabilă

$$\frac{\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} = \varsigma, \quad d\xi = (t-t_0)^{\frac{1}{2m}} \cdot d\varsigma$$

obținem, așa dar,

$$J=\frac{2\omega(+0)}{\mu(m)}\int_0^{\frac{\beta}{(t-t)}^{\frac{1}{2m}}} d\varsigma\int_0^{\infty}\frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\exp\left(-\frac{s^{2m}}{t-t^0}\right)\cos\frac{s\zeta}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}ds+A+B$$

cu A și B dați de

$$A=\frac{2}{\mu(m)}\int_0^{\frac{\beta}{(t-t_0)}^{\frac{1}{2m}}}\left[\omega(\xi)-\omega(+0)\right]d\varsigma\int_0^{\infty}\frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\exp\left(-\frac{s^{2m}}{t-t_0}\right)\cos\frac{s\zeta}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}ds$$

$$B=\frac{2}{\mu(m)}\int_{\frac{\beta}{(t-t_0)}^{\frac{1}{2m}}}^{b}\omega(\xi)\,d\varsigma\int_0^{\infty}\frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\exp\left(-\frac{s^{2m}}{t-t_0}\right)\cos\frac{s\varsigma}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}d\zeta$$

Conform cazului I) studiat avem

$$\lim_{t\to t_0+} B=0$$

deoarece $b>0$, $\beta>0$. Cît privește integrala A

$$|A|<\eta$$

și

$$\lim_{t\to t_0+0} A=0$$

ținînd seama de rezultatele cap. I, § 4, (d) și de cele obținute mai sus urmează că în această situație

$$\lim_{t\to t_0+0} J=\omega(+0) \qquad (38$$

În mod asemănător se arată că dacă $a=0$, $b<0$

III) $$\lim_{t\to t_0+0} J=-\omega(-0) \qquad (39)$$

iar dacă $a<0$, $b>0$, avem

IV) $$\lim_{t\to t_0+0} J=\omega(+0)+\omega(-0) \qquad (40)$$

2. *Soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația*

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_1^{2m}}+\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_2^{2m}}+\cdots+\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_\eta^{2m}}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

a) *Cazul m impar*

Fie $\omega(x)$ o funcţie continuă şi mărginită pe dreapta reală. Se cere să se găsească soluţia $\mu(x, t)$ a ecuaţiei

$$\frac{\partial^{2m}_{u}}{dx^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (m, \text{ impar})$$

care să satisfacă condiţia iniţială

$$\lim_{t \to t_0 + 0} u(x, t) = \omega(x) \tag{41}$$

funcţia $\mu(x, t)$ fiind definită pentru $t > t_0$ şi orize x.

Rezultatele aliniatului precedent ne afirmă că soluţia căutată este dată de:

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu(m)} \cdot \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-\xi)}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau \tag{42}$$

În adevăr dacă derivăm de $2m$ ori în raport cu x obţinem

$$\frac{\partial^{2m}_{u}}{\partial x^{2m}} = -\frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{\mu(m)} \cdot \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{2m+1}{2m}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \tau \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-\xi)}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d(\tau^{2m})$$

iar dacă derivăm o dată în raport cu t avem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{\mu(m)} \cdot \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{2m+1}{2m}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-\xi)}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{\mu(m)} \cdot \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{2m+2}{2m}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \tau(x-\xi) \exp(-\tau^{2m}) \sin \frac{\tau(x-\xi)}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau$$

Să integrăm prin părţi pe

$$J = \int_{0}^{\infty} \tau \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-\xi)}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d(\tau^{2m})$$

avem

$$I = \left[-\tau \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-\xi)}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} \right]_{0}^{\infty} + \tag{43}$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(x-\xi)}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau - \frac{x-\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} \int_{0}^{\infty} \tau \exp(-\tau^{2m}) \sin \frac{(x-\xi)\tau}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau$$

Primul termen din partea a doua e nul. Dacă înlocuim termenii rămași în derivata de ordinul $2m$ în raport cu x și ținem seama de derivata în raport cu t rezultă imediat că $\mu(x, t)$ dat de (42) este soluție a ecuației (1). Cît privește faptul dacă satisface condiția inițială (41) aceasta rezultă imediat din primul aliniat al acestui capitol.

Dacă căutăm acum soluția $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ a ecuației

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \; m \text{ impar} \tag{44}$$

care îndeplinește condiția inițială

$$\lim_{t \to t_0 + 0} u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

u fiind definit pentru $t > t_0$ și orice $x_1, x_2, \ldots, x_n$, obținem

$$u(x_1, x_2, \ldots x_n, t) = \frac{1}{\mu(m, n)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\, v\, d\xi_n \tag{45}$$

cu soluția fundamentală $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ dată de (25) iar $\mu(m, n)$ dat de (26).

b) *Cazul m par.* Să arătăm că în această situație, soluția ecuației (1) pentru m par, care răspunde la condiția inițială (41) este dată de

$$u(x, t) = \frac{1}{2\mu(m, -a, b)} \int_{-\infty}^{x} \omega(\xi) \left[v^*(x, t) + \tilde{v}^*(x, t) \right] d\xi + \tag{46}$$

$$+ \frac{1}{2\mu(m, a, b)} \int_{x}^{+\infty} \omega(\xi) \left[v^{**}(x, t) + \tilde{v}^{**}(x, t) \right] d\xi$$

cu v^*, v^*, v^{**}, v^{**} date de (28), (28′), (29), (29′), și $\mu(m, a, b)$, $\mu'(b, -a, b)$ definiți de (50) și (52) ; dacă folosim pe (33) obținem

$$u(x, t) = \frac{1}{2\mu'(m, -a, b)} \cdot \frac{1}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}} \int_{-\infty}^{x} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \exp\left[-\tau^{2m} - \right.$$

$$\left. - a\tau \frac{x - \xi}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}} \right] \cos \frac{b\tau(x - \xi)}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau + \frac{1}{2\mu(m, a, b)} \cdot \frac{1}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}} \int_{x}^{-\infty} \omega(\xi)\, d\xi \exp\left[-\tau^{2m} + \right.$$

$$\left. + a \frac{x - \xi}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}} \tau \right] \cdot \cos \frac{b\tau(x - \xi)}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}}\, d\tau \tag{46′}$$

Să arătăm că (46′) verifică ecuaţia (1). Avem cu $a > 0$, (a, b, reali)

$$\frac{\partial^{2m}_{u}}{\partial x^{2m}} = \frac{-1}{(t-t_0)^{\frac{2m+1}{2m}}} \int_{-\infty}^{x} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \tau^{2m} \exp\left[-\tau^{2m} - \right.$$

$$\left. - a\tau \frac{x\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] \cos\left[b\tau \frac{x-\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] d\tau - \qquad (47)$$

$$\frac{1}{(t+t_0)^{\frac{2m+1}{2m}}} \int_{x}^{+\infty} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \tau^{2m} \exp\left[-\tau^{2m} + a\tau \frac{x-\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] \cos\left[b\tau \frac{x-\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] d\tau$$

şi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{2m+1}{2m}}} \int_{-\infty}^{x} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \exp\left[-\tau^{2m} - \right.$$

$$\left. - a\tau \frac{x-\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] \cos\left[b\tau \frac{x-\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] d\tau - \qquad (48)$$

$$\frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{(t-t^0)^{\frac{2m+1}{2m}}} \int_{x}^{+\infty} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \exp\left[-\tau^{2m} + a\tau \frac{x\ \ \xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}} \cos\left[b\tau \frac{x\ \ \xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] d\tau\right.$$

Dacă integrăm prin părţi pe (47), obţinem un rezultat asemănător lui (43) pentru fiecare termen care scăzut din (48) confirmă afirmaţia făcută.

Pentru a arăta că satisface şi condiţia iniţială dată să observăm că integrala

$$J = \frac{1}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}} \int_{\alpha}^{\beta} \omega(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} \exp\left[-\frac{s^{2m}}{t-t_0} - c\frac{\xi s}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}}\right] \cos\left[b\frac{s\xi}{(t-t_0)^{\frac{1}{m}}}\right] ds, \qquad (49)$$

cu a, b, reali, $|\omega(\xi)| < M$, are următoarele proprietăţi

I) dacă $a > 0$, $\beta > \alpha > 0$

$$\lim_{t \to t_0 + 0} J = 0$$

II) dacă $a > 0$, $\beta > 0$, $\alpha = 0$

$$\lim_{t \to t_0 + 0} I = \omega(+0) \cdot \mu(m, a, b,)$$

unde am notat

$$\mu(m, a, b) = \lim_{t \to t_0 + 0} \int_0^{\beta} d\xi \int_0^{\infty} \frac{1}{(t - t_0)^{\frac{1}{m}}} \exp\left[- \frac{s^{2m}}{t - t_0} - a\xi \frac{s}{(t - t_0)^{\frac{1}{m}}} \right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\frac{b\xi s}{(t - t_0)^{\frac{1}{m}}} \right] ds \tag{50}$$

Avem :

$$\lim_{\substack{a \to +0,\ b \to 1}} \mu(m, a, b) = \mu(m) \tag{51}$$

III) dacă $a < 0$, $\beta < \alpha < 0$

$$\lim_{t \to t_0 + 0} J = 0$$

IV) dacă $a < 0$, $\beta < 0$, $\alpha = 0$

$$\lim_{t \to t_0 + 0} J = -\omega(-0)\,\mu'(m, -a, b)$$

$$\text{cu } \mu'(m, -a, b) = \lim_{t \to t_0 + 0} \int_{\beta}^{0} d\xi \int_0^{\infty} \frac{1}{(t - i_0)^{\frac{1}{m}}} \exp\left[- \frac{s^{2m}}{i - t_0} + \right.$$

$$\left. + a\xi \frac{s}{(i - t_0)^{\frac{1}{m}}} \right] \cos\left[\frac{b\xi s}{(t - t_0)^{\frac{1}{m}}} \right] ds \tag{52}$$

şi avem

$$\lim_{\substack{a \to 0 +,\ b \to 1}} \mu'(m, -a, b) = \mu(m) \tag{53}$$

Aceste proprietăţi se verifică cu uşurinţă ţinînd seamă de cap. II § 1 şi conduc imediat la

$$\lim_{t \to t_0 + 0} u(x, t) = \omega(x)$$

$\mu(x, t)$ dat de (46′) şi în ipoteza că $\omega(x)$ este continuă.

Relaţiile (51) şi (53) arată că formula (46′) pentru $a = 0$, $b = 1$ se reduce la (42).

Dacă căutăm acum soluţia $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ a ecuaţiei

$$\frac{\partial^{2m}_u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m}_u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m}_u}{\partial x_n^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad m \text{ par},$$

care îndeplineşte condiţia iniţială

$$\lim_{t \to t_0 + 0} \mu(x_1, x_2, \ldots x_n, t) = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

u fiind definit pentru $t > t_0$ şi orice $x_1, x_2, \ldots, x_n$, obţinem

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = \frac{1}{2\mu(m, n, a, b)} \int_{-\infty}^{x_1} d\xi_1 \int_{-\infty}^{x_2} d\xi_2 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \omega(\xi_1, \cdots, \xi_n)\, v^* \cdot d\xi_n + \tag{54}$$

$$+ \frac{1}{2\mu'(m, n, a, b)} \int_{x_1}^{+\infty} d\xi_1 \int_{x_2}^{+\infty} d\xi_2 \cdots \int_{x_n}^{+\infty} \omega(\xi_1, \ldots, \xi_n) \cdot v^{**} \cdot d\xi_n$$

unde

$$v^* = \frac{1}{(t - t_0)^{\frac{n}{2m}}} \prod_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \exp\left[-\tau_i^{2m} - a \frac{(x_i - \xi_i)\tau_i}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] \cos\left[\frac{b(x_i - \xi_i)\tau_i}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] d\tau_i \tag{55}$$

$$v^{**} = \frac{1}{(t - t_0)^{\frac{n}{2m}}} \prod_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \exp\left[-\tau_i^{2m} + a \frac{(x_i - \xi_i)\tau_i}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] \cos\left[\frac{b(x_i - \xi_i)\tau_i}{(t - t_0)^{\frac{1}{2m}}}\right] d\tau_i$$

cu $a \geqslant 0$, $t - t_0 > 0$, adică date de (34), iar μ şi μ' se obţin ţinîndu-se seamă de (26), (51) şi (53).

Observaţie. Rezultatele obţinute mai sus se pot extinde cu uşurinţă la un operator linear cu coeficienţi constanţi

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

unde L îndeplineşte anumite condiţiuni care asigură convergenţa, integratei ce intervine în soluţia problemei lui Cauchy. Problema sub acest aspect este pusă în [3]. Rezultatele noastre cuprind pe cele cuprinse în [3] însă sînt mai generale. Lucrarea [3] cel puţin cum se deduce din recenzia, care singură ne-a adus la cunoştinţă rezultatele, nu poate cuprinde şi cazul cînd m este par. Rezultatul obţinut în această lucrare, arată că ipotezele asupra operatorului L aşa cum sînt puse în [3] pot fi mult extinse.

3. *Lărgirea condiţiilor impuse funcţiei* $\omega(x)$.

În rezolvarea problemei lui Cauchy am pus funcţiei $\omega(x)$ condiţia de a fi mărginită pentru orice $x(-\infty, +\infty)$. Condiţia cerută are originea în convergenţa uniformă a integralei (22) care intervine în soluţia problemei, însă acest fapt poate să aibă loc, în condiţii mai largi pentru $\omega(x)$.

Să căutăm în acest scop o soluție a ecuației

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

care pentru $x = x_0$ să îndeplinească condiția

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x_0} = \theta_k(t),\ k = 0,1,\ldots,2m-1 \tag{56}$$

cu $\theta_k(t)$ funcția analitice de $t \in (t_0, t_1)$.

Punem

$$u(x,t) = \varphi_0(t) + \frac{x-x_0}{1!}\varphi_1(t) + \cdots + \frac{(x-x_0)^s}{s!}\varphi_s(t) + \cdots \tag{57}$$

Dacă derivam, înlocuim în ecuație și ținem seamă de condițiile (56) obținem

$$\begin{aligned} u = {} & \theta_0(t) + \frac{(x-x_0)^{2m}}{(2m)!}\theta_0'(t) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{2mn}}{(2mn)!}\theta_0^{(n)}(t) + \cdots \\ & + \frac{x-x_0}{1!}\theta_1(t) + \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(2m+1)!}\theta_1'(t) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{2mn+1}}{(2mn+1)!}\theta_1^{(n)}(t) + \cdots \\ & + \frac{(x-x_0)^{2m-1}}{(2m-1)!}\theta_{2m-1}(t) + \frac{(x-x_0)^{4m-1}}{(4m-1)!}\theta_{2m-1}'(t) + \cdots + \\ & + \frac{(x-x_0)^{2mn+2m-1}}{(2mn+2m-1)!}\theta_{2m-1}^{(n)}(t) + \cdots \end{aligned} \tag{58}$$

adică tocmai soluția (4), unde funcțiile arbitrare sînt înlocuite cu funcțiile inițiale $\theta_k(t)$. Deoarece $\theta_k(t)$ sînt analitice pentru $t \in (t_0, t_1)$ urmează că admit majorante de forma

$$\frac{M_k}{1 - \dfrac{t-t_0}{r_k}}$$

și pentru $M = \max(M_k)$, $r = \min(r_k)$, avem majoranta comună

$$\frac{M}{1 - \dfrac{t-t_0}{r}}$$

înlocuind în (58) obținem o majorantă a funcției $u(x,t)$, al cărei termen general este dat de:

$$\frac{|x-x_0|^{2mn+k}}{\left[1 - \dfrac{|t-t_0|}{r}\right]^{n+1}} \cdot \frac{M \cdot n!}{(2mn+k)!\, r^n},\quad (k = 0,1,2,\ldots,2m-1)$$

de unde rezultă că o funcţie majorantă a lui $\omega(x)$ este dată de

$$F(x)=M\sum\frac{n!}{r^n}\left[\frac{x^{2mn}}{(2mn)!}+\frac{x^{2mn+1}}{(2mn+1)!}+\cdots+\frac{x^{2mn+2m-1}}{(2mn+2m-1)!}\right]$$

şi această serie are termenii inferiori termenilor seriei

$$\alpha\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\right]\exp\left(\beta x^{\frac{2m}{2m-1}}\right)$$

dacă α şi β îndeplinesc condiţiile

$$\frac{M\cdot n!}{r^n(2mn+k-1)!}<\frac{\alpha\cdot\beta^{n(2m-1)}}{(2mn-n)!\,k!},\quad k=0,1,2,\cdots,2m-1$$

dintre care prima, $k=0$, le include şi pe celelalte. Trebuie să avem aşa dar

$$\alpha>\frac{M\cdot n!\,(2mn-n)!}{\beta^{2mn-n}\,r^n\,(2mn)!}$$

şi cum α trebuie să fie mărginit urmează condiţia

$$\beta^{2m-1}\cdot r>\frac{(2m-1)^{2m-1}}{(2m)^{2m}} \tag{59}$$

Reciproc, dacă considerăm acum pe $u(x,t)$ desfăşurată după puterile lui $t-t_0$ şi cerem o soluţie a ecuaţiei (1), încît pentru $t=t_0$ să se reducă la o funcţie dată $\omega(x)$

$$\lim_{t\to t_0+0}u(x,t)=\omega(x)$$

obţinem

$$u(x,t)=\omega(x)+\frac{t-t_0}{1!}\omega^{(2m)}(x)+\cdots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}\omega^{(2mn)}(x)+\cdots$$

deci

$$\theta_k(t)=\omega_{(0)}^{(k)}+\frac{t-t_0}{1!}\omega_{(0)}^{(2m+k)}+\cdots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}\omega_{(o)}^{(2mn+k)}+\cdots k=0,1,\cdots 2m-1$$

iar dacă $\omega(x)$ admite o majorantă de forma

$$\alpha\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\right]\exp\left[\beta x^{\frac{2m}{2m-1}}\right] \tag{60}$$

cu $\alpha>0$, $\beta>0$, atunci seriile care reprezintă pe θ_k au raza de convergenţă diferită de zero. În adevăr ($k=0$) avem

$$\frac{\omega_{(o)}^{(2mn)}}{(2mn)!}<\frac{\alpha\cdot\beta^{n(2m-1)}}{(2mn-n)!}$$

deci

$$\omega_{(o)}^{2mn} < \frac{\alpha \cdot \beta^{n(2m-1)}}{(2mn-n)!} \cdot (2mn)!$$

și prin urmare o maporantă a seriei lui θ_0 este seria cu termenul general:

$$\frac{\alpha \cdot \beta^{n(2m-1)}}{(2mn-n)!} \cdot (2mn)! \mid t - t_0 \mid^n$$

care este convergenta pentru

$$\beta^{2m-1} \cdot \mid t - t_0 \mid < \frac{(2m-1)^{2m-1}}{(2m)^{2m}} \tag{61}$$

condiția găsită este aceeași pentru toate funcțiile θ_k.

Cap. III. **Problema lui Cauchy pentru ecuația**

$$E(u) \equiv \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_p^{2m}} - \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial y_1} - \cdots - \gamma_q \frac{\partial u}{\partial y_q} = 0 \tag{62}$$

cu

$$\gamma_k = \gamma_k (y_1, y_2, \cdots, y_q)$$

și

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \gamma_2} + \cdots + \frac{\partial \gamma_q}{\partial y_q} = 0 \tag{63}$$

1. *Soluția fundamentală.* Vom numi soluție fundamentală a ecuației (62) cu m impar funcția $v(x, y) = v(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_q)$ dată de

$$v(x, y) = [\mu(m)]^{-p} [G(y) -$$

$$- G(y_0)]^{\frac{-p}{2m}} \prod_{i=1}^{p} \int_0^{\infty} \exp(-\tau_i^{2m}) \cos \frac{(x_i - x_i^0)\tau_i}{[G(y) - G(y_0)]^{\frac{1}{2m}}} d\tau_i \tag{64}$$

dacă $G(y) > G(y_0)$ și $v(x, y) = 0$ dacă $G(y) \leqslant G(y_0)$, unde $G(y) = G(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ este soluția ecuației

$$\gamma_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial y_1} + \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + \cdots + \gamma_q \frac{\partial u}{\partial y_q} = 1$$

care pentru $y_q = y_q^0$, se reduce la $y_1 - y_1^0$ condiţie care o determină în mod unic. Se verifică cu uşurinţă că (64) este o soluţie a ecuaţiei (62) şi în plus avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} v(x; y)\, dx_p = 1 \tag{65}$$

pentru toate punctele $y(y_1, \ldots y_q)$ pentru care $G(y) > G(y_0)$.

În cazul cînd m este par se obţine în mod asemănător soluţia fundamentală pentru ecuaţia (62) din (34) după ce se înlocuieşte $t - t_0$ cu $G(y) - G(y_0)$.

În cele ce urmează ne vom ocupa de ecuaţia (62) numai pentru m impar, cazul par obţinîndu-se cu uşurinţă ţinîndu-se seamă de aliniatele precedente.

dată de

2. *Ecuaţia adjunctă ecuaţiei* $E(u) = 0$. Ecuaţia adjunctă $E^*(u)$ este

$$E^*(u) \equiv \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_p^{2m}} + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \cdots + \gamma_q \frac{\partial u}{\partial y_q} + \left(\frac{\partial \gamma_1}{dy_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial \gamma_q}{\partial y_q} \right) u = 0$$

vom presupune că funcţiile γ_k, derivabile, îndeplinesc condiţia (63) încît ecuaţia adjunctă ia forma definitivă:

$$\mathcal{E}(u) \equiv \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{dx_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_p^{2m}} + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \cdots + \gamma_q \frac{\partial u}{\partial y_q} = 0 \tag{66}$$

cu

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial y_1} + \frac{d\gamma_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial \gamma_q}{d\gamma_q} = 0$$

prin calculul direct se poate arăta că soluţia elementară dată de (64) verifică ecuaţia $E(u) = 0$ în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p$ şi ecuaţia adjunctă $\mathcal{E}(u) = 0$ în variabilele $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0, y_2^0, \ldots, y_q^0$.

Avem identitatea

$$v\,E(u) - \mathcal{E}(v) \equiv \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^{2m-1} u}{\partial x_i^{2m-1}} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^{2m-2} u}{\partial x_i^{2m-2}} + \cdots - u \frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x^{2m-1}} \right] - \tag{67}$$

$$- \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial}{\partial y_j} (\gamma_j\, u\, v)$$

pentru u şi v două funcţii oarecare, $2m$ — derivabile.

Dacă Ω_p și ω_q sînt două domenii oarecare în spațiul cu p dimensiuni $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ și q dimensiuni $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ mărginite de suprafețele $E\Omega_p$ și $F\omega_q$ respectiv, care îndeplinesc condițiile de aplicabilitate ale formulelor stokes-iene, iar

$$d\Omega = dx_1\, dx_2 \cdots dx_p$$

$$d\omega = dy_1\, dy_2 \cdots dy_q$$

atunci avem

$$\int_{\omega q} d\omega \int_{\Omega p} [v\, E(u) - \mathcal{E}(v)]\, d\Omega =$$

$$= \int_{\omega q} d\omega \int_{\Omega p} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial^{2m-1} u}{\partial x_i^{m-1}} - \frac{dv}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^{2m-2} u}{\partial x_i^{2m-2}} + \cdots - u \frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x_i^{2m-1}} \right) d\Omega -$$

$$- \int_{\Omega p} d\Omega \int_{\omega q} \sum_{1\ j}^{q} \frac{\partial}{\partial y_j} (\gamma_j\, u\, v)\, d\omega \qquad (68)$$

iar dacă α_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sînt cosinușii directori ai normalei exterioare la suprafața $F\Omega_p$ și β_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ sînt cosinușii directori ai normalei exterioare la suprafața $F\omega_q$ atunci (68) se transformă în

$$\int_{\omega q} d\omega \int_{\Omega p} [v\, E(u) - u\mathcal{E}(v)]\, d\Omega =$$

$$= \int_{\omega q} d\omega \int_{F\Omega p} \sum_{i=1}^{p} \left(v \frac{\partial^{2m-1} u}{\partial x_i^{2m-1}} - \frac{\partial v}{dx_i} \cdot \frac{\partial^{2m-2} u}{\partial x_i^{2m-2}} + \cdots - u \frac{\partial^{2m-1} v}{\partial x_i^{2m-1}} \right) \alpha_i\, d\,[F\Omega_p] -$$

$$- \int_{\Omega p} d\Omega \int_{F\omega q} uv \left(\sum_{j=q}^{q} \beta_j \gamma_j \right) d(F\omega_q) \qquad (69)$$

Vom folosi formula (69) pentru rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația (62) cu condiția (63).

3. *Soluția problemei lui Cauchy.*

Vom rezolva complet problema pentru ecuația

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - P(y, z) \frac{\partial u}{\partial y} - Q(y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (70)$$

cu condiția

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad (71)$$

deoarece drumul urmat este acelaşi şi pentru ecuaţia (62), în afară de dificultăţile de natură geometrică sau algebrică ce pot interveni cînd numărul variabilelor y_q creşte. Să presupunem că următoarele condiţii sînt îndeplinite.

a) Funcţiile $P(y, z)$ şi $Q(y, z)$ sînt mărginite într-o vecinătate (D) a punctului η, ζ

$$|y-\eta|<r, |z-\zeta|<r$$

şi nenulele în punctele η, ζ

$$P(\eta, \zeta) \neq 0, \quad Q(\eta, \zeta) \neq 0 \tag{72}$$

b) Soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{dz}{dy} P(y, z) - Q(y, z) = 0 \tag{73}$$

care trece prin punctul (η, ζ) taie axa oz într-un punct $\alpha(\eta, \zeta)$ astfel ca arcul AC cu $A[y = o, z = \alpha(\eta, \zeta)]$, $C(y = \eta, z = \zeta)$ să fie cuprins în întregime în (D).

c) În domeniul $D' \subset D$, funcţia continuă $w = G(\eta, \zeta) - G(y, z)$ soluţie a ecuaţiei diferenţiale:

$$\frac{d\zeta}{d\eta} P(\eta, \zeta) + Q(\eta, \zeta) = 1 \tag{74}$$

şi a ecuaţiei

$$\frac{dw}{dy} P(y, z) + Q(y, z) = -1 \tag{75}$$

verifică neegalitatea

$$G(\eta, \zeta) - C(y, z) > 0$$

şi pentru $z = \zeta$ se reduce la $\eta - y$

În această situaţie există o soluţie a ecuaţiei (70) completată cu (71) care să satisfacă condiţiei iniţiale:

$$u(x, y, z)\big|_{y=0} = \varphi(x, z) \tag{76}$$

funcţia $\varphi(x, z)$ fiind mărginită în D' în raport cu z iar în raport cu x verificînd neegalitatea

$$|\varphi(x, z)| < M \exp\left(K x^{\frac{2m}{2m-1}}\right)$$

pentru orice x, dacă

$$K^{2m-1} < \frac{(2m-1)^{2m-1}}{(2m)^{2m}} \cdot \frac{1}{r} \tag{77}$$

soluţie dată de

$$u(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{Q(\eta, \zeta)} \frac{\partial \alpha(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(\xi, \eta, \zeta;\ x, 0, \alpha)\, \varphi(x, \alpha)\, dx \tag{78}$$

Demonstrație. Pornim de la relația (67) care în cazul ecuației (70) se scrie

$$\iint_D [v\,E(u) - u\,\mathfrak{E}(v)]\,dydz + \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial y}(P\,u\,v) + \frac{\partial}{\partial z}(Q\,u\,v)\right] dydz = \tag{79}$$

$$= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(v\,\frac{\partial^{2m-1}u}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial v}{dx}\,\frac{\partial^{2m-2}u}{dx^{2m-2}} + \cdots - u\right) dydz$$

D fiind domeniul plan mărginit de arcul AC și paralele la axele Oy, Oz duse din C și A respectiv care se întîlnesc în punctul B $(\zeta, 0)$ pe axa Oz, deci (D) este triunghiul mixtilinie ABC (AB este un segment ale axei Oz).

În (79) luăm pentru v soluția elementară

$$v = v(\xi, \eta, \zeta;\, x, z) = \frac{1}{\mu(m)} \cdot [G(\eta, \zeta) - G(y, z)]^{-\frac{1}{2m}} \cdot$$

$$\cdot \int_{\infty}^{0} \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{\tau(\xi - x)}{[G(\eta, \zeta) - G(y, z)]^{\frac{1}{2m}}} \cdot d\tau$$

deci

$$E[v(x, y, z)] = 0$$

Pe u îl considerăm soluție a ecuației (70) deci $E(u) = 0$. Să ne ocupăm acum de a doua integrală din partea întîi din (79). Avem, dacă o notăm cu I,

$$I = \int_0^{\eta} dy \int_{z(y)}^{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial y}(P\,u\,v) + \frac{\partial}{\partial z}(Q\,u\,v)\right] dz$$

sau

$$I = \int_0^{\eta} Q\,u\,v \Big|_{z(y)}^{\xi} dy + \int_{\alpha(\eta,\xi)}^{\xi} P\,u\,v \Big|_0^{y(z)} dz \tag{80}$$

unde $y(z)$ se obține din $z = z(y)$, soluția ecuației (73) ce trece prin punctul (η, ζ). Relația (80) se mai poate scrie

$$I = \int_0^{\eta} Q\,u\,v\,|_{z=\xi}\, dy - \int_{\alpha}^{\xi} P\,u\,v\,|_{y=0}\, dz + \int_{AC} uv\,(P dz - Q dy) \tag{81}$$

însă

$$P\,dz - Q\,dy$$

este identic nulă pe arcul $\overline{AC}$, conform lui (73); dacă mai ținem seama că

$$u(x, y, z)\,|_{y=0} = \varphi(x, z)$$

iar $G(\eta, \zeta) - G(y, z)$ se reduce la $\eta - y$ pentru $z = \zeta$, urmează că (81) se scrie

$$I = \frac{1}{\mu(m)} \int_0^{\eta} Q(y,\zeta) \cdot u(x,y,\zeta) \left[(\eta - y)^{-\frac{1}{2m}} \int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cdot \right. \tag{82}$$

$$\left. \cdot \cos \frac{(\xi - x)\tau}{(\eta - y)^{\frac{1}{2m}}} d\tau \right] dy - \int_{\alpha(\eta,\xi)}^{\xi} P(0,z)\, v(\xi,\eta,\zeta;\, x,0,z)\, \varphi(x,z)\, dz$$

Expresia lui I astfel obţinută s-o introducem în (79), apoi să integrăm de la $-\infty$ la $+\infty$

Integrala din partea doua din (79), în această situaţie, este nulă, din cauza condiţiilor (77) cît şi a proprietăţii (d) cap. I § 4, încît ne mai rămîne pînă la urmă

$$\frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\eta} Q(y,\zeta)\, u(x,y,\zeta) \left[(\eta - y)^{-\frac{1}{2m}} \int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cdot \right. \tag{83}$$

$$\left. \cdot \cos \frac{(\xi - x)\tau}{(\eta - y)^{\frac{1}{m}}} d\tau \right] dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{\alpha(\eta,\xi)}^{\xi} P(0,z)\, v(\xi,\eta,\zeta;\, x,0,z)\, \varphi(x,z)\, dz$$

Dacă urmăm un raţionament analog ca în [4] *, întrucît în stabilirea relaţiei (83) am folosit numai proprietatea relativă la v de a fi soluţie a ecuaţiei $\xi(v) = 0$, atunci (83) rămîne adevărat dacă înlocuim pe v cu $\frac{\partial v}{\partial \eta}$

Condiţiile impuse funcţiei φ cît şi proprietatea menţionată a funcţiei v ne permite să derivăm în (83) în raport cu η, deci

$$\frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[Q(y,\zeta)\, u(x,y,\zeta)\, (\eta - y)^{-\frac{1}{2m}} \int_0^{\infty} \exp(-\tau^{2m}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos \frac{(\xi - x)\tau}{(\eta - y)^{\frac{1}{2m}}} d\tau \right]_{y=\eta} dx + \frac{1}{\mu(m)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\eta} Q(y,\zeta)\, u(x,y,\zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\eta - y)^{-\frac{1}{2m}} \cdot \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdot \int \exp(-\tau^{2m}) \cos \frac{(\xi - x)\tau}{(\eta - y)^{\frac{1}{2m}}} d\tau \right] dy \right\} dx = \tag{84}$$

$$= -\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0,\alpha)\, v(\xi,\eta,\zeta;\, x,0,\alpha)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{\alpha(\eta,\xi)}^{\xi} P(0,z) \frac{\partial v}{\partial \eta} \varphi(x,z)\, dz$$

* pag. 347.

Să ținem seamă acum că relația (83) este adevărată dacă înlocuim pe v cu $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ și să avem în vedere rezultatul obținut în (42) cap. II § 2; avem imediat

$$Q(\eta, \zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\partial \alpha(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{\infty} P(0, \alpha)\, v(\xi, \eta, \zeta; x, 0, \alpha) \cdot \varphi(x, \alpha)\, dx \qquad (85)$$

și cum am presupus $Q(\eta, \zeta)$ diferit de zero, urmează că (85) furnizează efectiv soluția $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ căutată. Faptul că (85) verifică ecuația (62) și îndeplinește condiția inițială impusă se face în mod analog ca în [4] *.

BIBLIOGRAFIE

[1] *I. M. Rîjic, I. S. Gradstein:* Tabela de integrale, sume, serii și produse. Ed. Tehnică 1955.

[2] *Marcel N. Roșculeț:* Algebre infinite, comutative, asociate la sisteme de ecuații cu derivate parțiale. Studii și Cercetări Matematice, Tom VII No. 3—4, anul 1956, pag. 321—371.

[3] *P. C. Rosembloom:* Linear equations of parabolic type with constant coefficients.

[4] *Marcel N. Roșculeț:* Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic I. Studiul unei clase de ecuații cu derivate parțiale de ordin doi. Studii și cercetări Matematice No. 2 Tom XI anul 1960, pag. 337—373.

К ИЗУЧЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ГОСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. III

Задача Коши для одного класса уравнений с гостными производными высшего порядка

Краткое содержание

Цель этой работы — решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \cdots\cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_p^{2m}} - Y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} - \cdots - Y_q \frac{\partial u}{\partial y_q} = 0$$

где

$$Y_k = Y_k(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_q)$$

и

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \cdots\cdots + \frac{\partial Y_q}{\partial y_q} = 0.$$

Для этого стерва решается задача Коши для уравнений

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^{2m}} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

* pag. 349.

о именно, когда ш нечетный решение данно (45), а когда ш четный то (54).

Решение задачи Коши для уравнения (70) с условием (71) дается (85) с основным решением ϑ, данным в (64).

CONTRIBUTIONS ON STUDY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

The Cauchy's problem in connection with a category of partial derivative equations of superior order.

(Summary)

The work works out the Cauchy's problem for the equation

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_p^{2m}} - \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} - \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} - \cdots - \gamma_q \frac{\partial u}{\partial y_q} = 0$$

where

$$\gamma_k = \gamma_k (y_1, y_2, \cdots, y_q)$$

and

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial \gamma_q}{\partial y_q} = 0$$

The first, the author, solves the Cauchy's problem for equation

$$\frac{\partial^{2m} u}{dx_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^{2m}} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

The formula (45) gives the solution for m-odd and (54) for m-even. The solution of Cauchy's problem for equation (70) on the condition (71) is given by (85) with the fundamental solution v given by (64).

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE

Le problème de Cauchy pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.

(Résumé)

L'objet de ce travail est la solution du problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_p^{2m}} - \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} - \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} - \cdots - \gamma_q \frac{\partial u}{\partial y_q} = 0$$

avec

$$\gamma_k = \gamma_k(y_1, y_2, \cdots, y_q)$$

et

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial \gamma_q}{\partial y_q} = 0$$

En ce but on résout le problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^{2m}} = \frac{\partial u}{dt}$$

Pour m impaire la solution est donnée par (45) et pour m paire par (54).

La solution de problème de Cauchy, pour l'équation (70) avec la liaison (71) est donnée par (85) avec la solution fondamentale v donnée par (64).

BEITRÄGE ZUM STUDIUM DER DIFFERENTIAL GLEICHUNGEN PARABOLISCHER ART. III.

Das Cauchy — Problem für eine Gleichungsklasse mit partiellen Ableitungen höher Ordnung.

(Zusammenfassung)

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Lösung des Cauchiy — Problems für die Gleichung:

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_p^{2m}} - \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} - \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} - \cdots - \gamma_q \frac{\partial u}{\partial y_q} = 0$$

mit

$$\gamma_k = \gamma_k(y_1, y_2, \cdots y_q)$$

und

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial \gamma_q}{\partial y_q} = 0$$

zu diesem Zwecke, löstman zuerst das Cauchy-Problem für die Gleichung

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_n^{2m}} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

und zwar, für m ungerad ist die Lösung gegeben durch (45) und für m gerade durch (54).

Die Lösung de Cauchy-Problems für die Gleichung (70) unter der Bedingung (71) ist durch (85) gegeben, mit der Grundlösung v gegeben durch (64).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola III

THE DESCRIPTIVE ASPECT OF LOBACEVSKI'S GEOMETRY ON THE INTERPRETATION OF POINCARE'S SPACE GEOMETRY[1]

by AURELIAN TĂNĂSESCU

Introduction.

Besides the Euklidean Geometry System there are many otherman contradictory systems, which reflect the spatial relations of the real world, as in the geometry of Euklide.

The first of these non-euklidean geometrical systems was created by N. I. Lobacevski in 1826, this descovery being one of the greatest arhievements of man's mind.

The knowledghe of Lobacevski's geometry constitues the first step in the study of the bases of geometry and has a fundamental significance for the understanding of the structure of the science of geometry as a whole.

In general, the study of Lobacevski's geometry presents itself with somme difficulties, rising on one hand from the fact of not noticing at once the pearticularity of the new geometry, while on the other hand, this geometry's positions are in direct contradiction with our common geometrical representations.

The examination of this geometry, as well as its profound study, is closely related in the first place to the knowledge of its main classical models and in the second place to the direct characteristics of its fundamental particularities, without ressorting to certain models.

In the present work, the basis is laid down for the study of the descriptive geometry of Lobacevski within the Euklidean space geometry on the model of space geometry created by Poincaré, together with means of Euklidean geometry, using the Monge's diorthogonal system of projection.

II. The descriptive representation of the fundamental elements. Point. Straight line. Plane.

We select the fundamental plane, as an horizontal plane of projection and as vertical plane a certain plane perpendicular to the fundamental plane.

---

[1] Report presented at the 6th scintifical sesssion of the professors of the Polytechnical Institute Bucharest. 17th December 1960.

We show in a descriptive form the „points" in the normal manner, excluding the null and negative quota points.

The straight lines may be represented descriptively by projecting the points, which help to define them.

A rabate on the fundamental plane in the normal sense of the vertical plane P of the straight line permits the determination of „centre" ω_{ab} of the line, defined by points A (a, a') and B (b, b') (Fig. 1).

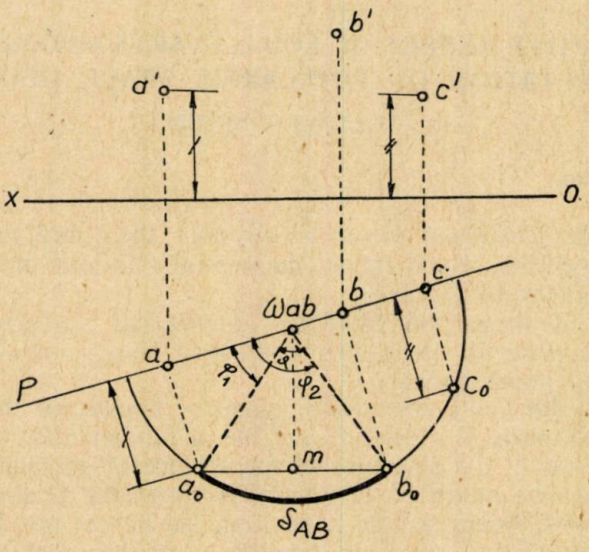


Fig. 1

The projections of a certain point C (c, c') of the straight line may immediately be determined and the „distance" δ_{AB} between points A and B is expressed by

$$\delta_{AB} = k \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \cdot \frac{\varphi_1}{2}}$$

where φ_1 and φ_2 have the normal meaning of the Euklidean angles, while k represents the constant arbitrary measure of the „unit".

The planes may be descriptively represented by the projections of the fundamental elements which define them.

Thus, let's consider „points" A (a, a'), B (b, b') and C (c, c'), as not situated on the same „straight line". (fig. 2). We may be able to determine the „centre" (Ω, Ω') of plane on draught, observing that horizontal projection Ω is the intersection of the perpendicular in the „centres" ω_{ab} and ω_{bc}, respectively on the horizontal traces P and Q of the „straight lines) hall planes defined by points A, B and C.

By finding the radius R in its real dimmension, as a distance from the „centre" of the plane to one of the given „points" (for example at A), we obtain the apparent outline of the plane defined by the respective given three „points" A, B, and C.

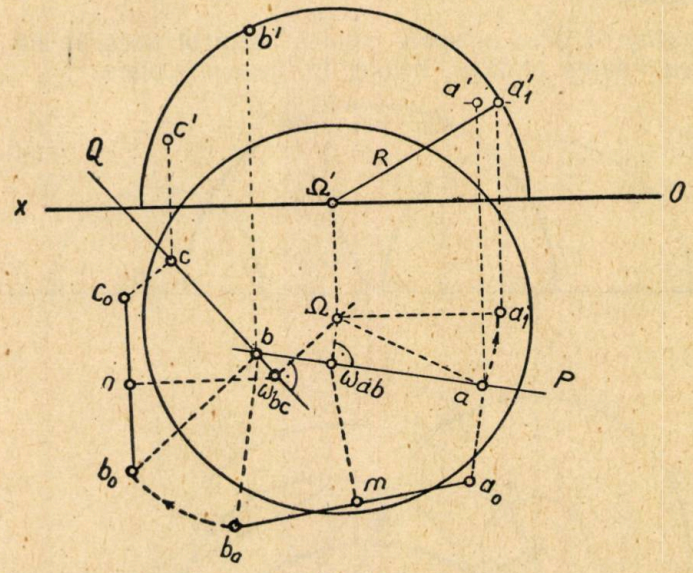


Fig. 2

III. **Application. Descriptive construction of plane which passes through a certain given point and is perpendicular to two given divergence planes.**

Let point M (m, m') and divergent planes of „centres" (Ω_1, Ω'_1) and (Ω_2, Ω'_2) defined by their apparent outlines. (fig. 3).

The straight line, which characterised the shortest distance between planes, is the common perpendicular line, drawn to the two divergent given planes.

We choose the divergent straigt line of the divergent given planes, which are situated on the vertical plane with horizontal trace $\Omega_1\ \Omega_2$.

We draw in rabating on fundamental planes of this common perpendicular vertical plane $s\ a_0\ r$ of „centre" q of selected divergent straight lines. The horizontal projection q may be determined as foot perpendicular line, drawn to $\Omega_1\ \Omega_2$ from the middle t of common tangents $t_1\ t_2$ of the two given divergent straight lines. Segments $qs = qr$ define the common perpendicular, which together with „point" M (m, m') form the plane with „centre" (Ω, Ω') sought.

Its apparent outlines may be easily determined, using an arbitrary „point" A (a, a') of the common perpendicular line sa_0r.

IV. **Descriptive representation of the equidistant surfaces of the spheres and orispheres.**

Beams of elliptical straight lines hyperbolic and parabolic.

Generalities.

The totality of lines in space form a beam of lines, if any two lines of this given totality of lines, belong to the same plane.

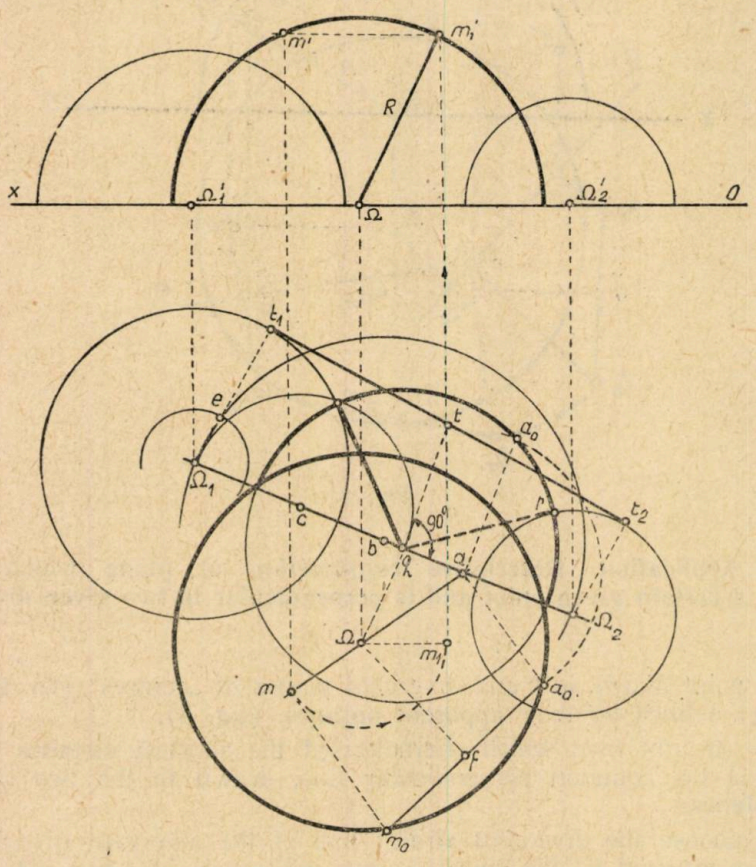


Fig. 3

We differentiated beams of elliptical hyperbolic and parabolic lines.

The beam of elliptical lines are formed by lineswhich pass through a single point. The elliptical line beam has its own centre.

The hyperbolic line beam is formed by the totality of perpendicular lines to the plane. The hyperbolic line beam has an ideal centre.

The parabolic line beam is formed by the totality of lines which have the peculiarity that two lines of this totality of lines to be parallel in the same direction.

The parabolic line beam has an improper or infinite centre.

The beam of lines is determined univocally by two of its lines, but through any point in space passes solely one line of the beam, only if this point coincides with the centre of the beam.

If, through a certain point of a beam line, equally inclined secants on a given line, as well as on any other line of beam are drown, points

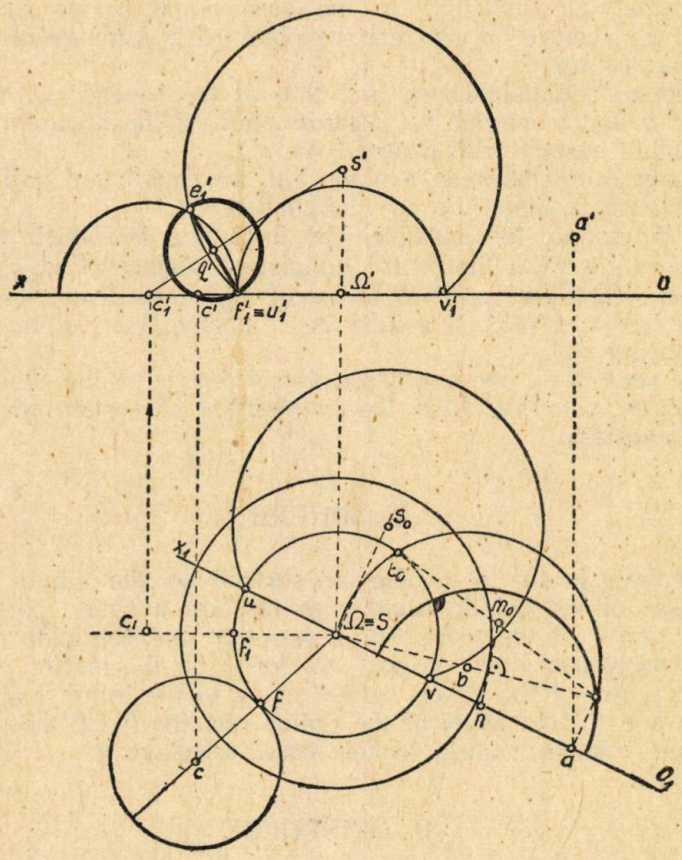


Fig. 4

of intersection between the secants and beam line are obtained, which generate a surface, whose characteristics depend on type of the beam.

Thus, we differentiate spheres, orispheres and equidistant surfaces. These surfaces are often named spheres with respective proper, unproper, to infinit, or ideal centres.

They are perpendicular to all the beam lines, which generate the respective sphere surface.

1. EQUIDISTANT SURFACE

The equidistant surface is the geometric location of points, equally distant to the base plane. All the lines of hyperbolic beam are perpendicular to the base plane of the equidistant surface.

We select as base plane of equidistant surface the plane defined by its „centre" (Ω, Ω') and its apparent outlines (Fig. 4).

The „line" perpendicular to the base plane drawn through point A (a, a') has „centre" n and can be obtained byachange of the vertical plane of projection.

The centre equidistance s_0, and that of the base drawn through the limit point u and v, permit the determination of the apparent outlines of the equidistant surface with centre S (s, s').

The intersection between a plane and an equidistant surface may be an equidistance, a limit line or a circumference.

Let's determine, for example, the limit line by which the „centre" (C, C') plane intersects the centre equidistant surface (Fig. 4). We rotate the „centre" (C, C') in position (C_1, C_1') and draw from $f'_1 \equiv u'_1$ a perpendicular line to $C'_1 S'$. It results the diameter $f'_1 e'_1$ of the limite line, its centre being q'.

In the same way, one can descriptively determine the equidistances of circumferences, resulting from the intersection of certain plane with an equidistant surface.

2. SPHERE

The sphere is the perpendicular surface on the elliptic line beam. All the lines of the elliptic beam pass through a single point, which is the proper centre of the spere. The descriptive representation of these elements is easely made and we will not insist on the matter.

If the centre of the sphere moves away to the infinite, allong one of the radius and the extremity of the radius remains fixed, the sphere occupies a limit position named, in this case, orisphere.

3. ORISPHERE

The orisphere is the surface wich represents the greatest interest in the study of Lobacevski's geometry.

The orisphere on the limit surface, is the surface which intersects the orthogonal parabolic beam lines.

The parabolic beam lines which have generated the orisphere form the axis of the orisphere, but an axis and a point determine univocally the orisphere.

If a „line" is not the axis of an orispere and has a common point wiht the orisphere, then it has with the orisphere also a second common point, or is tangent to the orisphere.

Let us consider the „line" defined by „points" $A\ (a, a')$ and $B\ (b, b')$, which we select as axis of an orisphere, that we want descriptively to determine, and the point $M\ (m, m')$ (Fig. 5).

These elements determine univocally the orisphere.

We obtain the „centre" ω_{ab} of the „line" $A\ B$ and together with it the tangent point (t, t') of the sought orisphere to the fundamental planes.

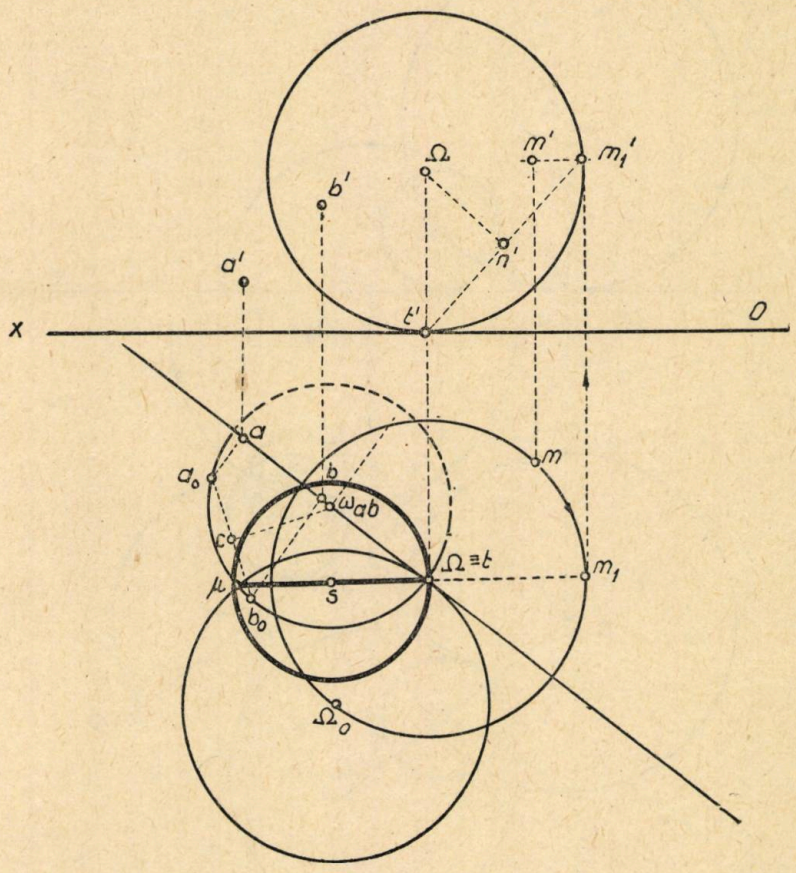


Fig. 5

A level rotation of point $M\ (m, m')$ permits the complete determination of orisphere by its „centre".

A plane which does not pass through axis of orisphere may intersect it after a circumference, or may be tangent to the orisphere and then is perpendicular to the axis of orisphere, which passes through the tangent point, or may not intersect it.

If the „plane" passes through the axis of orisphere, this intersection produces an oricycle.

Thus, the characteristic elements of an orisphere are: the points, oricycles and circumferences.

Let's determine descriptively the oricycle by which the „centre" ω_{ab} plane drawn through the axis $A\ B$ intersects the orisphere formerly determined (Fig. 5).

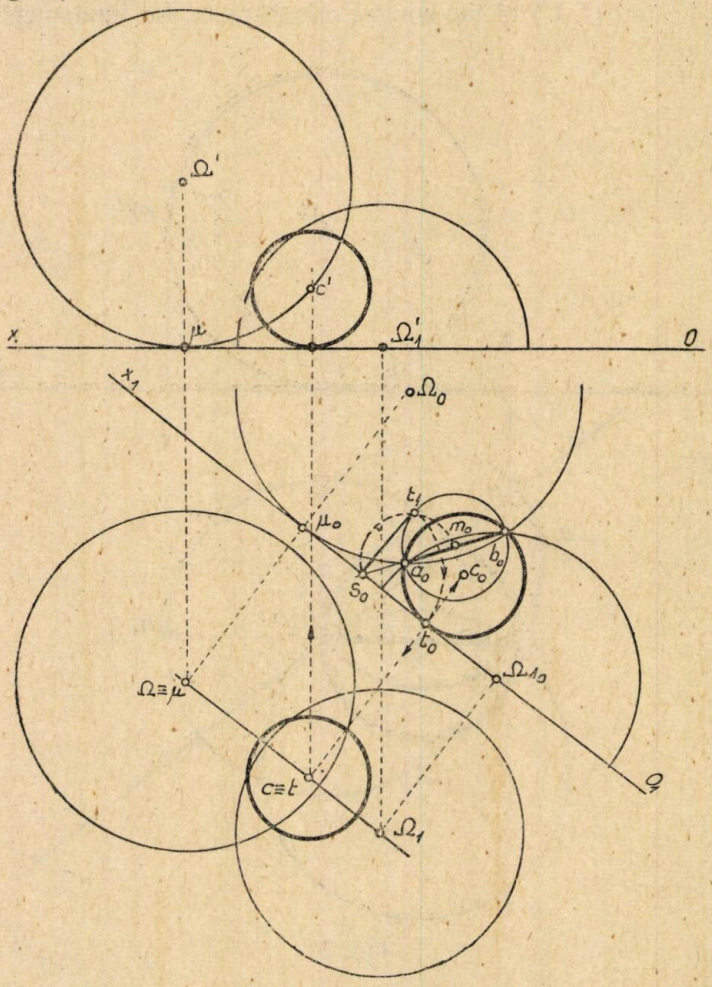


Fig. 6

Changing the vertical plane projection we immediately obtain the diameter u t of the centre oricycle sought.

The orisphere „points" are the same usual points and their descriptive representation doesn't present any difficulty.

To determine descriptively the circumferences we may likewise proceed, as in the case of the determination of oricycles, as we schall show in what is to follow.

5. THE DESCRIPTIVE CONSTRUCTION OF AN ORISPHERE WHICH PASSES THROUGH A CERTAIN CIRCUMFERENCE OF A GIVEN ORISPHERE

Let be the orisphere with centre (Ω, Ω') and the „plane" with centre (Ω_1, Ω'_1), which intersects it by the diameter a_0 b_0 circumference with centre m_0 (Fig. 6).

The determination of this circumference may be immediately obtained by a change of the vertical plane of projection.

To find the centre (C, C') of sought orisphere we have to determine first the centre c_0 of oricycle, which passes through point a_0 and b_0 and is tangent in t_0 to axis $o_1 x_1$. We observe that $s_0t_0 = s_0t_1$. It results $c \equiv t$ and then c', where $c' t' = c_0t_0$.

6. THE DESCRIPTIVE REALISATION OF EUKLIDEAN PLANE GEOMETRY ON ORISPHERE

The Euklidean geometry may be realised in the system points and oricycles, of a given orisphere.

The orisphere with its points, its oricycles and circumferences may be takenas an Euklidean plane, with its points, lines and circumferences.

This fact established by Lobacevski has a first order of importance.

Owing to this general idea, it was possible to throw a bridge over the apparent abyss, which separates the Euklidean geometrical system from the Lobacevski's geometrical system.

Any theorem in Lobaveskiski's geometry regarding points, oricycles and circumferences, belonging to an orisphere, constitutes in the same time a theorem of Euklidean geometry on a plane and reciprocally.

Because we have the possibility to descriptively represent the orisphere and as we can also descriptively determine the points, oricycles and circumferences, the problem of the descriptive interpretation of the theoremes in Lobacevski's geometry regarding the points, oricycles and circumferences belonging to a given orispere, is fully realised.

The polytechnical Institute of Bucharest
Descriptive Geometry Chair

REFERENCES

1. *B. V. Kutusov :* Geometry and basic elements of the geometry. Technical Publishing, 1952.
2. *N. V. Efimov :* The superior geometry. Technical Publishing, 1952.
3. *N. Mihăileanu :* Noneuklidean geometry. Technical Publishing of the Academy R.P.R., 1954.

4. *D. D. Morduhai - Boltosckoi :* Nacertatelnaia Gheometria v prost ranstve Lobacevskógo Moskva, 1955.
5. *D. A. Skopeț :* Osnovî Nacertatelnoi Gheometrii prost ranstva Lobacevskogo, Moskva, 1955.

НАЧЕРТАТЕЛЬНЫЙ АСПЕКТ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПОАНКАРЕ

(Резюме)

В настоящей работе положены основы начертательного исследования геометрии Лобачевского в эвклидовом пространстве по пространственной модели, осуществленной Поанкаре и при средствах эвклидовой геометрии, используя двуортогональную систему проекции Монжа.

Приводятся начертательные изображения основных элементов, а также и начертательные изображения равноотстоящих площадей, сфер, орисфер с приложением к начертательному определению предельной прямой, орицикла или орисферы проведенных через окружность другой данной орисферы.

THE DESCRIPTIVE ASPECT OF LOBACEVSKI'S GEOMETRY ON THE INTERPRETATION OF POINCARE'S SPACE GEOMETRY

(Summary)

In this work the basis is laid down the study of the descriptive geometry of Lobacevski, within the euklidean space geometry on the model of the space geometry realised by Poincaré, together with the means of euklidean geometry, using diorthogonal system of projection Monge.

The descriptive representation of the fundamental elements are given, as well as the descriptive representation of the equidistant surfaces, spheres and orispheres, with the application to the descriptive de termination of the limit line of an oricycle or of an orisphere, drawn throught a circumference of an other given orisphere.

L'ASPECT DESCRIPTIF DE LA GÉOMÉTRIE DE LOBACEVSKI SUR LE MODÈLE DE POINCARÉ

(Résumé)

Dans cet ouvrage est étudié l'aspect descriptif de la géometrie de Lobacevski sur le modèle de Poincaré en utilisand le systhème de projection de Monge.

Y sont répresentées descriptifs les éléments fondamentals, les surfaces équidistantes, les sphères et les orisphères avec application à la détermination descriptive d'une ligne limite, d'un oricycle ou d'une orisphère menée par un circonférence d'une orisphère donnée.

DER DARSTELLENDE CHARAKTER DER LOBATSCHEFSKIJSCHEN GEOMETRIE IN DER DEUTUNG DES RAUMES POINCARÉ

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit werden die Grundlagen des darstellenden Studiums der L — geometrie im euklidischen Raume nach dem Modell des Raumes, der von Poincaré realisiert wurde, gegeben.

Dabei finden die euklidische Geometrie so wie die biorthogonale Projektionsmethode von Monge Anwendung.

Es werden die Darstellung der Grundelemente gegeben, so wie die Darstellungen der Flächen gleicher Entfernung, der Kugeln und der Orikugeln mit Anwendung auf die darstellende Bestimung der Grenzgeraden, des Orizykels der einer Orikugel, welche durch einen Kreis einer anderen orikugel gelegt wird.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

REPREZENTĂRI AXONOMETRICE DUPĂ EPURA MONGE SIMPLIFICATĂ

I. ENACHE

În lucrarea „Epura Monge simplificată" prezentată de prof. M. Botez la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, din octombrie 1959, se dau noțiunile de bază și se rezolvă diferite probleme din Geometria descriptivă, folosind reprezentarea elementelor din spațiu pe un singur plan de proiecție.

În lucrarea de față se arată metodele cu ajutorul cărora se poate construi reprezentarea axometrică a elementelor astfel reprezentate.

Așa de exemplu, în epura Monge simplificată, o dreaptă poate fi complet determinată și în mod unic, prin urma sa orizontală și prin punctul de intersecție între dreaptă și planul bisector al diedrului întîi B_1 (fig. 1).

Punctul pentru a putea fi reprezentat trebuie întotdeauna asociat unei drepte (punctul N fig. 1).

Planul este reprezentat prin urma sa orizontală PPx și prin dreapta de intersecție PxP^β între plan și planul bisector B_1, pe care o denumim urma planului pe planul bisector (fig. 2).

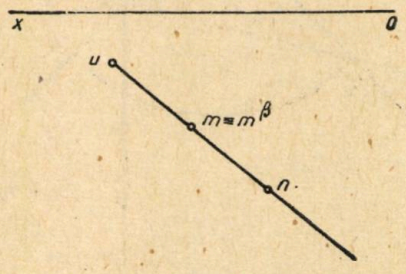


Fig. 1

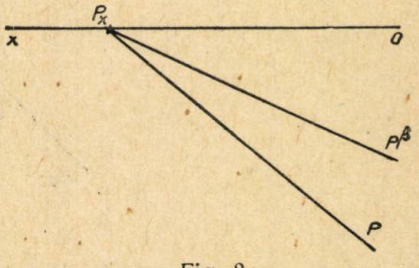


Fig. 2

Pentru a construi reprezentarea axonometrică în sistemul axonometriei ortogonale, considerăm planul orizontal de proiecție XOY și planul axonometric P, reprezentat prin urma sa orizontală PPx și urma PxP^β (fig. 3).

Proiectăm ortogonal sistemul XOY pe planul P, și apoi rabatem planul P în jurul urmei orizontale PPx.

Pentru a putea efectua rabatarea planului axonometric P, împreună cu sistemul de axe tridreptunghic $OXYZ$, proiectat pe acest plan, ne servim de punctul M (m, m^{β}) situat pe dreapta de intersecție a planului cu

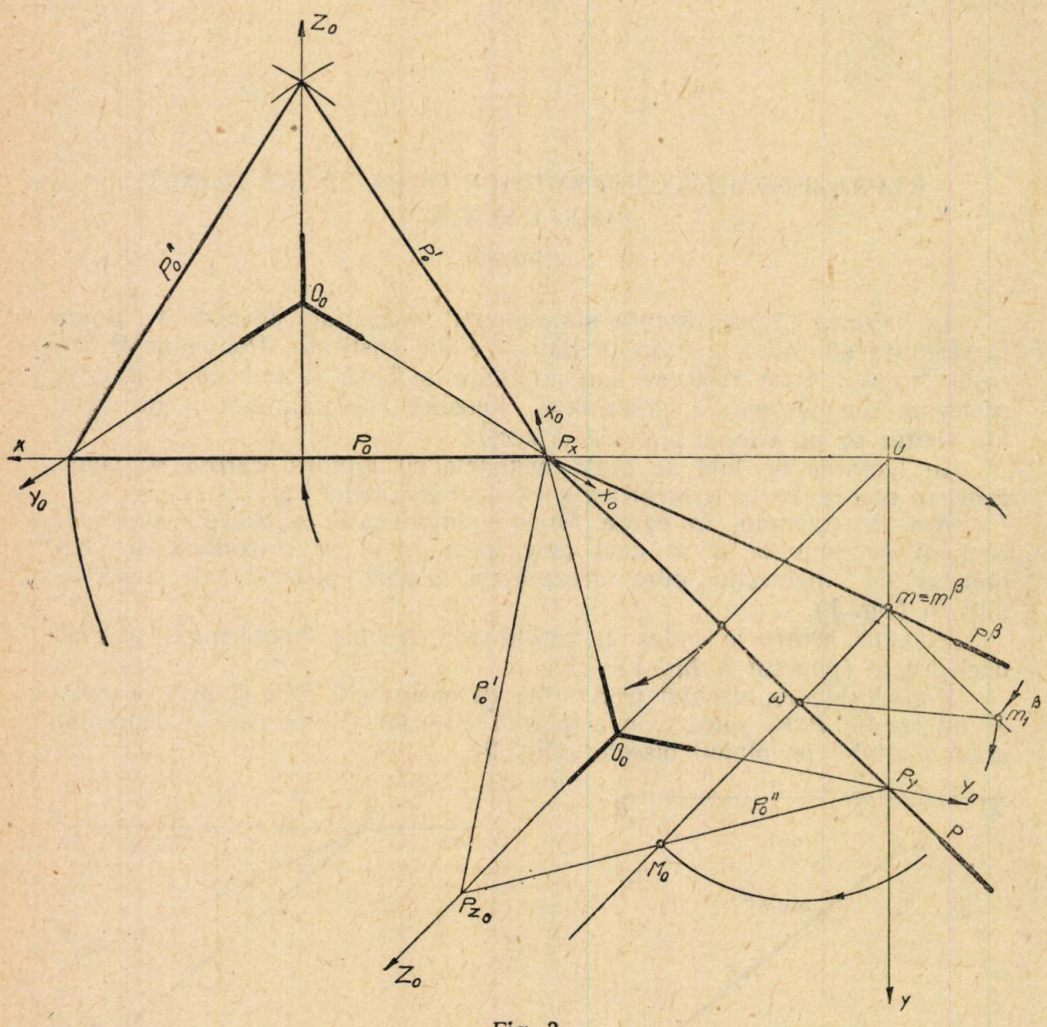


Fig. 3

planul bisector, (urma $P_{\beta}Px$) și în același timp fiind situat și pe urma laterală a planului axonometric.

Rabaterea se face în mod obișnuit ducînd din proiecția orizontală (m) a punctului, perpendiculara și paralela la urma orizontală a planului care devine axă de rabatere; pe paralelă se poartă cota punctului M, care este egală cu depărtarea, iar prin unirea acestui punct cu centrul de rabatere (ω) găsim raza de rabatere cu ajutorul căruia obținem poziția M_0 a punctului M rabătut.

Urma laterală a planului axonometric rabătut va trece prin punctul Py și prin punctul M_0. Punctul Pz, de intersecție dintre planul axonometric și axa OZ, se va găsi la intersecția perpendicularei coborîte din punctul O (care reperzintă și proiecția orizontală a punctului Pz), pe axa de rabatere, cu urma laterală a planului axonometric rabătut.

În sistemul reprezentărilor axonometrice ortogonale, proiecția ortogonală a originii O, se află la intersecția înălțimilor coborîte din vîrfurile Px, Py și Pz pe laturile opuse ale triunghiului format de urmele planului axonometric cu planele de proiecție.

Dacă și în cazul de față, ducem din punctele Px și Py perpendicularele pe urma $PyPz$ respectiv $PxPz$, determinăm proiecția axonometrică dreaptă (ortogonală) O_0 a originii O pe planul axonometric P.

În felul acesta se obține proiecția ortogonală a sistemului $OXYZ$ pe planul axonometric P, în poziție rabătută.

După ce s-a efectuat această operație, planul P împreună cu proiecția ortogonală a sistemului de axe $OXYZ$, se rotește pînă cînd axa OZ capătă poziție mai convenabilă, de verticală, urma orizontală P în acest caz suprapunîndu-se cu axa OX. (fig. 3).

Pentru a putea efectua reprezentarea axonometrică a diferitelor elemente din spațiu, este necesar a se efectua reprezentarea axonometrică a unor puncte caracteristicie ale acestor elemente. Așa de exemplu, pentru a efectua reprezentarea axonometrică a unei drepte, este necesar să executăm reprezentarea axonometrică a urmei orizontale a dreptei și a punctului de intersecție dintre dreaptă și planul bisector.

Reprezentarea axonometrică a acestor puncte se găsesc la intersecția cu planul axonometric, a perpendicularelor duse din aceste puncte față de planul axonometric P.

Fie de ex. dreapta D (d) fig. 4 avînd urma orizontală U (u) și punctul M (m, m^β) de intersecție între dreaptă și planul bisector.

Se efectuiază rabaterea planului axonometric împreună cu proiecția ortogonală a sistemului de axe tridreptunghic $OXYZ$, după metoda arătată mai înainte.

Pentru a obține proiecția axonometrică ortogonală a dreptei D, se proiectează pe planul axonometric punctele U și M.

Proiecția ortogonală a punctului M pe planul P se va găsi la intersecția perpendicularei dusă din punct pe planul P.

Pentru aceasta se duce prin punctul M planul Q proiectant pe planul orizontal și care se intersectează cu planul P după dreapta de cea mai mare pantă V'_0W_v, pe care se va găsi proiecția ortogonală a punctului M.

Se consideră că se rabate planul Q în jurul urmei orizontale pînă se așterne pe planul orizontal împreună cu punctul M (punctul m^β_1) și cu dreapta de intersecție.

Din punctul m^β_1 se duce perpendiculara pe dreapta $\omega_v V'_0$ și se obține punctul M'_0 ce reprezintă proiecția ortogonală a punctului M pe planul P.

Se readuce apoi punctul M'_0 în poziția rabătută M_0, iar apoi în poziția finală.

Pentru punctul U se procedează în mod analog, sau se poate determina poziția rabătută U_0 cu ajutorul afinității.

În felul acesta se obține proiecția axonometrică ortogonală D_0 a dreptei D (d).

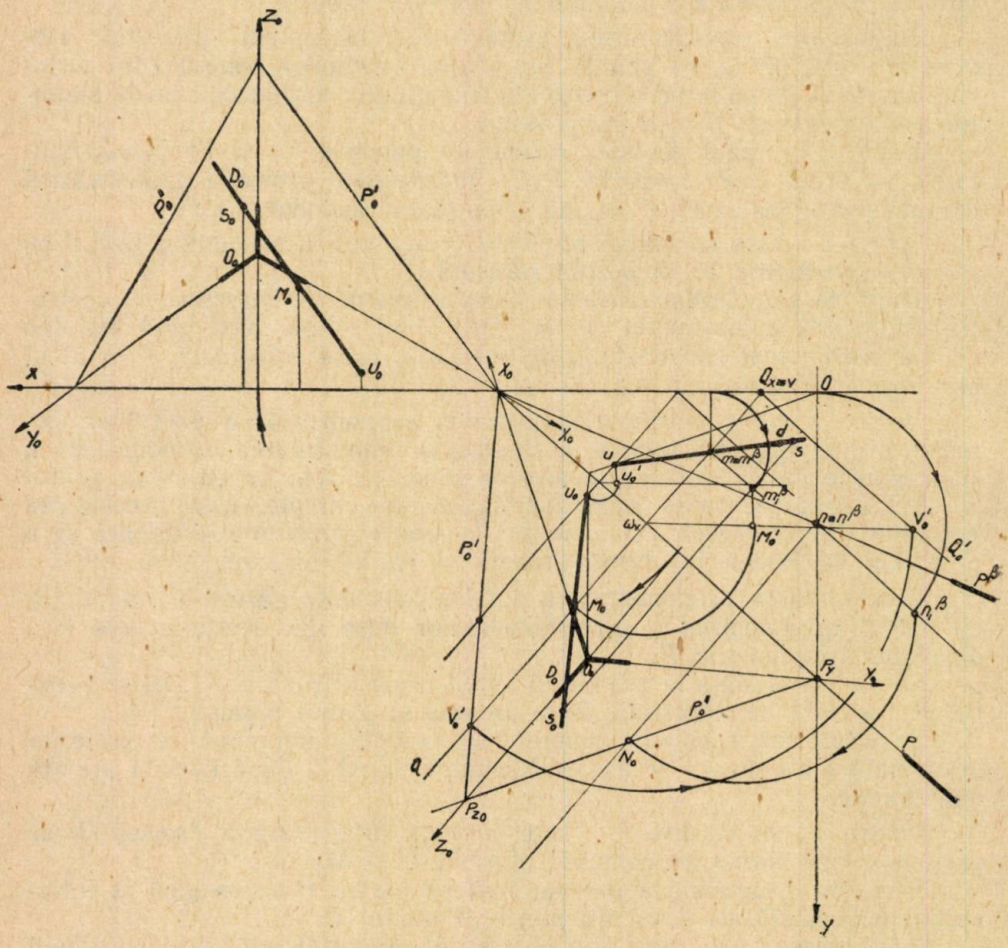


Fig. 4

Orice punct de pe dreaptă de ex. punctul S (s) are corespondentul său S_0 pe dreapta D_0.

În fig. 5 s-a efectuat o aplicație a metodei arătate utilizînd prisma triunghiulară dreaptă ABC.

Se rabate planul axonometric P, împreună cu triedrul de axe tridreptunghic $OYXZ$, și apoi prin metoda arătată anterior se construiește proiecția axonometrică $A_0B_0C_0$ a prismei care se aduce apoi în poziție convenabilă de verticală.

În cazul cînd planul axonometric P face unghiuri egale cu planele de proiecție, se obține o reprezentare axonometrică izometrică.

În cazul nostru, dacă urma orizontală P a planului face cu axele OX,

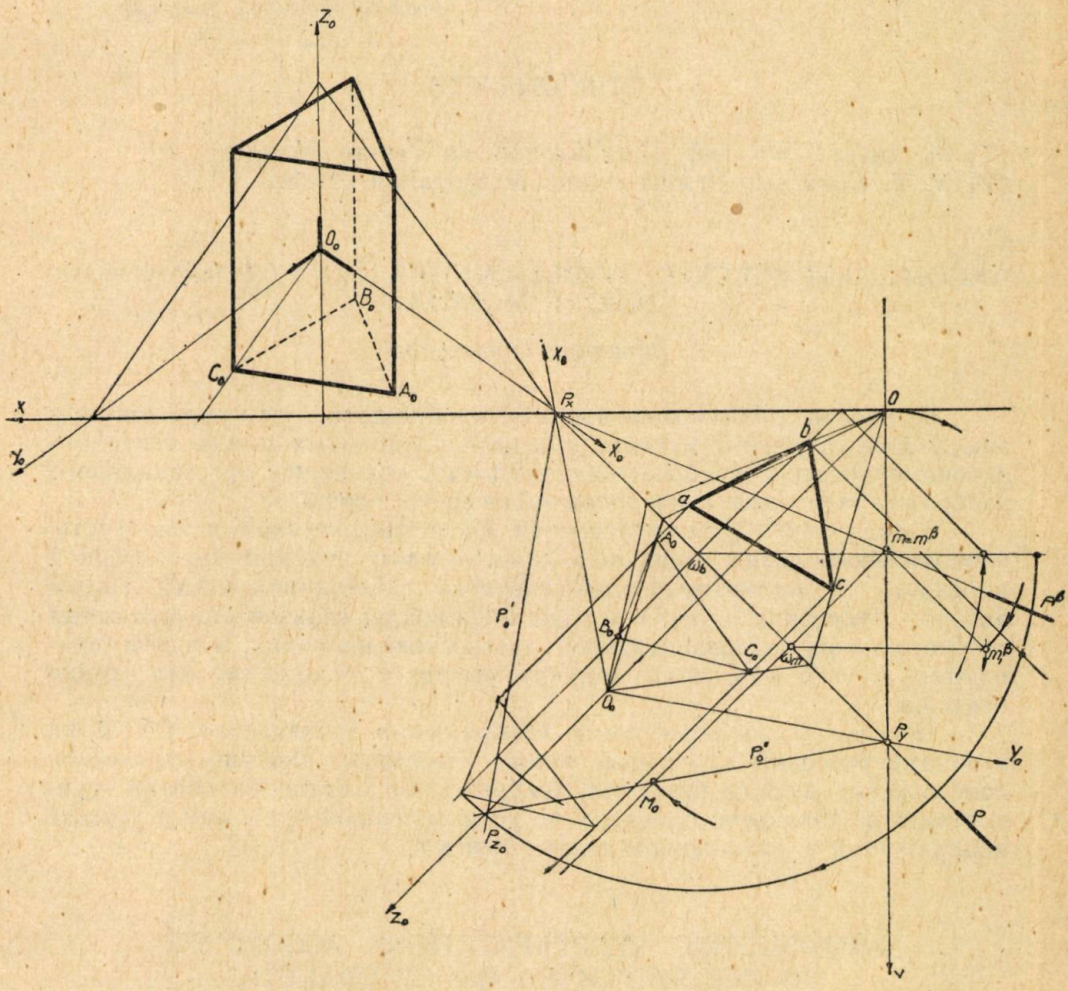


Fig. 5

și OY unghiuri egale de 45°, iar urma PxP_β este mediana unghiului $PPxO$, atunci proiecția axonometrică obținută va fi izometrică.

În cazul cînd unghiul $PPxO$ este de 30°, iar urma PxP_β este mediana acestui unghi se obține o reprezentare axonometrică dimetrică.

Pentru celelalte poziții ale planului P se obțin reprezentări axonometrice anizometrice.

Metoda reprezentării axonometrice utilizînd epura Monge simplificată are avantajul că ne dă aceeași imagine, în schimb construcțiile sînt mult mai simple, utilizîndu-se ca bază de plecare o singură proiecție.

Catedra de Geometrie descriptivă și desen
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *M. Botez:* Sur une simplification de l'epure Monge.
[2] *N. T. Ciuvikov:* Preobazovanie ortogonalnih proekți.

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО УПРОЩЕННОМУ ЭПЮРЕ МОЖНА

(Краткое изложение)

В работе „Аксонометрические изображения по упрощенному эпюру Монжа", даны методы, при помощи которых можно построить аксонометрическое изображение предмета, исходя из ортогонального изображения предмета на одной полоскости проекции·

В виду этого рассматривается аксонометрическая и плоскость, изображённая своим горизонтальным следом иследом биссекторной плоскости B_1, на которой проектируется трёхгранник OXYZ. Потом аксонометрическая плоскость вращается вокруг горизонтального следа до совмещения с горизонтальной плоскостью проекции, а затем вращается до тех пор, пока получит выгодное положение для чтения чертежа.

Используя закономерности изображения трёхграрика OXYZ на аксонометрической плоскости, можно построить аксонометрическое изображение любого предмета, изображённого ортогонально на горизонтальной плоскости проекции по установленным правилам в рамках изображений в упрощённом эпюре Монжа.

AXONOMETRIC REPRESENTATIONS ACCORDING TO THE SIMPLIFIED MONGE DRAUGHT

(Sumary)

In the paper „Axonometric representations according tot the simplified Monge dragught" are given the methods by whrich the axonemetric represcenttion of an object may be built, starting from the richtangle representation of the object in a single pojection plan.

To this end an axonometric plan is considered, represented by ist horizontal trace, and the trace on its P_1 bisector plan, on which the

trihedral OXYZ is projected. The axonometric plan is then flanged on the projection horizontal line and it is rotated until it reaches a suitable position for reading the drawing.

By using the rules of representation of the OXYZ trihedral on the axonometric plan, we may build the axonometric representation of any object represented ortogonally on the horizontal projection plan according to the rules established for the representations in the simplified Monge draught.

REPRÉSENTATIONS AXONOMÉTRIQUE D'APRÉS L'ÉPRE MONGE SIMPLIFIÉE

(Résumé)

Dans l'ouvrage „Représentations axonometrique d'aprés l'epure Monge simplifiée", on donne des methodes à l'aide desquelles on peut construire la représentation axonometrique d'un objet, á partir de la représentation orthogonale de l'objet sur un seul plan de projection.

Ainsi, on considère un plan axonometrique représenté par sa trace horizontale et la trace sur le plan bisecteur B_1, sur lequel l'on projette d'un fason orthogonale le triedre trirectangle OXYZ. On rabat ensuite le plan axonométrique sur le plan horizontale de projection et on le retourne jusqu'á ce qui obtienne une position convenable à la lecture du dessin.

En utilisant les régles de représentation du triedre OXYZ sur la plan axonometrique, on construire la representation axonométrique de n'importe quel objet représente orthogonale sur le plan horizontal de projection cela va s'effectuer conformiment aux règles etablies au cadre des representations dans l'épure Monge simplifiée.

AXONOMETRISCHE DARSTELLUNG NACH DER VEREINFACHEN EPURE VON MONGE

(Zusammenfassung)

In der Arbeit „Axonometrische Darstellungen nach der vereinfachen Epure von Monge", werden die Methoden aufgeführt mit daren Hiefe die axonometrische Darstellung eines Gegenstandes ausgeführt werden Kann, ausgehand von der ortogonalen Darstellung des Gegenstandes auf einer einzigen Projektionsebene.

Zu diesem zweck dient eine axonometrische Ebene dargestellt durck ihre horizontale Spur und die Spur auf der bisektor-Ebene B_1 auf welche das Dreimalrechtwinkliger Dreiflächner OXYZ ortogonal projektiert wird. Darauf wird die axonometrische Ebene auf den horizontalen Projectionplan ungelegt und gedreht, bis sie eine entsprechende Stellung zur Lesung der Zeichnung einnimmt.

urch Verwendung der Darstellungs regeln des Dreimalrechtwinkliger OXYZ auf der axonometrischen Ebene, Kann die axonometrische Dastellung jeglichen Gegenstandes der auf der horizontalen Ebene ortogonal dargestellt Vereinfachen Epure von Monge festgestellten Regeln ausgeführst werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

ELEMENTE DE BALISTICĂ PENTRU RACHETE CU RAZĂ MARE DE ACȚIUNE

AL. STOENESCU, D. BOIANGIU, V. CEAUȘU

În epoca actuală interesul tehnic și științific pentru studiul mișcării rachetelor purtătoare de sateliți artificiali și de planete artificiale precum și a rachetelor balistice intercontinentale devine tot mai mare în acest domeniu. Astfel, în ultimul timp, rachetele balistice sovietice experimentate la 20 și 31 ianuarie 1960 au avut o bătaie, măsurată pe suprafața Pământului, de 12.500 km.

Desigur că în asemenea cazuri mișcarea rachetei balistice nu mai poate fi studiată în cadrul balisticii obișnuite care neglijează curbura Pământului și consideră cîmpul gravitațional constant.

În lucrarea de față vom căuta să obținem cîteva date ale mișcării rachetelor fără a mai face aproximațiile mai sus menționate.

Problema revine la a studia mișcarea unui punct material M, de masă m, atras de centrul atractiv fix O cu forța newtoniană $F = \frac{Km}{\overline{OM}^2}$ ($K = fm_0$; f fiind coeficientul atracției universale, m_0 masa din centrul atractiv O). În momentul inițial punctul material se află în A ($OA = r_0$) și are viteza v_0 dată, care face unghiul α cu direcția OA.

Se știe că în acest caz traiectoria descrisă de punctul M este o conică, a cărei ecuație în coordonate polare r, este:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \tag{1}$$

în care p, e și θ_0 sînt niște constante care se determină în funcție de condițiile r_0, v_0, α:

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{K} \tag{2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{K^2}\left(v_0^2 - \frac{2K}{r^0}\right)} \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\theta^0 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\frac{K}{r_0 v_0^2 \sin^2\alpha} - 1} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\frac{r_0}{p} - 1} = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{\frac{K}{r_0} - v_0^2\sin^2\alpha}$$

Pentru :

$$v_0^2 < \frac{2K}{r_0}\ ;\ e < 1$$ traiectoria este o elipsă

Pentru :

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0}\ ;\ e = 1$$ traiectoria este o parabolă

Pentru :

$$v_0^2 > \frac{2K}{r_0}\ ;\ e > 1$$ traiectoria este o hiperbolă

S-au studiat următoarele probleme :
A. Lansări cu viteză constantă.
B. Lansări de direcție constantă.
C. Lansări cu orice viteză și direcție prin care se atinge o țintă dată.

A. LANSĂRI CU VITEZĂ CONSTANTĂ

1. **Determinarea unghiului de tragere pentru a atinge o țintă dată. T (v, θ) pentru un v dat.**

Ecuația (1) se mai scrie :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta_0\cos\theta + e\sin\theta_0\sin\theta} \tag{5}$$

iar dacă ținem seama că :

$$\sin\theta_0 = -\frac{1}{e}\frac{p}{r_0}\operatorname{ctg}\alpha \tag{6}$$

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_0} - 1\right) \tag{7}$$

relația (5) devine :

$$r = \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)\cos\theta - \frac{p}{r_0}\operatorname{ctg}\alpha\sin\theta} \tag{8}$$

Pentru ca traiectoria să treacă prin punctul $T(r_1\ \theta_1)$ trebuie ca coordonatele r_1 și θ_1 ale punctului T să verifice relația (8), adică :

$$r_1 = \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)\cos\theta_1 - \frac{p}{r_0}\operatorname{ctg}\alpha\sin\theta_1} \tag{9}$$

Înlocuind pe p cu valoarea lui din (2) :

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{K} = \frac{r_0^2 v_0^2}{K}\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \tag{10}$$

și ordonînd după puterile lui tg α obținem:

$$\operatorname{tg}^2\alpha\,[Kr_1(1-\cos\theta_1)+r_0r_1\cos\theta_1-r_0^2v_0^2]-$$
$$-\operatorname{tg}\alpha\,[r_0r_1v_0^2\sin\theta_1]+Kr_1(1-\cos\theta_1)=0$$

Relația (11) reprezintă ecuația de gradul II în tg α.

Se obțin două soluții α_1 și α_2 care satisfac condițiile impuse. O țintă dată poate fi atinsă, în general, lansînd mobilul cu viteza v_0 sub două unghiuri.

Pentru ca problema să fie posibilă, adică tg α să fie real, trebuie ca realizantul ecuației (11) să fie pozitiv, deci:

$$[r_0r_1v_0^2\sin\theta_1]^2-4Kr_1(1-\cos\theta_1)[Kr_1(1-\cos\theta_1)+$$
$$+r_0r_1v_0^2\cos\theta_1r_0^2v_0^2]\geqslant 0$$

care se mai poate pune sub forma:

$$r_0r_1\left(v_0^2-\frac{2K}{r_0}\right)+\frac{\dfrac{4Kr_0^2v_0^2}{2K+r_0v_0^2}}{1-\dfrac{2K-r_0v_0^2}{2K+r_0v_0^2}\cos\theta_1}\geqslant 0 \qquad (12)$$

Se observă că pentru $v_0^2\geqslant\dfrac{2K}{r_0}$ inegalitatea (12) este satisfăcută, oarecare ar fi r_1 și θ_1.

Pentru $v_0^2<\dfrac{2K}{r_0}$ inegalitatea (12) devine:

$$r_1\leqslant\frac{\dfrac{4Kr_0^2v_0^2}{4K^2-r_0^2v_0^4}}{1-\dfrac{2K-r_0v_0^2}{2K+r_0v_0^2}\cos\theta_1}$$

Această inegalitate arată că lansînd un mobil cu viteza $v_0\left(v_0^2<\dfrac{2K}{r_0}\right)$ în toate direcțiile α posibile, vor fi atinse numai punctele din interiorul și de pe curba:

$$r_1=\frac{\dfrac{4K^2-r_0^2v_0^4}{4Kr_0^2v_0^2}}{1-\dfrac{4Kr_0v_0^2}{2K+r_0v_0^2}\cos\theta_1} \qquad (14)$$

Curba dată de relația (14) este o elipsă

Vom denumi această curbă *elipsă de siguranţă* prin analogie cu parabola de siguranţă corespunzătoare unui cîmp gravitaţional constant.

Pentru punctele d pe elipsa de siguranţă ecuaţia (11) dă soluţii confundate pentru $tg\,\alpha$ deoarece realizantul este nul.

Dacă notăm: $p_1 = \dfrac{4K r_0^2 v^2}{4K^2 - r_0^2 v_0^4}$ (15)

$$e_1 = \frac{2K - r_0 v_\theta^2}{2K - r_0 v_0^2} \tag{16}$$

ecuaţia elipsei de siguranţă devine: $r_1 = \dfrac{p_1}{1 - e_1 \cos\theta_1}$.

Se observă că elipsa admite direcţia OA ca axă longitudinală de simetrie.

Mărimile semiaxelor sînt: $a_1 = \dfrac{p_1}{1 - e_1^2} = \dfrac{2K r_0}{2K - r_0 v_0^2} - \dfrac{r_0}{2}$ (18)

$$b_1 = \frac{p_1}{\sqrt{1 - e_1^2}} = \frac{r_0 v_0 \sqrt{2K r_0}}{2K - r_0 v_0^2} \tag{19}$$

şi distanţa între cele două focare:

$$2c_1 = 2\frac{p_1 e_1}{1 - e_1^2} = r_0 = OA \tag{20}$$

Elipsa de siguranţă are deci cele două focare: unul în centrul atractiv O şi celălalt în punctul de lansare A.

Ecuaţia curbei de siguranţă se poate afla şi căutînd înfăşurătoarea familiei de traiectorii $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ obţinute pentru v_0 constant $\left(v_0^2 < \dfrac{2K}{r_0}\right)$ şi α variabil.

Ecuaţia înfăşurătoarei se află eliminînd parametrul α din sistemul

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \tag{21}$$

$$\frac{dr}{d\alpha} = 0 \tag{22}$$

Pentru a nu extinde prea mult această expunere nu mai dezvoltăm calculele corespunzătoare; menţionăm însă că din relaţia (22) se obţine unghiul de tragere α corespunzător unui anumit unghi polar θ_1 al elipsei de siguranţă. Acest unghi este dat prin cotangenta sa:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{r_0 v_0^2}{2K} \cdot \frac{\sin\theta_1}{1 - \cos\theta_1} = \frac{r_0 v_0^2}{2K} \operatorname{ctg}\frac{\theta_1}{2} \tag{23}$$

Pentru determinarea vitezei v_T cu care proiectilul atinge ținta $T(r_1, \theta_1)$ se aplică teorema energiei cinetice între punctul de lansare A și ținta T și se obține:

$$v_T = v_0^2 + 2K\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Unghiul α_1 pe care-l face viteza v_T în punctul T cu raza polară OT este dat de relația:

$$\sin \alpha_1 = \frac{r_0 v_0 \sin \alpha}{r_1 v_T}$$

dedusă prin aplicarea legii ariilor.

Observații:

Rezultatele obținute pot servi la rezolvarea unor importante probleme de balistică a rachetelor.

Dăm mai jos trei asemenea cazuri.

1. Să se determine direcția de lansare cu viteza $v_0\left(v_0^2 < \frac{2K}{r_0}\right)$ în A a unei rachete astfel încît să străbată maximum de distanță măsurată pe orizontala locului de lansare (fig. 1).

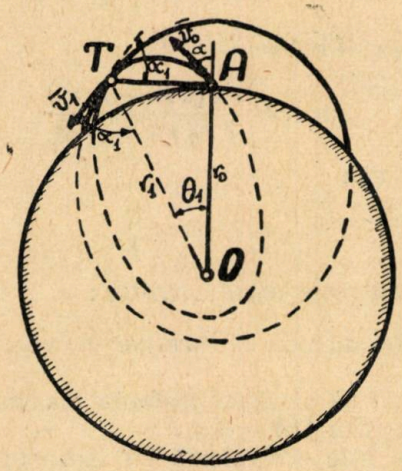


Fig. 1

Necunoscuta problemei este unghiul α.

Ținta T se va găsi la distanța maximă pe orizontala AT cînd se va găsi chiar pe elipsa de siguranță.

Se constată ușor că AT reprezintă chiar parametrul p_1 al elipsei de siguranță, deoarece A este focar iar AT este perpendiculară pe axa principală OA.

Rezultă:

$$AT = p_1 = \frac{4Kr_0^2 v_0^2}{4K^2 - r_0^2 v_0^4} \tag{24}$$

Din triunghiul OAT (fig. 1), rezultă:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{AT}{AO} = \frac{4Rr_0 v_0^2}{4K^2 - r_0^2 v_0^4} \tag{25}$$

și deci

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta_1}{2} = \frac{2K}{r_0 v_0^2} \tag{26}$$

Introducînd această valoare în relația (23) rezultă:

$$\operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \text{și} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

rezultat interesant întrucît este același ca în cazul traiectoriei parabolice din obișnuitul cîmp gravitațional constant.

Viteza v_T de atingere a țintei este P

$$v_T = v_0 \frac{2K - r_0 v_0^2}{\sqrt{4K^2 + r_0^2 v_0^4}} < v_0$$

iar unghiul $\alpha_1 = \sphericalangle(v_T OT)$ este dat de:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}(2K + r_0 v_0^3)}{2\sqrt{4K^2 + r_0^2 v_0^4}}$$

Se constată ușor că:

$$\alpha_1 > \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Mult mai interesant este cazul următor:

2. Să se determine direcția de lansare cu viteza $v_0\left(v_0^2 < \frac{2K}{r_0}\right)$ în A a unei rachete astfel încît să străbată distanța maximă măsurată pe cercul ce trece prin A și are raza $OA = r_0$.

Problema aceasta este echivalentă cu lansarea dintr-un punct A al Pămîntului cu viteza minimă pentru a atinge alt punct T al Pămîntului; se obține astfel o lansare cu minim de energie pentru rachetele balistice intercontinentale.

Și în acest caz necunoscuta problemei este unghiul de tragere α.

Problema se poate rezolva prin determinarea unghiului α care face maxim pe θ_1 (fig. 2).

Dar o soluție mai simplă putem obține punînd condiția ca ținta T să se găsească pe elipsa de siguranță pentru ca arcul AT să fie maxim.

Din ecuația elipsei de siguranță (14) rezultă, pentru $r_1 = r_0$, mărimea unghiului maxim θ_1 dată prin cosinusul unghiului:

$$\cos\theta_1 = 1 - \frac{2 r_0^2 v_0^4}{(2K - r_0 v_0^2)^2} \tag{27}$$

de unde:

$$\sin\frac{\theta_1}{2} = \frac{r_0 v_0^2}{(2K - r_0 v_0^2)};$$

$$\cos\frac{\theta_1}{2} = \frac{2\sqrt{K(K - r_0 v_0^2)}}{2K - r_0 v_0^2} \tag{28}$$

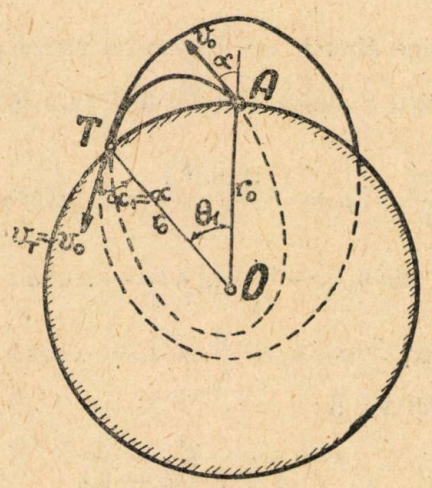


Fig. 2

iar din (23) ecuația unghiului de tragere

$$\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1 - \frac{r_0 v_0^2}{K}} \tag{29}$$

Prin simple calcule trigonometrice se obține:

$$\cos 2\alpha = -\sin\frac{\theta_1}{2} = -\frac{r_0 v_0^2}{2K - r_0 v_0^2} \tag{30}$$

Rezultă, pentru cazul concret al problemei:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{4} \tag{31}$$

Invers, dacă se cere viteza minimă pentru o țintă dată $T\ (r_0\ \theta_1)$, avem din relația (29).

$$v_0^2(\min) = \frac{2K}{r_0} \cdot \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{1+\sin\frac{\theta_1}{2}} \tag{32}$$

Viteza v_T de atingere a țintei este egală cu v_0 și unghiul α_1

$$\alpha_1 = \sphericalangle(v_T, OT) = \alpha$$

Rezultatele (31) și (32) le-am verificat prin aplicarea lor rachetei balistice sovietice lansate la 20.I.1960 și confruntarea cu datele comunicate de Ari Sternfeld.

3. Să se determine direcția de tragere cu viteza parabolică $v_0^2 = \frac{2K}{r_0}$, din $O(OA = r_0)$ pentru a atinge o țintă dată $T(r_1, \theta_1)$

În acest caz:

$$K = \frac{r_0 v_0^2}{3}; \quad p = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{K} = 2r_0\sin^2\alpha; \quad e = 1;$$

$$\sin\theta_0 = -\frac{p}{r_0}\operatorname{ctg}\alpha = -\sin^2\alpha;$$

iar: $\quad \cos\theta_0 = \frac{p}{r_0} - 1 = -\cos 2\alpha$

Ecuația parabolei va fi:

$$r = \frac{p}{1+\cos(\theta-\theta_0)} \tag{33}$$

sau:

$$r = \frac{r_0\sin^2\alpha}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}$$

Punînd condiția ca să treacă prin punctul $T(r_1, \theta_1)$ obținem:

$$\sqrt{\frac{r_1}{r_0}} = \pm\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\theta_1}{2}\right)} = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\theta_1}{2}\operatorname{tg}\alpha - \sin\frac{\theta_1}{2}} \tag{34}$$

de unde putem determina unghiul de tragere α prin tangenta sa:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}}{\cos\frac{\theta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0}{r_1}}} \tag{35}$$

Ajungem desigur la același rezultat rezolvînd ecuația conicelor (11) în cazul vitezei parabolice $v_0^2 = \frac{2K}{r_0}$.

Proprietăți geometrice ale traiectoriilor pentru proiectilele lansate din același punct, cu aceeași viteză inițială dar în toate direcțiile posibile

Elementele presupuse cunoscute sînt: centrul atractiv O, poziția de tragere A și viteza de tragere v_0.

În cazul $v_0^2 \neq \frac{2K}{r_0}$, traiectoriile sînt sau elipse sau hiperbole. Se constată ușor că în aceste cazuri lungimea semiaxei este o constantă:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{Kr_0}{2K - r_0 v_0^2} \tag{36}$$

Fie O' cel de al doilea focar al acestor conici. Întrucît:

$$AO' = 2a \pm r_0 = \pm \frac{r_0^2 v_0^2}{2K - r_0 v_0^2}$$

rezultă că locul geometric al celui de al doilea focar este un cerc cu centrul în A și raza AO'.

Centrul C al elipselor sau hiperbolelor se găsește pe un cerc cu centrul în A_1 (situat la jumătatea distanței dintre O și A) și cu raza:

$$A_1 C = \frac{AO'}{2} = \pm \frac{r_2 v_0^2}{2(2K - r_0 v_0^2)}$$

Semnul plus corespunde elipselor $\left(v_0^2 < \frac{2K}{r_0}\right)$ iar semnul minus corespunde hiperbolelor $\left(v_0^2 > \frac{2K}{r_0}\right)$.

În cazul elipselor, extremitățile axelor mici se găsesc pe un cerc cu centrul în O și rază egală cu a.

Pentru $v_0^2 = \frac{2K}{r_0}$, traiectoriile sînt parabole ale căror directoare sînt tangente la un cerc cu centrul în A și raza r_0.

Metode geometrice.

Pe baza datelor obținute anterior, vom da acum soluția geometrică la următoarele două probleme:

Problema I.

Construcții geometrice ale traiectoriilor pentru o direcție de tragere dată, cu viteză dată.

Datele problemei sînt punctele O și A ($OA = r_0$), direcția de tragere Δ și viteza v_0.

În cazul $v_0^2 \neq \frac{2K}{r_0}$ se calculează semiaxa a și raza AO' cu formulele (36) și (37).

Dăm mai jos construcțiile pentru fiecare conică în parte.

a) *Elipsă* (fig. 3).

Se construiește punctul P, simetricul lui O în raport cu dreapta Δ se unește cu punctul A și apoi se ia AO' rezultat din calcule astfel ca O' să fie de aceeași parte cu punctul O a dreptei Δ). Se obține astfel focarul

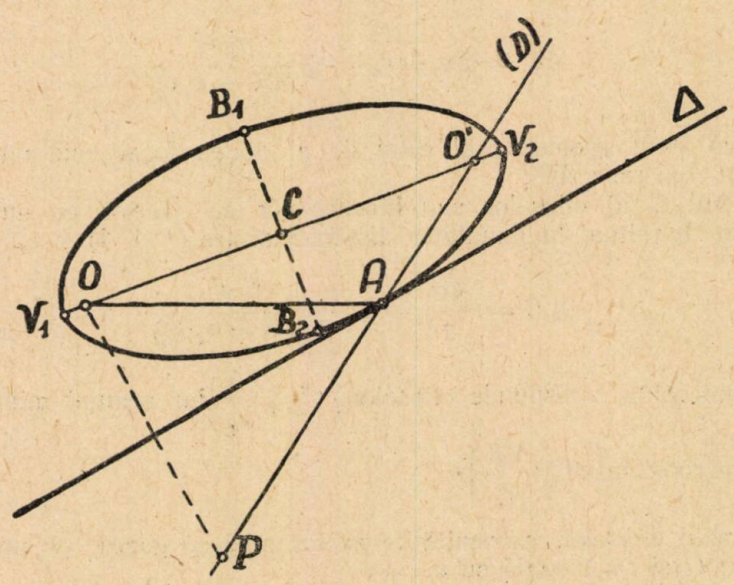


Fig. 3

al doilea O'. Din mijlocul C al distanței OO' se iau lungimile CV_1 și CV_2 cu semiaxa a cunoscută de asemenea prin calcule și se determină astfel vîrfurile elipsei V_1 și V_2. Extremitățile B_1 și B_2 ale axei mici se obțin prin intersecția perpendicularei în C pe OO' cu cercul descris din O cu raza a.

b) *Hiperbolă* (fig. 4).

Construcția este analogă celei precedente.

Se construiește punctul P simetricul lui O în raport cu dreapta Δ și se ia apoi distanța cunoscută AO' (astfel ca O' să fie de cealaltă parte cu punctul O față de dreapta Δ).

Din mijlocul C al segmentului OO' se măsoară apoi lungimile CV_1 și CV_2 egale cu semiaxa a.

Ducînd un cerc cu centrul în C și raza CO și ridicînd perpendiculare

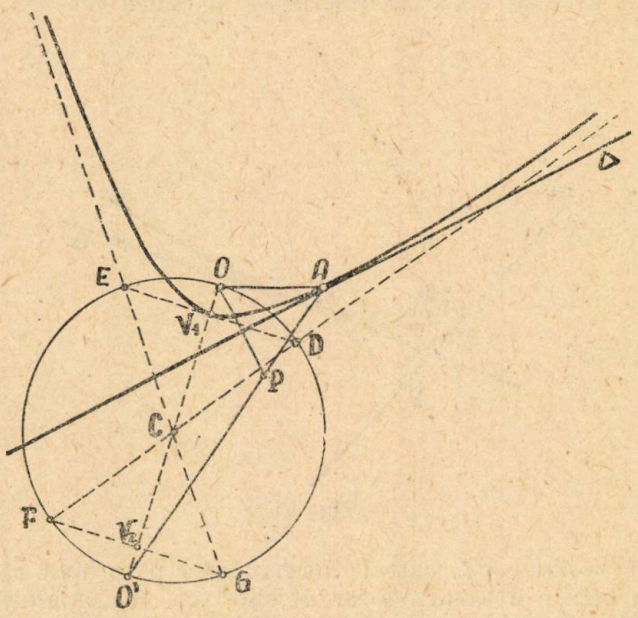


Fig. 4

în V_1 și V_2 pe OO' se obțin punctele $D.E.F.G.$ și asimptotele hiperbolei ECG și DCF.

Elementele de bază ale hiperbolei sînt astfel determinate.

c) *Parabola* (fig. 5).

Se construiește punctul P simetricul lui O în raport cu dreapta Δ și se duce apoi în P o perpendiculară pe AP. Această perpendiculară este directoarea parabolei.

Fie O' proiecția lui O pe directoare, mijlocul segmentului OO' este vîrful V al parabolei, iar OO' axa parabolei.

În figurile (6), (7), (8) este arătat aspectul general al familiei de elipse, iperbole și parabole.

Problema II.

Pentru o poziţie de lansare dată şi o viteză iniţială dată să se determine direcţiile de tragere pentru ca proiectilul să atingă o ţintă dată.

Datele problmei sînt punctele O, $A(OA = r_0)$, ţintă T şi viteza V_0.

Vom studia de asemenea problema în cele trei cazuri posibile.

a) *Elipsă* (fig. 9).

Cu centrul în A şi cu rază AO' rezultată din calcul, conform formulei (37), se duce un cerc. Se descrie un al doilea cerc cu centrul în T

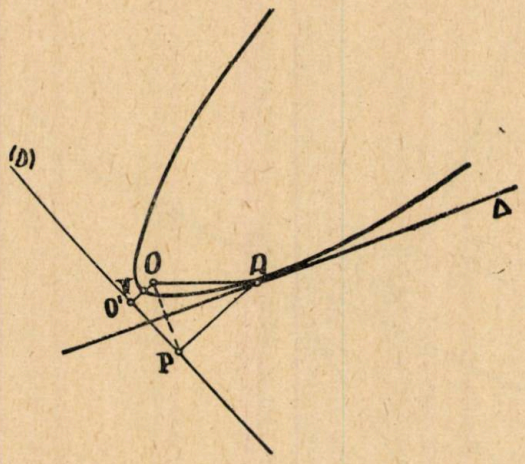


Fig. 5

şi de rază $TO' = 2a - OT$, care îl intersectează pe primul în punctele O' şi O'', soluţii pentru al doilea focar al elipselor. Bisectoarele unghiurilor OAM' şi OAM'', exterioare unghiurilor OAO' şi OAO'', sînt direcţiile de tragere căutate $\triangle_1$ şi $\triangle_2$, iar unghiurile lor cu direcţia OA, α_1, şi respectiv α_2, sînt unghiurile de tragere.

După poziţia punctului T faţă de punctele O şi A se poate obţine pentru unghiul de tragere:

— două soluţii pentru punctele T aflate în interiorul elipsei de siguranţă $\left(OT + AT = 4a - r_0 = r_0 \dfrac{2K + r_0 v_0^2}{2K - r_0 v_0^2}\right)$, cele două cercuri fiind secante.

— o soluţie pentru punctele T aflate pe elipsa de siguranţă $(OT + TA = 4a - r_0 = r_0 \dfrac{2K + r_0 v_0^2}{2K - r_0 v_0^2}$, cercurile fiind tangente.

— nici o soluţie pentru punctele T aflate în exteriorul elipsei de siguranţă $\left(OT + AT > 4a - r_0 = r_0 \dfrac{2K + r_0 v_0^2}{2K - r_0 v_0^2}\right)$, cercurile neavînd puncte de intersecţie.

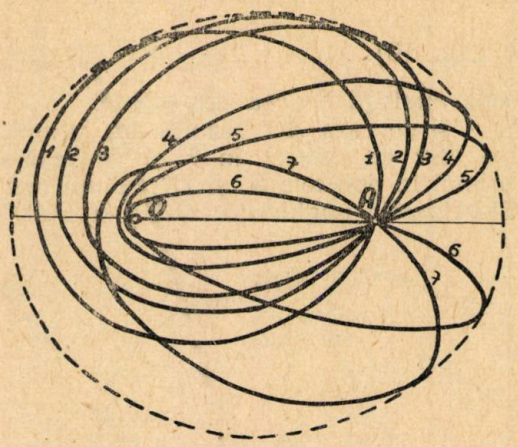


Fig. 6

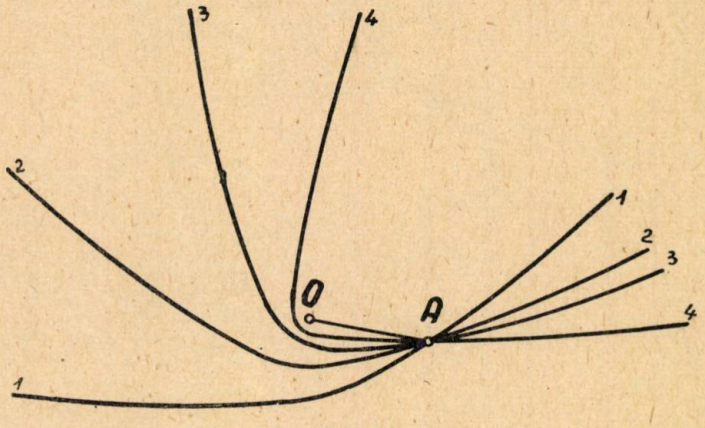


Fig. 7

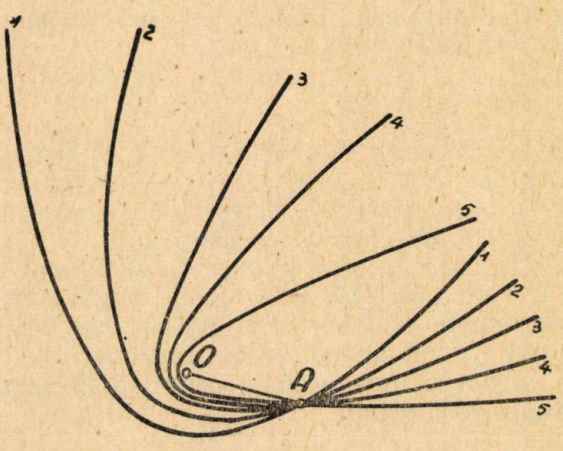


Fig. 8

b) *Hiperbolă* (fig. 10).

Construcția este analogă cu cea precedentă.

Cu centrul în A și cu raza AO' rezultă din formula (37) se duce un cerc. Un al doilea cerc cu centrul în T și de rază $TO' = 2a + OT$ îl intersectează pe primul în punctele O' și O'', soluții pentru al doilea focar al hiperbolelor. Bisectoarele unghiurilor OAO' și OAO'' sînt direcțiile de

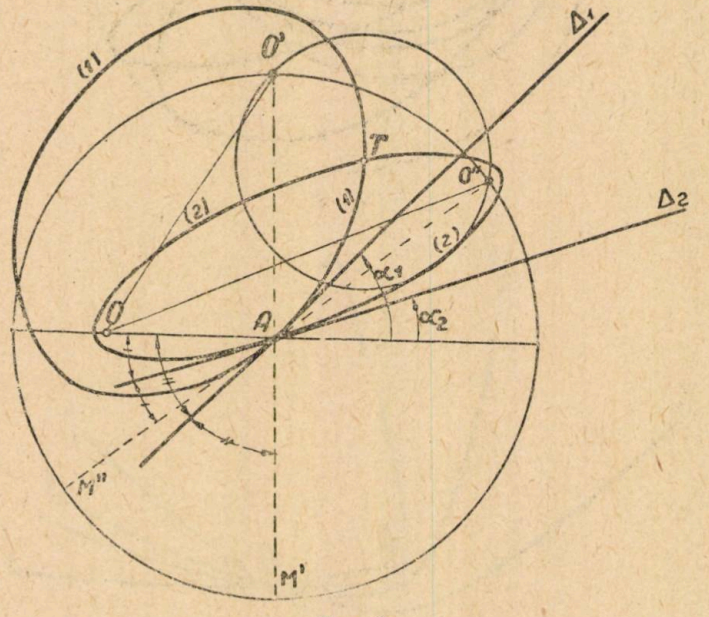


Fig. 9

tragere căutate, $\triangle_1$ și $\triangle_2$, iar unghiurile lor cu direcția OA, α_1 și respectiv α_2 sînt unghiurile de tragere.

Rezolvarea problemei este posibilă pentru orice punct T și se obțin de fiecare dată cîte două soluții.

c) *Parabola* (fig. 11).

Construcția este în acest caz puțin diferită de cele precedente.

Cu centrul în punctul A și respectiv în punctul T se descriu două cercuri de rază AO și respectiv TO. Tangentele comune ale acestor cercuri, dreptele D_1 și D_2 sînt directoarele parabolelor.

Fie E_1 și E_2 punctele în care dreptele D_1 și D_2 sînt tangente cercului cu centrul în A și de rază OA. Bisectoarele unghiurilor OAE_1 și OAE_2 sînt direcțiile de tragere căutate, $\triangle_1$ și $\triangle_2$ iar unghiurile lor cu direcția OA, α_1 și respectiv α_1 sînt unghiurile de tragere.

Rezolvarea problemei este posibilă pentru orice punct T și se obțin de fiecare dată cîte două soluții.

B. LANSĂRI DE DIRECȚIE CONSTANTĂ

În această parte a lucrării vom considera cazul lansărilor dintr-un același punct A sub același unghi α a proiectilelor acționate de forța atractivă newtoniană a centrului O, cu viteza inițială v_0 variabilă.

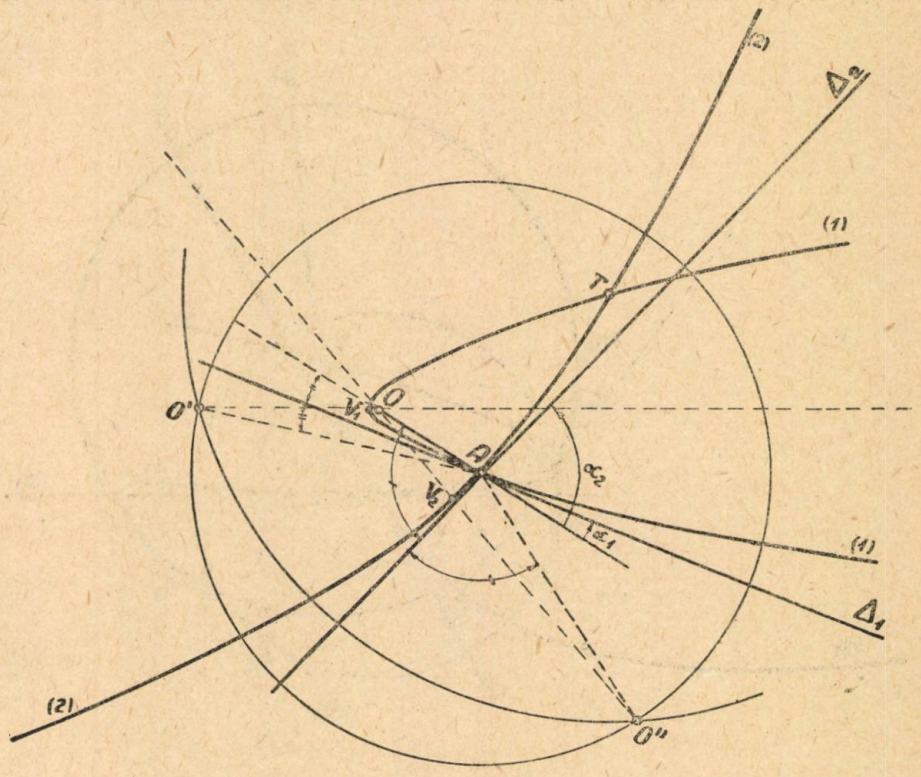


Fig. 10

În figura (12) sînt arătate traiectoriile posibile. Se observă ușor că pentru $O < v_0^2 < \frac{2K}{r_0}$ traiectoriile sînt elipse pentru $v_0^2 = \frac{2K}{r_0}$ traiectoria este o parabolă iar pentru $\theta_0^2 > \frac{2K}{r_0}$ traiectoriile sînt hiperbole. Toate aceste traiectorii se găsesc de aceeași parte a direcției de lansare și anume de partea care conține centrul atractiv O.

Pentru o viteză inițială nulă traiectoria este o elipsă redusă la segmentul de dreapta OA ($a = c = OA$; $p = 0$; $b = c$) iar pentru viteză inițială infinită traiectoria este hiperbolă redusă la dreapta care reprezintă direcția de tragere avînd drept focare centrul O și punctul P simetricul lui O în raport cu direcția de tragere ($a = 0$; $b = c = \frac{OP}{2}$; $p = \infty$).

Toate traiectoriile au drept focar centrul atractiv dat O. Cel de al doilea focar al acestor traiectorii se găsește pe dreapta determinată de punctul de lansare A și de punctul P, simetricul lui O față de direcția de lansare.

Parabola, care separă familia de elipsa de familie de hiperbole are

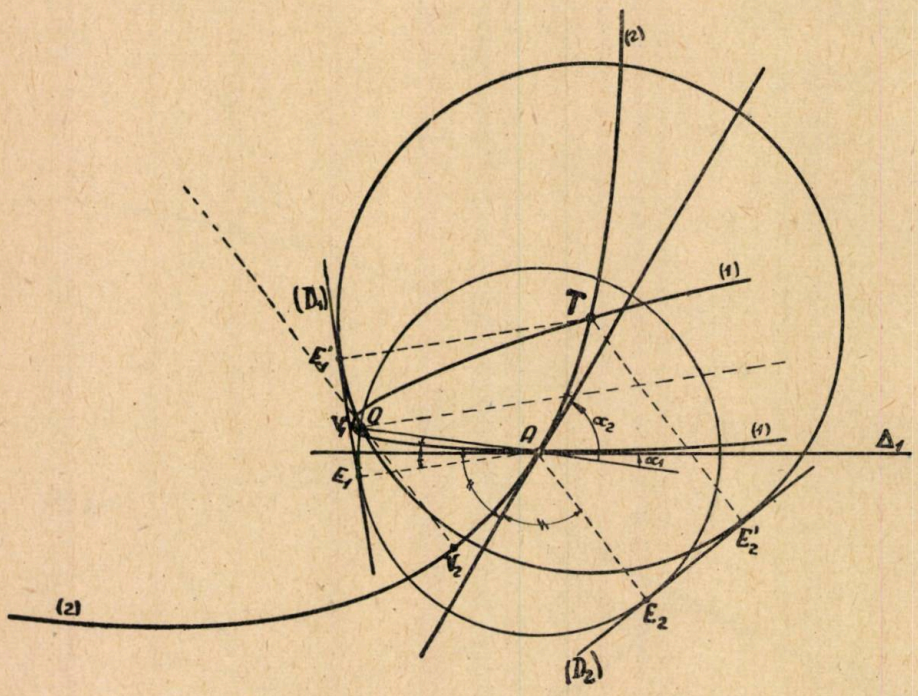


Fig. 11

drept axă de simetrie o paralelă la dreapta AP dusă prin focarul O, iar perpendiculara din P pe AP este directoare.

Celelalte elemente geometrice ale parabolei, precum vîrful, ordonata în dreptul focarului O etc. se determină acum ușor ținînd seama de proprietățile elementare ale acestei curbe.

Problema principală în tragerile de direcție constantă în determinarea vitezei inițiale de tragere pentru ca proiectilul să atingă o țintă dată $T\,(r_1\,\theta_1)$.

Rezolvarea problemei se face imediat din relația (8), ținînd seama și de valoarea parametrului p din (2) :

$$v_0^2 = \frac{K(1-\cos\theta_1)}{v_0 \sin\alpha \left[\frac{r_0}{r_1}\sin\alpha + \sin(\theta_1-\alpha)\right]} \tag{39}$$

Pentru $v_0^2 = \frac{2K}{r_0}$ obținem ecuația traiectoriei parabolice separatoare dintre grupul de elipse și grupul de iperbole.

$$r_1 = \frac{2 r_0 \sin^2 \alpha}{1 - \cos(\theta_1 - 2\alpha)}$$

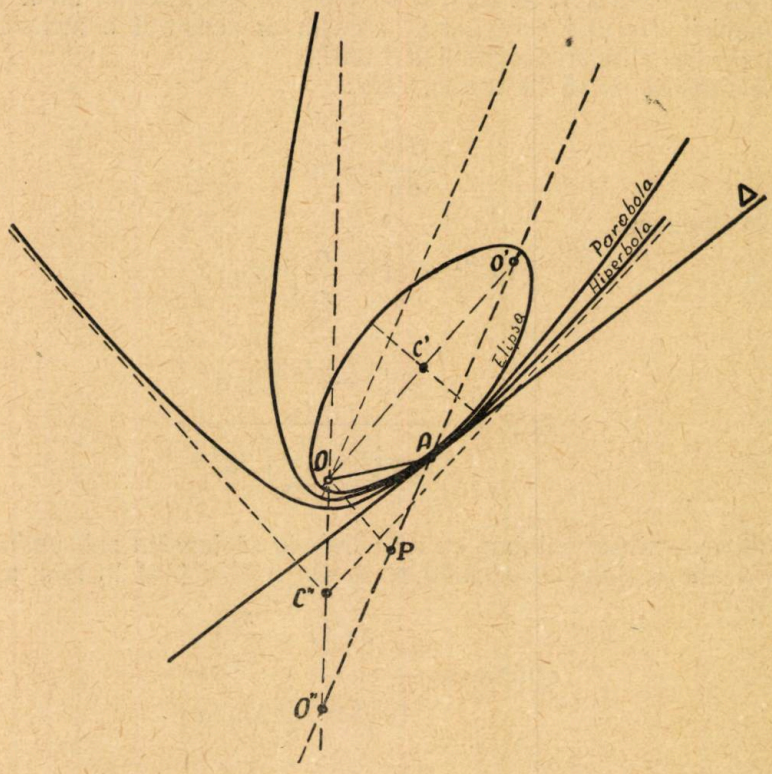


Fig. 12

în care r_1, θ_1 sînt coordonatele curente ale parabolei.

Parametrul p al acestei parabole este:

$$p = 2 r_0 \sin^2 \alpha \qquad (41)$$

Pentru $\theta_1 = -(\pi - 2\alpha)$ obținem vîrful parabolei, în care

$$r_1 = \frac{p}{2} = r_0 \sin^2 \alpha$$

Observaţii.

Pe baza proprietăţilor şi formulelor obţinute vom rezolva următoarea problemă:

O ţintă este mobilă pe un cerc de rază r_1 cu centrul în O; se cere poziţia pe cerc a acestei ţinte (unghiul θ_1) astfel încît să fie atinsă prin tragere din A cu unghiul de tragere α, dar cu viteză iniţială minimă.

După cum arată V. A. Egorov în articolul său „Despre unele probleme ale dinamicii zborului spre Lună" aceasta ar constitui o metodă aproximativă pentru atingerea directă a Lunei.

Condiţia ca v_0 să fie minim este:

$$\frac{dv_0^2}{d\theta_1} = 0 \tag{42}$$

de unde obţinem:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} = \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right)\operatorname{tg}\alpha \tag{43}$$

sau:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{2\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right)\operatorname{tg}\alpha}{1 - \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right)^2 \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Valoarea vitezei minime cu care trebuie să lansăm sub unghiul dat α pentru a atinge ţinta introducînd pe θ_1 din relaţia (43) în relaţia (39)

$$v_0^2 \min = \frac{2K\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right)}{r_0\left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\sin^2\alpha\right)} \tag{45}$$

Pentru r_1 foarte mare, din (45):

$$v_0^2 \min \to \frac{2K}{r_0}$$

care înseamnă că în asemenea cazuri viteza minimă este cea parabolică pentru r_1 suficient de apropiat:

$$v_0^2 \min < \frac{2K}{r_0}$$

şi traiectoria care atinge ţinta este o elipsă.

Pentru $r_1 \ll r_0$, $V_{omin} = 0$ iar ţinta este atinsă cînd se află sub punctul de lansare A, pe segmentul AO.

În cazul traiectoriei eliptice se deduce ușor că ținta T se află în momentul strîngerii în vîrful elipsei; elipsa este prin urmare tangentă cercului de rază r_1 și centrul O chiar în punctul T.

În figura (13) este arătată această proprietate.

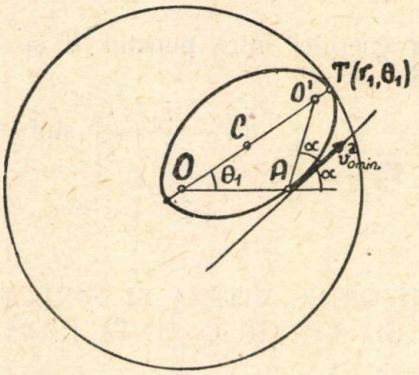


Fig. 13

Prin simple considerații geometrice putem deduce din fig. (13) relațiile cunoscute.

Astfel din triunghiul OAO', în care O' este cel de al doilea focar al elipsei:

$$\frac{OO'}{\sin OAO'} = \frac{O'A}{\sin O'OA} = \frac{OA}{\sin OO'A} \tag{46}$$

Notînd $O'T = x$ și unghiurile ca în figură, relația (46) devine:

$$\frac{r_1 - x}{\sin 2\alpha} = \frac{r_1 + x - r_0}{\sin \theta_1} = \frac{r_0}{\sin (2\alpha - \theta_1)} \tag{47}$$

de unde putem deduce relația:

$$\frac{r_0}{\sin (2\alpha - \theta_1)} = \frac{r_1}{2 \sin \alpha \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \left(\alpha - \frac{\theta_1}{2}\right)} \tag{48}$$

care conduce la:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} = \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \operatorname{tg} \alpha$$

adică tocmai relația notată anterior cu (43).

Distanța $O'T$ notată cu x, rezultă din șirul de rapoarte (47)

$$x = r_0 \frac{\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \operatorname{tg} \alpha} \tag{49}$$

Iar semiaxa mare a elipsei:

$$a = \frac{r_1 + x}{2} = \frac{r_1}{2} \frac{1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \sin^2 \alpha}{1 - \frac{r_0}{r} \sin^2 \alpha} \tag{50}$$

Aplicînd teorema energiei între punctul T și A deducem valoarea vitezei V_T în punctul T:

$$V_T^2 = \frac{2K}{r_0} \frac{\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \frac{r_0^2}{r_1^2} \sin^2 \alpha}{1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \sin^2 \alpha} \tag{51}$$

C. LANSĂRI CU ORICE VITEZĂ ȘI DIRECȚIE PRIN CARE SE ATINGE O ȚINTĂ DATĂ

Datele problemei sînt: poziția centrului atractiv O, a punctului A de lansare și a țintei $T(r_1\, \theta_1)$.

Studiul acestor probleme se reduce la sinteza problemelor studiate anterior.

— Pentru viteza parabolică $V_0^2 = \frac{2K}{r}$ sînt două traiectorii parabolice care ating ținta.

— Pentru orice viteză de tragere superioară vitezei parabolice se pot determina cîte două traiectorii iperbolice care ating ținta.

— Pentru orice viteză de tragere inferioară viteza parabolică dar superioară vitezei corespunzătoare elipsei de siguranță care trece prin țintă se pot determina cîte două traiectorii eliptice care ating ținta.

Pentru o viteză de tragere egală cu viteza corespunzătoare elipsei de siguranță ce trece prin țintă se obține o singură traiectorie eliptică, tangentă elipsei de siguranță chiar în țintă.

Pentru orice viteză de tragere inferioară vitezei corespunzătoare elipsei de siguranță ce trece prin țintă, această țintă nu poate fi atinsă.

Rezultă de aici marea importanță ce o are elipsa de siguranță în rezolvarea problemei.

Vom începe prin determinarea a cîteva proprietăți geometrice ale acestei elipse (fig. 14).

Din relația (18) deducem lungimea semiaxei mari.

$$a_1 = \frac{p_1}{1 - e_1^2} = \frac{r_0 (2K - r_0 v_0^2)}{2(2K - r_0 v_0^2)} \tag{52}$$

A și O fiind focare, rezultă că distanța dintre focare este:

$$2c_1 = OA = r_0 \qquad c_1 = \frac{r_0}{2}$$

Vîrful V al elipsei de siguranță este dat de lungimea :

$$OV = r_{max} = \frac{p_1}{1 - e_1} = \frac{2Kr_0}{2K - r_0 v_0^2}$$

Se constată că această distanță este chiar $2a$, axa mare a tuturor traiectoriilor eliptice corespunzătoare tuturor lansărilor din A cu viteza v_0.

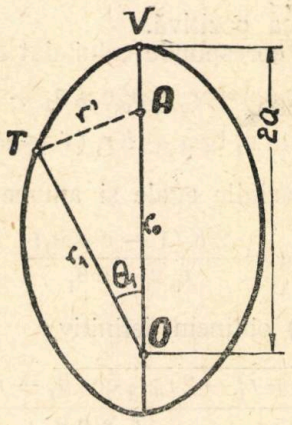


Fig. 14

Să punem acum condiția ca elipsa de siguranță să treacă chiar prin ținta $T(r_1\ \theta_1)$.

Din triunghiul OTA (fig. 14) avem :

$$r' = \sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos\theta_1} \tag{53}$$

Rezultă :

$$r_1 + r' = 2a_1 = \sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos\theta_1} + r_1 \tag{54}$$

Introducînd în această relație pe a_1 dat de (52) și scoțînd apoi pe v_0^2, obținem :

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0} \frac{\sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos\theta_1} + r_1 - r_0}{\sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos\theta_1} + r_1 + r_0} < \frac{2K}{r_0} \tag{55}$$

egalitate ce se mai poate pune sub formele :

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0} \frac{\sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos\theta_1} + r_1 \cos\theta_1 - r_0}{r_1 (1 + \cos\theta_1)}$$

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0} \frac{r_1 (1 - \cos\theta_1)}{\sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos\theta_1} - r_1 \cos\theta_1 + r_0} \tag{57}$$

Această valoare pentru v_0^2 se poate scoate și rezolvînd ecuația în v_0^2 dată de elipsa de siguranță

$$r_1 = \frac{\dfrac{4K r_0^2 v_0^2}{4K^2 - r_0^2 v_0^4}}{1 - \dfrac{2K - r_0 v_0^2}{2K + r_0 v_0^2}\cos\theta_1}$$

și păstrînd numai ridicarea pozitivă.

Unghiul de tragere α corespunde celui dat de tg α din ecuația:

$$\begin{aligned}[K r_1 (1 - \cos\theta_1) + r_0 r_1 v_0^2 \cos\theta_1 - r_0^2 v_0^2]\,\mathrm{tg}^2\alpha - \\ - r_0 r_1 v_0^2 \sin\theta_1\,\mathrm{tg}\,\alpha + K r_1 (1 - \cos\theta_1) = 0\end{aligned} \tag{58}$$

care are în acest caz rădăcinile egale și anume:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2K(1 - \cos\theta_1)}{r_0 v_0^2 \sin\theta_1} \tag{59}$$

Ținînd seama de (57) obținem definitiv:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 \cos\theta_1} - r_1 \cos\theta_1 + r_0}{r_1 \sin\theta_1} \tag{60}$$

sau

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{r_0 \sin\theta_1}{\sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 \cos\theta_1} + r_1 \cos\theta_1 - r_1} \tag{61}$$

Ca verificare, putem obține valoarea acestei tangente și din relația generală:

$$v_0^2 = \frac{K r_1 (1 - \cos\theta_1)}{r_0 \sin\alpha\,[(r_0 - r_1\cos\theta_1)\sin\alpha + r_1 \sin\theta_1 \cos\alpha]} \tag{62}$$

punînd ecuația de minim prin:

$$\frac{d(v_0^2)}{d\alpha} = 0 \tag{63}$$

și rezolvînd apoi ecuația de gradul doi în tg α.

Din formulele (55) și (60) putem regăsi rezultatele pentru unele din problemele precedente.

Astfel pentru $r_1 = r_0$ obținem:

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0} \cdot \frac{\sin\dfrac{\theta_1}{2}}{1 + \sin\dfrac{\theta_1}{2}}; \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1 + \sin\dfrac{\theta_1}{2}}{\cos\dfrac{\theta_1}{2}}$$

iar pentru

$$r_1 \cos\theta_1 = r_{,,} \quad \operatorname{tg}\alpha = 1 \text{ și } \alpha = \frac{\pi}{4};$$

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0} \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} \text{ și } z_{max} = r_0 \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{4Kr_0^2 v_0^8}{4K^2 - r_0^2 v_0^4}$$

adică chiar soluțiile problemelor (2) și (1) studiate anterior.

D. TIMPUL ÎN CARE PROIECTILUL STRĂBATE O ANUMITĂ PORȚIUNE DIN TRAIECTORIA SA

Pentru calculul acestui timp vom utiliza legea ariilor. Cunoscînd condițiile inițiale, viteza areolară Ω este dată de expresia:

$$\Omega = \frac{1}{2} r_0 v_0 \sin\alpha$$

Notînd cu A aria măturată de raza vectoare ce unește centrul proiectilului cu centrul Pămîntului pe o anumită porțiune a traiectoriei, timpul t necesar străbaterii acestei porțiuni este:

$$t = \frac{A}{\Omega}$$

Rămîne deci de aflat aria A.

Mărimea acestei arii se determină calculînd integrala:

$$A = \frac{1}{2}\int r^2 d\theta$$

între pozițiile exterioare de pe traiectoria rachetei.

Dăm mai jos rezultatele acestei integrări pentru cazul cînd punctul inițial considerat este chiar vîrful conicii (cel mai apropiat de focar), excentricitatea conicii este e, parametrul său este p iar unghiul între raza vectoare inițială și cea finală este θ.

Avem pentru elipsă:

$$A = \frac{p^2}{2(1-e^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \arccos\frac{\cos\theta + e}{1 + e\cos\theta} - \frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta}\right] \quad (64)$$

Pentru hiperbolă:

$$A = \frac{p^2}{2(e^2-1)}\left[\frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \operatorname{arg ch}\frac{\cos\theta + e}{1 + e\cos\theta} + \frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta}\right] \quad (65)$$

Pentru parabolă:

$$A = \frac{p^2}{12} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (66)$$

Aceste formule se pot deduce una din alta.

Astfel din (64) pentru $e=1$, eliminînd nedeterminarea se obține (66). Tot din (64) se obține (65), ținînd seama de relația:

$$\arccos\frac{\cos\theta+e}{1+e\cos\theta}=-i\,\operatorname{arcgch}\frac{\cos\theta+e}{1+e\cos\theta}$$

în care

$$i=\sqrt{-1}$$

Pentru elipsa, atunci cînd raportăm aria la focarul cel mai îndepărtat de vîrf, (origina axelor în focarul elipsei care nu este centrul atractiv):

$$A=\frac{p^2}{2(1-e^2)}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\arccos\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}+\frac{e\sin\theta}{1-e\cos\theta}\right] \qquad (67)$$

Această formulă se poate calcula fie direct, fie din (64) prin înlocuirile lui e cu $-e$.

În mod obișnuit punctul inițial de plecare al rachetei nu corespunde vîrfului conicei; în acest caz descompunem aria măturată de raza vectoare într-o sumă aritmetică sau algebrică de două arii corespunzătoare porțiunilor punct inițial — vîrf și vîrf — punct final.

Aplicînd de două ori formulele menționate mai sus putem calcula în acest mod aria în oricare situație.

Cazurile ce nu se pot ivi sînt date în figurile alăturate în care M și N reprezintă respectiv poziția inițială și poziția finală a rachetei.

Prin urmare, calculul timpului cere determinarea în prealabil, în funcție de condițiile inițiale r_0, v_0, α, a vitezei areolare Ω, a parametrului p și excentricității e a traiectoriei precum și a unghiurilor θ și θ_2 pe care raza vectoare inițială OM și respectiv raza vectoare finală ON le face cu direcția axei OV ce unește focarul cu vîrful conicei p o atenție specială trebuie dată stabilirii poziției punctelor M și N în raport cu vîrful V și anume dacă sînt situate de o parte și de alta a axei OV sau sînt amîndouă de aceeași parte a acestei axe.

Observații.

Să aplicăm rezultatele obținute mai sus la problema 2 de la punctul *A*, adică să aflăm după cît timp de la lansare a rachetei balistice intercontinentale, lansată cu viteza minimă, atinge ținta (fig. 17).

Putem presupune că punctele extreme M și N se găsesc la aceeași distanță r_0 de centrul Pămîntului.

În acest caz, notînd cu θ_1 unghiul la centru MON, avem:

$$\theta_1=\frac{\text{arc } MN}{r_0}=\frac{s}{r_0}$$

Vîrful V se găsește pe bisectoarea unghiului MON.

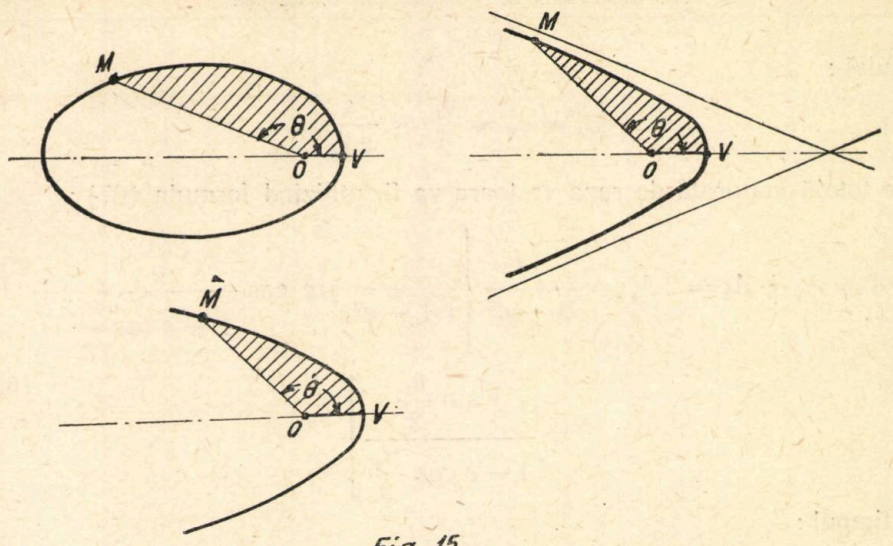


Fig. 15

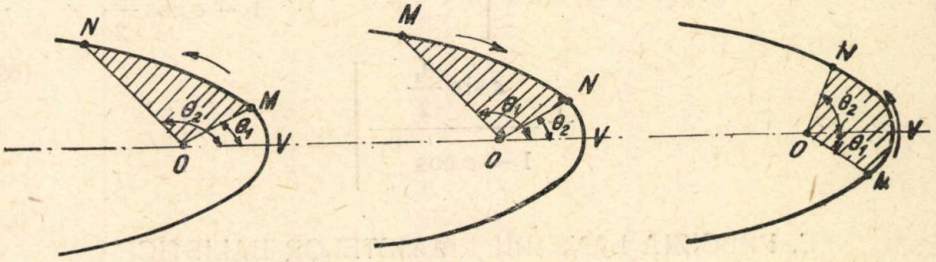


Fig. 16

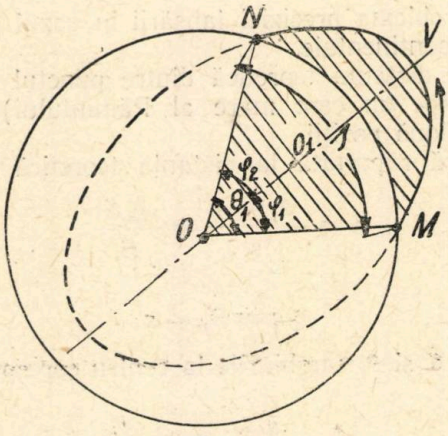


Fig. 17

Rezultă :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\theta_1}{2} = \frac{s}{2 r_0}$$

Aria totală măturată de raza vectoare va fi, utilizînd formula (67) :

$$A = A_1 + A_2 = 2 A_1 = \frac{p^2}{1 - e^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \arccos \frac{\cos \frac{\theta_1}{2} - e}{1 - e \cos \frac{\theta_1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e \sin \frac{\theta_1}{2}}{1 - e \cos \frac{\theta_1}{2}} \right] \tag{68}$$

iar timpul :

$$t = \frac{A}{\Omega} = \frac{2 p^2}{r_0 v_0 (1 - e^2) \sin \alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \arccos \frac{\cos \frac{\theta_1}{2} - e}{1 - e \cos \frac{\theta_1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e \sin \frac{\theta_1}{2}}{1 - e \cos \frac{\theta_1}{2}} \right] \tag{69}$$

E. PRECIZIA LANSĂRII RACHETELOR BALISTICE INTERCONTINENTALE

Vom rezolva problema preciziei lansării în cazul particular al rachetelor balistice intercontinentale.

Să notăm cu s distanța teoretică dintre punctul de lansare și țința (distanța măturată pe un cerc mare al Pămîntului) și cu s_1 distanța reală dintre aceste două poziții.

Abaterea unitară raportată la distanța teoretică este :

$$\varepsilon = \frac{s_1 - s}{s} = \frac{\Delta S}{S}$$

în care :

$$\Delta s = S_1 - s.$$

Dacă notăm cu θ și θ_1 unghiurile la centru corespunzătoare arcelor S și S_1 avem :

$$\theta = \frac{s}{r_0}; \quad \theta_1 = \frac{s_1}{r_0}$$

(r_0 — raza cercului pe care se găsesc punctul de lansare și ținta). Abaterea unitară unghiulară va fi cu tot ε

$$\varepsilon = \frac{\theta_1 - \theta}{\theta}$$

Să calculăm acum abaterea vitezei de lansare corespunzătoare acestor abateri de distanță și unghi.

Viteza de lansare minimă este dată de relația (32).

$$v_{0\,min}^2 = \frac{2K}{r_0} \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{1 + \sin \frac{\theta_1}{2}}$$

Notînd cu ε_1 abaterea unitară a vitezei corespunzătoare abaterii unghiulare ε avem:

$$\varepsilon_1 = \frac{V_1 - V}{V}$$

$$V_1^2 (v_0 + \varepsilon_1 v_0)^2 = \frac{2K}{r_0} \frac{\sin \frac{\theta + \varepsilon\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta + \varepsilon\theta}{2}}$$

Din (32) și (70), neglijînd termenii avînd drept factori puteri a lui ε și ε_1 egale sau mai mari decît doi, obținem:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon\theta}{4} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}}$$

La aceeași relație ajungem aplicînd formula de definiție a derivatei:

$$f(x + h) = (x) + hf'(x)$$

în care:

$$x = \frac{\theta}{2}; \quad h = \frac{\varepsilon\theta}{2} \text{ iar}$$

$$f(x) = v_0^2 = \frac{2K \sin x}{r_0 (1 + \sin x)}$$

$$f(x + h) = v_1^2 = v_0^2 (1 + \varepsilon_1)^2 \cong v_0^2 (1 + 2\varepsilon_1)$$

$$f'(x) = v_0^2 \frac{\operatorname{ctg} \cdot \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}}$$

Pentru calculul abaterii unitare ε_2 a unghiului de lansare vom utiliza relația care ne dă acest unghi :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4}$$

Valoarea lui ε_2 este :

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha}$$

în care :

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4} + \frac{\varepsilon\theta}{4}$$

Obținem deci :

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon\theta}{\pi + \theta}$$

Abaterile procentuale ale vitezei și unghiului de lansare vor fi respectiv :

$$100\,\varepsilon_1 = 25\,\varepsilon\,\theta\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$100\,\varepsilon_2 = 100\,\varepsilon\,\frac{\theta}{\pi + \theta}$$

iar abaterile totale :

$$\varepsilon_1\,v_0 = \frac{\varepsilon\theta}{4} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\theta}{2}}\,v_0$$

$$\varepsilon_1\,\alpha = \frac{\varepsilon\theta}{4}$$

Legea conservării energiei în mișcarea rachetei.

Să considerăm un satelit lansat pe o orbită oarecare și avînd în poziția A (la perigeu) la distanța $AO = r_0$ de centrul O al Pămîntului viteza v_0 (fig. 18).

În această poziție satelitul are o energie cinetică :

$$E_A = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

(m fiind masa satelitului).

Energia potențială care este datorită numai forței de atracție newtoniană :

$$F = \frac{Km}{r^2} = m\,g\,\frac{R^2}{r^2}$$

este, dacă o presupunem nulă la suprafața Pământului :

$$\pi_A = m\,g\,R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right)$$

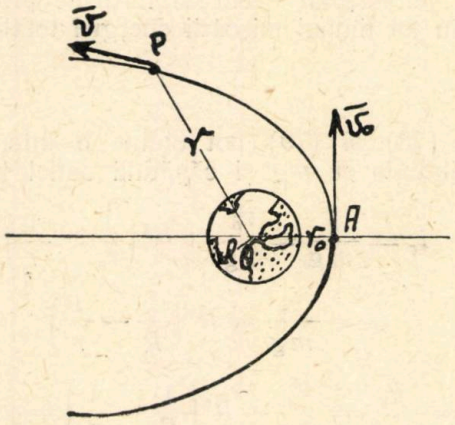


Fig. 18

R fiind raza Pământului, iar g accelerația gravitației). Rezultă pentru energia totală E din A valoarea :

$$E = E_A + \pi_A = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Să considerăm acum satelitul într-o poziție oarecare P de pe traiectorie la distanța $OP = r$ și să notăm cu v viteza lui în această poziție.

Prin aplicarea teoremei energiei cinetice între poziția A și poziția P avem :

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 = \int_{r_0}^{r} m\,g\,\frac{R^2}{r^2}\,dr$$

Rezultă :

$$v^2 = v_0^2 - 2\,g\,R^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right).$$

Energia cinetică în P este deci :

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - m\,g\,R^2\left(1/r_0 - \frac{1}{r}\right)$$

Energia potențială în P este:

$$\pi = m\,g\,R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

Energia totală în P este deci:

$$E_t = E + \pi = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right)$$

adică aceeași ca și în A.

Rezultatul era de așteptat deoarece forța ce produce mișcarea este conservată și deci în tot timpul mișcării energiei totale este constantă.

Observație.

Relațiile (77), (78) și (79) pot obține o interesantă reprezentare geometrică, împărțindu-le cu mg și căpătînd astfel lungimile:

$$l_c = \frac{E}{mg} = \frac{v_0^2}{2g} - R^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

$$l_p = \frac{\pi}{mg} = R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

$$l_t = \frac{E_t}{mg} = \frac{v_0^2}{2g} + R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right) = \text{const.}$$

Aceste lungimi pot fi considerate ca reprezentînd energiile specifice respective ale unității de greutate.

Ținînd seama de ecuația conicei:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

și de valorile perimetrului p și a excentricității e în funcție de r_0 și v_0 (formulele (78) și (79) în care $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $K = gR^2$.

$$p = \frac{r_0^2\,v_0^2}{gR^2}\,; \quad e = \sqrt{1 + \frac{r_0^2\,v_0^2}{g^2R^4}\left(v_0^2 - \frac{2\,g\,R^2}{r_0}\right)} = \frac{r_0\,v_0^2 - gR^2}{gR^2}$$

obținem pentru (81) expresia:

$$e_p = \alpha - \beta\cos\theta$$

în care:

$$\alpha = \frac{R\,(r_0^2\,v_0^2 - gR^2)}{r_0^2\,v_0^2}\,; \quad \beta = \frac{R^2\,(r_0\,v_0^2 - gR^2)}{r_0^2\,v_0^2}$$

Rezultă pentru (80):

$$l_c = \gamma + \beta\cos\theta$$

în care:

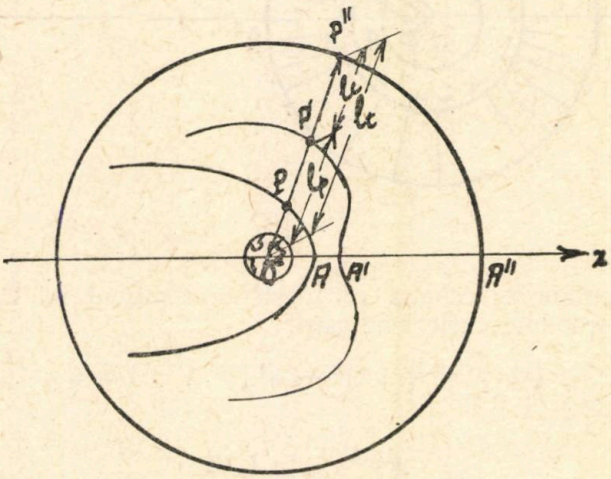
$$\gamma = \frac{(r_0 v_0^2 - g R^2)^2 + g^2 R^4}{2 g r_0^2 v_0^2}$$

ca verificare:

$$l_t = l_p + l_c = \alpha + \gamma = \frac{v_0^2}{2g} \neq R^0 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right)$$

adică formula (82).

Relațiile (80), (81), (82) permit următoarea reprezentare grafică: cunoscînd traiectoria unui satelit, care este o conică cu unul din focare



Fg. 19

în O, centrul Pămîntului, se poate construi pentru fiecare punct P al traiectoriei, un alt punct P' luat pe a lui P, astfel încît $OP' = lp$ (fig. 19).

Ducînd un cerc cu centrul în O și raza lt, rezultă pentru fiecare punct P o lungime $P'P'' = l_c$ (în care P'' este intersecția razei vectoare OP cu cercul), obținem astfel lungimea corespunzătoare energiei cinetice în P.

Legea conservării energiei este astfel reprezentată grafic prin relația geometrică:

$$OP' + P'P'' = OP'' = \text{const.}$$

viteza în P va fi:

$$v_p = \sqrt{2 g l_c} = \sqrt{2 g P' P''}$$

Construcția curbei punctelor P' se poate face ușor fie cu ajutorul relației (81) fie din (83).

Se poate observa ușor că pentru $v_0^2 > \frac{8 R^2}{r_0}$ (adică $\frac{r_0 v_0^2}{g R^2} > 1$ (traiecto-

riile sînt în acest caz parabole, hiperbole sau elipse în care vîrful A este perigeu).

$$\alpha > 0 \quad \beta > 0 \quad \text{şi } \alpha > \beta$$

deoarece

$$r_0 > R$$

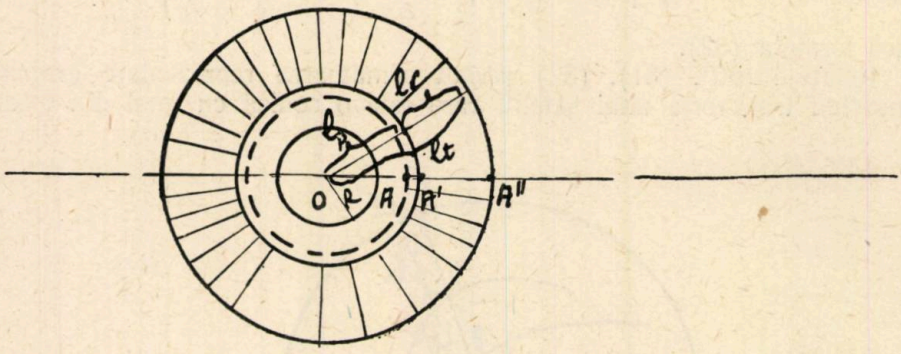


Fig. 20

Curba reprezentată de ecuația (83) este deci melcul lui Pascal a cărei ecuație în coordonate carteziene este:

$$(x^2 + y^2 + \beta x)^2 - \alpha^2 (x^2 + y^2) = 0$$

Pentru

$$v_0^2 = \frac{g R^2}{r_0} \text{ adică } \frac{r_0 v_0^2}{g R^2} = 1$$

$$e = 0\,; \quad \beta = 0\,; \quad l_p = \alpha = R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right) = \text{ct}\,;$$

$$l_c = \gamma = \frac{R^2}{2 r_0} = \text{ct}$$

și deci $l_t = R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2 r_0} \right) =$ constantă, dacă energia potențială și deci energia cinetică sînt constante. Aceasta este tocmai cazul mișcării satelitului pe o orbită circulară la distanța r_0 de centrul Pămîntului și $r_0 - R$ de suprafața Pămîntului.

Valorile vitezei v_0 pentru care $v_0^2 < g \frac{R^2}{r_0}$ sînt deosebit de importante pentru rachetele balistice intercontinentale.

În acest caz traiectoria este o elipsă în care vîrful A reprezintă apogeul elipsei (în ecuația generală a conicei excentricitatea e trebuie să fie introdusă cu semn negativ).

Desigur porțiunea din elipsă care interesează în acest caz este arcul situat în afara Pământului; în punctele în care traiectoria intersectează suprafața Pământului avem evident:

$$l_p = 0 \text{ și } l_t = l_c \ (r = R; \text{ pe traectoria reală } l_p > 0.$$

În fig. 21, 22, 23, 24 s-au reprezentat l_p, l_c și l_t pentru cazul în care traiectoria este cerc, elipsă, hiperbolă și parabolă.

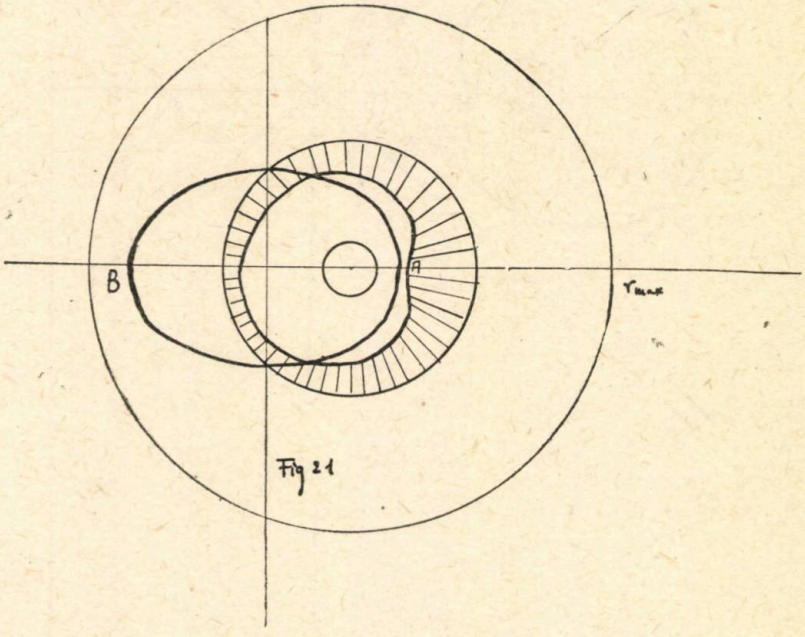


Fig. 21

Observație: Lungimea l_p se poate obține și printr-o construcție grafică, spre exemplu cea din fig. 25. Am văzut că

$$l_p = R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) \text{ sau } l_p = R - \frac{R^2}{r}.$$

Cu centrul în punctul O ducem un cerc cu raza $OA' = R$ (un cerc mare al Pământului.

Notăm cu P_1 punctul în care segmentul OP intersectează cercul cu centrul în O..

Pe segmentul OP ca diametru construim un cerc care intersectează cu centrul în O și de rază $OP_1 = R$ în B.

Paralela dusă din B la OP intersectează perpendiculara ridicată în P_1 pe OP în punctul C.

Paralele dusă prin C la dreapta OB intersectează segmentul OP în P'. Segmentul $OP' = l_p$

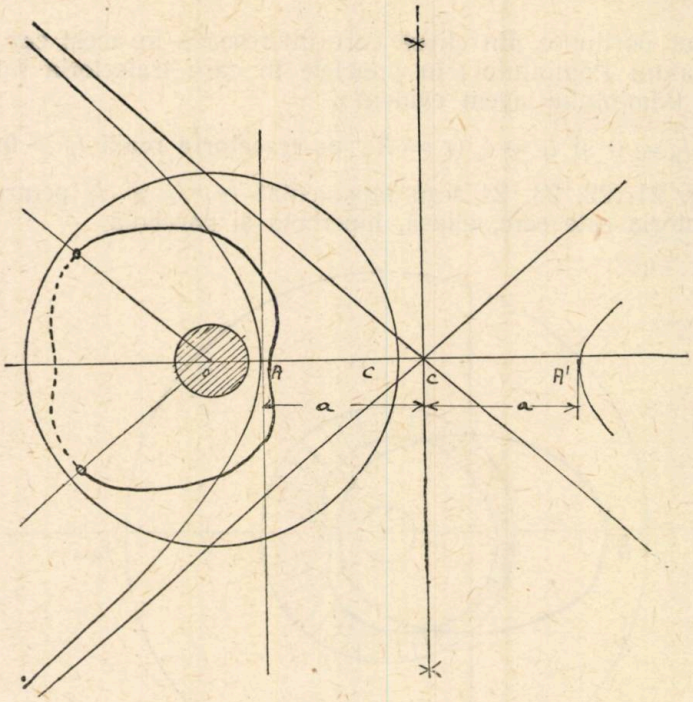


Fig. 22

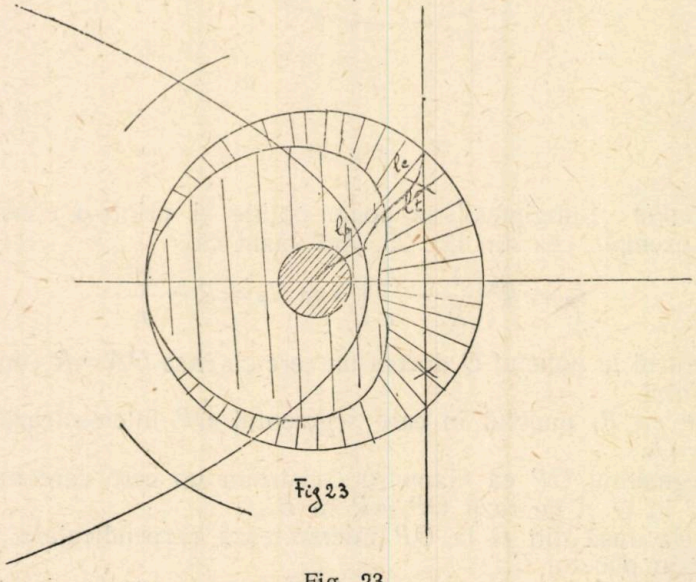


Fig. 23

Demonstrație: $OP=r$; $OB=OP_1=R$; P, P'=pr. $P'C$ pe OP=pr. OB pe OP.

În ΔOBP, $OBP = 90^0$

$$OB^2 = OP \text{ pr } OB \text{ pe } OP$$

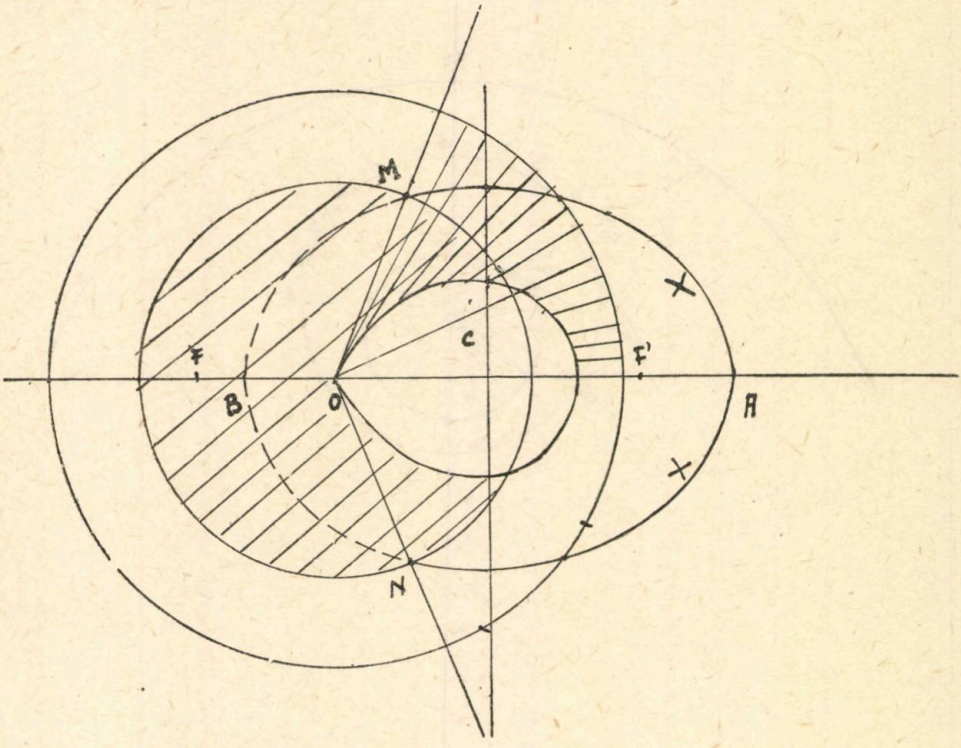


Fig. 24

adică

$$R^2 = r \cdot P'P_1$$

de unde

$$P'P_1 = \frac{R^2}{r}$$

Deci

$$OP' = OP_1 - P'P_1 = R - \frac{R}{r} = l_p$$

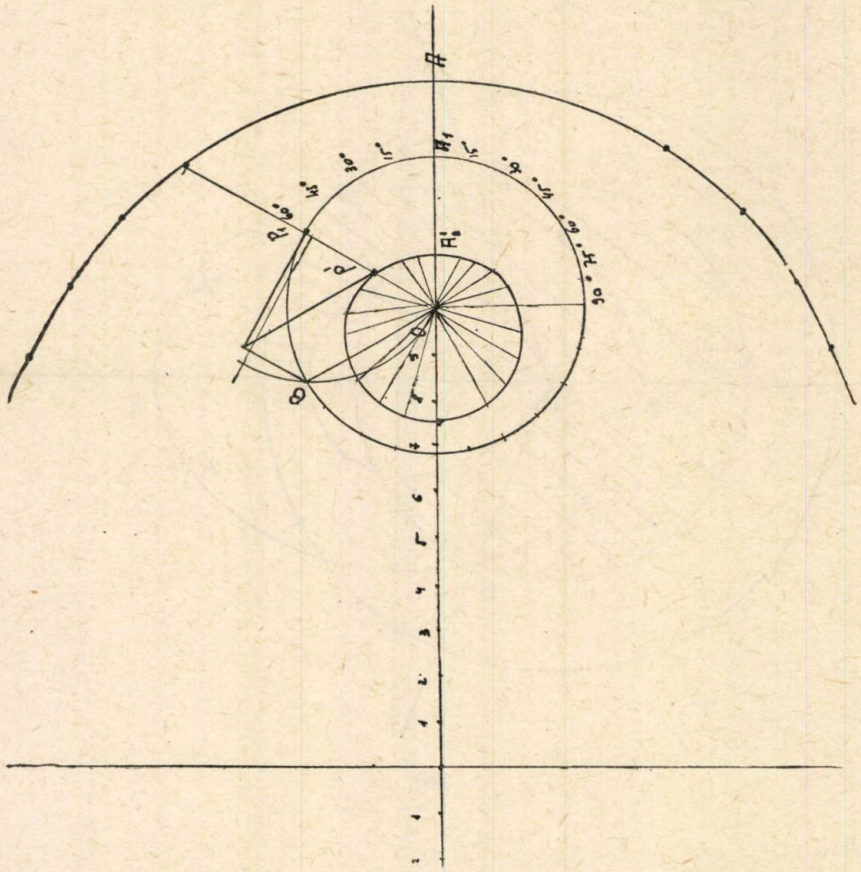


Fig. 25

РАКЕТНЫЕ БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ С БОЛЬШИМ РАДИУСОМ ДЕЙСТВИЯ

(Резюме)

В работе излагается вопрос движения ракет с учётом ньютонового поля притяжения и крутизны Земли, пренебрегая трением в атмосфере.

Разрабатываются следующие вопросы, связанные с движением ракет:

1. Запуски с постоянной скоростью.
2. Запуски постоянного направления.
3. Запуски с любой скоростью и направлением, которыми достигается заданная цель.
4. Время, за которое снаряд пролетает определенный участок своей траектории.
5. Точность запуска межконтинентальных баллистических ракет.
6. Закон сохранения энергии и движение ракети.

ELEMENTS OF BALLISTICS FOR RACKETS WITH A LARGE RADUIS OF ACTION

(S u m m a r y)

The present paper deals with the problem of the motion of rackets, taking into account Newton's attraction field and the Earlh's curvature, and overlooking the friction in the atmospere.

Herein are exposed the following problems, related to the motion of rockets :

1) Launchings with constant speed,
2) Launchings with constant direction,
3) Launchings with any speed and direction by which a given target may be reached,
4) The time in which the missile covers a certain distance of its trajectory,
5) The accuarcy of the launching of intercontinental ballistic rackets,
6) The law of conservation of energy in the motion of the racket,

ELÉMENTS DE BALISTIQUES POUR LES FUSÉES Á GRAND RAYON D'ACTION

(Résumé)

L'étude s'occupe du problème de mouvement des fusées en tenant compte du champ d'attraction newtonien ainsi que de la courbure de la terre et en négligeant le frottement dans l'atmosphère.

On y traite les problèmes suivants relatifs au mouvement des fusées :

1) Lancements à une vitesse constante,
2) Lancements de direction constante,
3) Lancements à n'importe quelle vitesse et direction par lesquelles on peut atteindre la cible donnée,
4) Le temps où le projectile parcourt une certaine portion de sa trajectoire,
5) La précision du lancement des fusées balistiques intercontinentales.

En guise d'application on s'y occupe de vérifier les données publiées relatives à la fusée balistiques soviétique lancée le 20 janvier 1960.

ELEMENTE DER BALISTIK FÜR RAKETEN MIT GROSSEN WIRKUNGSBEREICH

(Zusammenfassung)

Die Arbeit behandelt die Bewenung der Raketen unter Berücksichtigung des Auziehungskraftfeldes von Newton und der Erdriimmuung ; die Reibung in der Atmosphhäre wir vernachlässigt.

1) Schnellungen (Anwerfen) mit Konstanter Geschwindigkeit,
2) Schnelungen mit Konstanter Richtung.
3) Schnellungen mit jedwelcher Geschwinddigweht und Richtung durch welche ein gegebens Biel erreicht wird,
4) Die Zeit in welcher das Gesches eine gewisse Strecke seiner Flugbahn durch fliegt,
5) Die Präzision der Schnellung, interkontinentaler baliistischer Raketen,
6) Das Gesetz der Energiekonservierung in der Raketenbewegung,

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

L'OXYDATION PHOTO — ET PHONOCHIMIQUE DE CERTAINS HYDROCARBURES

par

IOSIF DRIMUS, VICTORIA PRIBNOW, RADU AVRAM et ION FLOREA

L'oxydation des hydrocarbures paraffiniques en phase liquide est un procéssus complexe, dans lequel de nombreuses réactions consécutives et parallèles entrent en jeu. Actuellement on admet d'une manière unanime que les premiers produits qui apparaissent dans le processus d'oxydation en phase liquide sont les hydroperoxydes, formés selon le mécanisme suivant :

$$R^{\cdot} + O_2 \longrightarrow RO_2^{\cdot}$$

$$RH + RO_2^{\cdot} \longrightarrow RO_2H + R^{\cdot}$$

Les hydroperoxydes formés se décomposent, en partie sous l'influence de la chaleur, et en partie à la suite d'une oxydation plus poussée, en donnant naissance ä des radicaux nouveaux.

Par exemple :

$$RO_2H \longrightarrow RO^{\cdot} + HO^{\cdot}$$

$$RO. + RH \rightarrow ROH + R^{\cdot}$$

$$HO^{\cdot} + RH \rightarrow H_2O + R.$$

Les réactions qui interrompent ce processus, par exemple :

$$R^{\cdot} + R^{\cdot} \longrightarrow R_2$$

$$R^{\cdot} + RO_2^{\cdot} \rightarrow RO_2R$$

$$RO_2^{\cdot} + RO_2^{\cdot} \rightarrow RO_2R + O_2$$

présentent une moindre importance, et ne sont pas capables de freiner la réaction initiée.

Le simple barbotage à l'air de la paraffine fondue, à la température de 100—140°C, ne déclenche pas la rèaction d'oxydation, mais en présence de certains catalyseurs (Mn, Co), de certains promoteurs chimiques (pero-

xyde de benzoyle), de la lumière (rayons ultraviolets), des radiations γ, ou des ondes ultrasonores, la réaction est initiée et progresse jusqu'à certaines limites (parfois même jusqu'à la formation d'un taux de 50—60% CO_2 et H_2O, en plus des goudrons).

Dans le cas où l'oxydations est effectuée en présence de catalyseurs métalliques, ceux-ci demeurent dans la masse réactante, ce qui agit sur les réactions ultérieures.

Ainsi (8) :

$$Mn^{++} + RO_2H \rightarrow RO^{\cdot} + HO^{-} + Mn^{+++}$$

$$Mn^{+++} + RO_2H \rightarrow RO_2^{\cdot} + H^{+} + Mn^{++}$$

$$H^{+} + HO^{-} \rightarrow H_2O$$

respectivement

$$2RO_2H \xrightarrow[\downarrow\ Mn^{++}\ |]{|\ Mn^{+++}\ \uparrow} RO_2^{\cdot} + RO^{\cdot} + H_2O$$

Pour éviter cette réaction nous nous sommes ingéniés è étudier certains aspects de l'initiation de la réaction d'oxydation en utilisant é cet effet les rayons ultraviolets et les ondes ultrasonores.

Afin de simplifier d'avantage le problème, les oxydations proprement dites n'ont pas été effectuées dans le champ même de radiations (ultraviolettes et ultrasonores), mais en appliquant la technique de la pré-irradiation, étudiée par nous en 1958 (4) sur des radiations γ.

A. ESSAIS PAR PRÉ-IRRADIATION À L'AIDE DE RAYON ULTRAVIOLETS

La paraffine à point de fusion 52°C, provenant de pétroles roumains, a été irradiée par la lumière ultraviolette, dans des récipients de quartz, en contact avec l'air, à une température de 80°C, pour une durée de 2—4 h. Le produit préirradiée dans ces conditions a été soumis à loxydation à 140°C, sous barbotage é 20 l d'air par heure et par 100 g de paraffine.

A des intervalles d'une heure on a déterminé l'indice de paroxyde et on est arrivé à la conclusion qu'une durée de pré-irradiation de 2 heures est insuffisante, tandis que le traitement prolongé durant 3 heures donne des résultats similaires à celui d'une durée de 4 heures (voire fig. 1).

Il est induitable que, au cours de l'intervalle de 2—4 h de pré-irradiation en présence des rayons ultraviolets, des radicaux du type $R^{\cdot}{=}C_nH_{2n}{+}1^{\cdot}$ sont formés. Au contact de l'oxigène atmosphérique, ces radicaux ont formé des hydroperoxydes $C_n\ H_{2n+1}\ O_2H$, qui ont été capables d'initier la réaction d'oxydation proprement dites, et d'assurer sa progression normale.

Le diagramme de la figure 2 démontre que la réaction de formation des hydroperoxydes est la réaction primaire, et que celle par laquelle sont formés les acides est une réaction ultérieure. Il résulte de même que, dans le cas où la réaction est initiée à l'aide des radiations ultra violettes, l'indice de peroxyde se maintient à des valeurs élevées, mais que, par con-

tre, en présence de catalyseurs à base de manganèse (qui décomposent les peroxydes, ainsi qu'il a été indiqué antérieurement), l'indice de peroxyde se maintient à des valeurs réduites.

De cette manière, en utilisant l'initiation par préirradiation on crée la possibilité d'obtenir des concentrés d'hydroperoxydes, ce qui présente

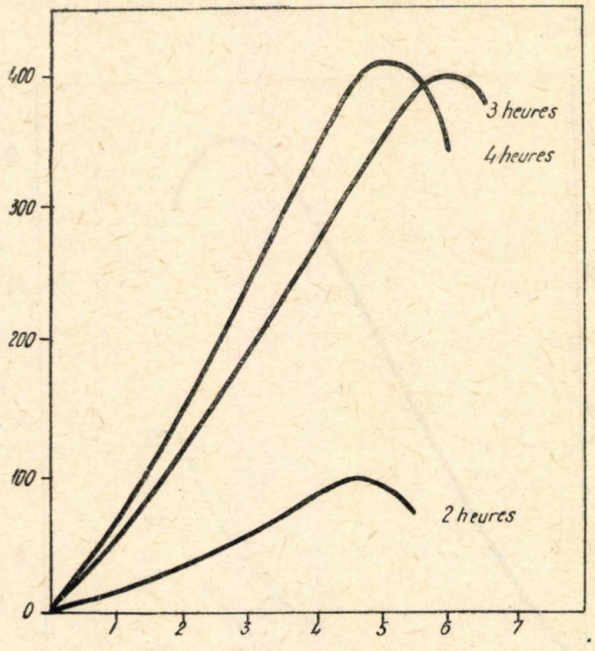


Fig. 1
x = heures ; y = ind. perox.

un intêret pratique considérable, surtout pour préparer les alcools sulfatés, selon la réaction :

$$RO_2H + HNaSO_3 \rightarrow ROSO_3Na + H_2O$$

La concentration en hydroperoxydes peut être augmentée encore plus fortement si l'on effectue une extraction par le méthanol dans lequel les hydoperoxydes sont solubles. Le concentré ainsi obtenu a présenté un indice de peroxyde de plus de 1 500. Les essais de provoquer l'explosion de ce concentré, à l'aide de chocs thermiques ou mécaniques, ont donné des résultats négatifs.

L'influence exercicée par la pré-irradiation en la présence ou en l'absence de l'air est illustrée dans la figure 1.

On remarque le fait que la pr-irradiation par les rayons ultraviolets, sous un vide de 10^{-2}, ou dans une atmosphère de méthane à 99,8% donne les mêmes résultats que dans la présence de l'air.

Ce phénomène pourrait être attribué, à première vue, à la formation de certains radicaux très stables (générés par un processus photochimique),

mais il est plus probable que l'oxygène n'a pas été totalement éliminé et que, par exemple, les traces d'oxygène contenues dans le méthane ont suffi à former les hydroperoxydes nécessaires pour initier la réaction.

Des recherches ayant pour but d'élucider définitivement ce problème sont en cours d'exécution.

On a étudié la remanence de la susceptibilité d'oxydation de la paraffine pré-irradiée.

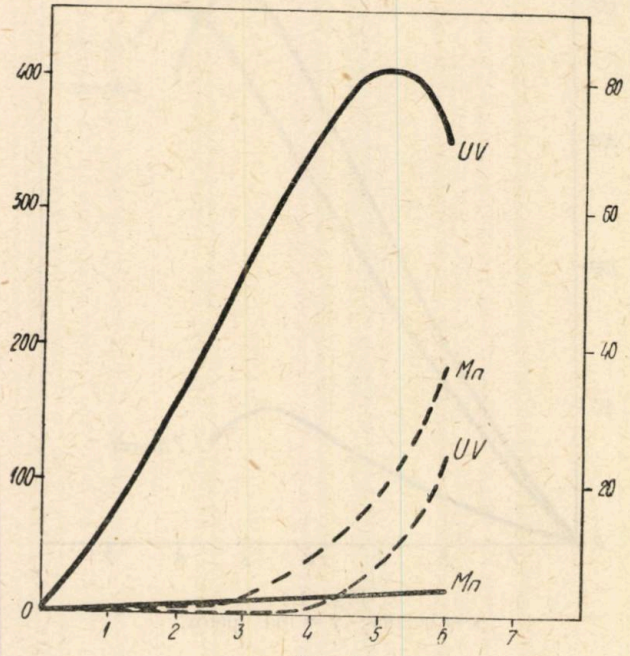


Fig. 2
x = heures ; y = ind. perox.

Des échantillons pré-irradiés durant 3 heures ont été conservés sous forme solide pendant une période de six mois, sans aucune diminution de leur susceptibilité d'oxydation, ce qui dénote la stabilité élevée des peroxydes formés au cours de la pré-irradiation.

La remanence de la susceptibilité d'oxydation (à froid et à chaud) contribue à l'applicabilité industrielle de la pré-irradiation.

B. ESSAIS DE PRÉ-IRRADIATION A L'AIDE D'ONDES ULTRASONORES

Il y a quelques dizaines d'années, lors de la découverte des effets exercés par les ondes ultrasonores sur certaines réactions chimiques, on a enregistré une tendance à exagérer leurs possibilités d'application.

Cette période a été suivie par une autre, au cours de laquelle on a manifesté une reserve aussi exagérée, justifiée en partie par le fait que l'énergie ultrasonore revenait à un prix fort élevé, inacceptable pour la chimie appliquée.

Actuellment on constate un revirement d'opinion, manifesté par un regain d'intérêt pour la phonochimie, motivé par le progrès technique réa-

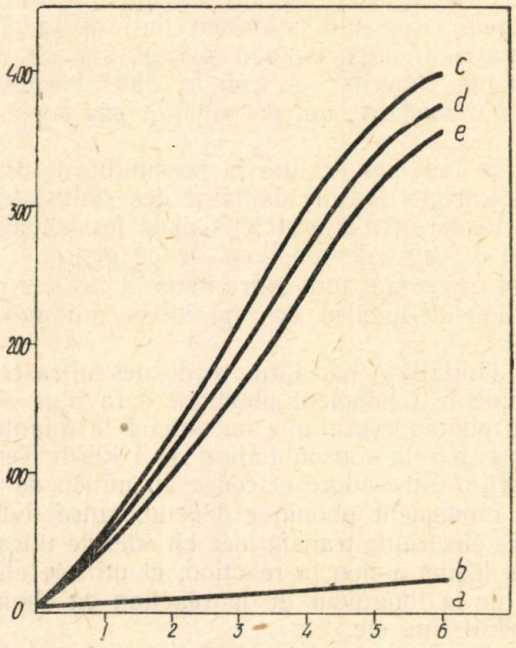


Fig. 3
x = heures ; y = ind. perox.

lisé, la force d'émission accrue des générateurs d'ultrasons (10), et la réduction du prix de revient, ce qu, aura certainement pour effet des applications courantes dans la technique chimique.

Lorsqu'une onde ultrasonore, d'intensité suffisante pour produire la cavitation, se propage dans un liquide, elle y peut initier différents phénomènes d'ordre chimique. On estime donc que ces effets (2, 3, 5, 6) sînt une conséquence du phénomène de cavitation.

Les conceptions modernes concernant le mécanisme de l'action chimique des ondes ultrasonores sont basées sur une série de théories (7), telles que : a) la théorie mécanique de la cavitation, qui soutient la possibilité d'une rupture des liaisons chimiques, due à l'action des forces générées par l'annihilation des bulles de cavitation ; b) la théorie de la cavitation par résonance, qui considère que les processus chimiques sont provoqués par les forces mécaniques qui apparaissent à la résonance entre la fréquence propre de pulsation des bulles de gaz contenues dans le liquide et la fréquence des ondes ultrasonores utilisées ; c) la théorie photoélectrique

de la cavitation, selon laquelle les effets chimiques sont dus aux décharges électriques produites entre les parois des bulles de gaz et la surface de la cavité.

Les hautes tensions électriques rpoduites génèrent des radiations dans le spectre visible et ultraviolet, connues sous le nom de luminiscence ultrasonore.

Le coû éelvé de l'énergie ultrasonore fait qu'il soit difficile le prévoir, dans un proche avenir, son utilisation en tant qu'agent promoteur des réactions à consommation importante d'énergie, surtout dans le domaine de l'industrie chimique, moyenne et grande, dans lesquelles les produits ont un prix de revient modeste, qui ne pourrait pas supporter de pareilles charges.

Néanmoins, il ne faut pas exclure la possibilité d'utiliser sur l'échelle la plus large les ultrasons dans le domaine des synthèses fines (donnant des produits finis chers), et d'autant plus dans les travaux de recherches scientifiques, quand il s'agit de réactions de ce genre.

La situation est cependant tout autre dans le cas des réactions enchaînées, pour l'initiation desquelles des quantités minimes d'énergie sont suffisantes.

L'économie de l'initiation par l'intermède des ultrasons sera d'autant plus avantageuse que le rendement phonique sera plus accru.

Par rendement phonique pratique on entend la quantité de substance qui peut être obtenue par la consommation de 1 kW/h d'énergie électrique transformée en énergie ultrasonore et cédée au milieu de réaction.

La valeur du rendement phonique dépend, entre autres facteurs, de la quantité d'énergie électrique transformée en énergie ultrasonore absorbée par le milieur dans lequel a lieu la réaction, et utilisée effectivement pour initier la réaction, de la longuieur de la réaction en chaîne, de la masse moléculaire du produit fini, etc.

La portion du prix de revient du produit fini, imputable au processus d'initationè décroit en proportion de l'augmentation du rendement phonique pratique.

Par rapport à l'initiation des réactions à l'aide d'agents chimiques, celle réalisée par les ondes ultrasonores présente l'avantage de ne pas polluer par des résidus de promoteur le milieu de réaction.

Par comparaison aux réactions photochimiques, cette méthode permet d'utiliser des récipients métalliques, du fait que ceux de verre ou de quartz ne sont plus nécessaires, ce qui constitue un avantage indéniable.

Enfin, par rapport à l'initiation dans un champ de radiations ionisantes, l'initiation phonochimique est avantageuse en tant qu'elle ne comporte aucun danger d'irradiation et, conséquemment, n'impose pas des moyens coûteux de protection contre les radiations nocives.

Au cas ou il sera possible de construire des générateurs d'ultrasons, capables de résister aux produits contenus dans les réacteurs, l'initiation phonochimique pourra être réalisée dans des appareils métalliques fermés, aux parois épaisses.

En prenant pour base ces considérations théoriques on a essayé d'initier à l'aide d'un champ ultrasonore, la réaction d'oxydation de la paraffine

des pétroles roumains (conforme à la norme d'Etat STAS), ainsi que d'un adduct à l'aurée, obtenu à partir d'un pétrole lampant.

Les études nécessaires ont été effectuées à des fréquences variées des ondes ultrasonores, notamment 22 kHz, 350 kHz et 1 MHz, et à des intensités de sonorité différentes : pour 22 kHz . . . 3,5 W/cm^2 et pour 350 kHz . . . 3 W/cm^2. A la fréquence de 1 MHz, l'intnsité de l'ultrason a été exprimée par la valeur du courant anodique (0,3 A) (1).

Dans tous les cas on a obtenu un effet identique, soit l'oxydation des alkanes aux acides gras, en passant par la formation de hydroperoxydes.

Les courbes représentant l'augmentation des indices de peroxyde et d'acidité sont similaires à celles obtenues par l'initiation photochimique.

Les analyses de laboratoire ont indiqué la formation des hydroperoàydes au cours même du traitement par les ultrasons, en présence de l'oxygène atmosphérique.

Des résultats similaires ont été obtenus à l'analyse de l'adduct à l'aurée, préparé du pétrole lampant.

Cet effet présente une remanence en proportion de 100% après 168 h.

Dans ces travaux on a utilisé :

1) un générateur d'ultrasons à traducteur de quartz, fréquence de 1 MHz, et surface radiante de 12,56 cm^2. L'intensité sonore a été évaluée à l'aide de l'intensité du courant anodique vu que, dans les conditions de travail choisies, l'intensité de ce dernier se maintenait à 0,3 A par rapport à 0,5 ce qui, du fait de la construction de l'appareil, correspond à environ 20 W/cm^2.

2) Un second générateur d'ultrasons, à traducteur de quartz, fréquence de 350 kHz, surface radiante de 38,46 cm^2, et intensité sonore de 3 W/cm^2.

3) Un générateur d'ultrasons à traducteur magnétostrictif, fréquence de 22 kHz, surface radiante de 12 cm^2, et intensité sonore de 3,5 W/cm^2.

En qualité de milieu de contact entre le récipient contenant le produit soumis à l'action des ultrasons et le traducteur on a utilisé pour les vibrateurs pièzoélectriques : de l'huile de transformateur pour le générateur 1), de l'huile de paraffine pour le générateur 2), et de l'eau pour la traducteur magnétostrictif.

Le traitement des substances par les ultrasons a été effectuée dans un récipient spécial (11), constitué par un cylindre de verre à fond perméable pour l'énergie ultrasonore (11).

Aux fréquences de 350 kHz et 1 MHz, la paraffine a été traitée à l'état solide, sa fusion étant réalisée par l'effet de la propagation des ultrasons dans la masse de la substance.

Au cours du processus, la température s'est maintenue à 86—89°C, ce qui concorde avec les valeurs trouvées dans la littérature (9). Dans la masse de paraffine fondue on a remarqué, pendant toute la duréeé du traitement, l'apparition du phénomène de cavitation, plus intense à la fréquence de 350 kHz ; les noyaux gazeux étaient formés par l'air atmosphérique inclus dans le liquide pendant la fusion de la paraffine.

A la fréquence de 22 kHz, la paraffine a été fondue au péralable, vu que la fusion était très faible, au fond du récipient.

Durant la traitement appliqué au produit ramolli, à l'état liquide seulement au fond du récipient, la température s'est maintenue à 45°C. Les échantillons de paraffine ont été traités par les ultrasons durant 3 heures, et l'adduct à l'urée (du pétrole lampant), durant 1 heure.

L'oxydation des produits soumis au préalable à l'action des ultrasons a été effectuée à une température de 140°C, dans un courant d'oxygène, à un débit de 10 l/h.cm^2.

CONCLUSIONS

1) La réaction d'oxydation des alkanes peut tre initiée par préirradiation à l'aide de radiations ultraviolettes, ou par des ondes ultrasonores.

2) Ce phénomène se caractérise par sa remanence.

3) Les rendements quantique et phonique sont très élevés.

4) On obtient pour l'indice de peroxyde des valeurs beaucoup plus grandes que dans le cas des catalyseurs usuels, àbase de manganèse, dufait que la réaction a lieu selon un mécanisme différent.

5) On peut obtenir (surtout par extraction) des concentrés d'hydroperoxydes, intéressants du point de vue industriel.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Bergmann, L. Der Ultraschall, Hirzel V., Stuttgart,* 1954, 850.

2. *Biquard, P.* Les ultrasons, Paris, 1951.

3. *Brett, H.W.W. et Jellinek, H.H.J.* Dégradation des moyécules à longue chaine à l'aide des ondes ultrasonores. Part V. La cavitation et l'effet des gaz dissolvés f. Polym. Sci. 1954, 8, 44—459.

4. *Drimus, I., Ioanid, G., Drăgut, A., Vasilesco, P., Dumitresco, V.* Oxydation des paraffines sous l'effet des radiations de cobalt 60, Nations Unies, L'tilisation de l'énergie atomique, Genéve, Sept. 1958, Col. 11, 614—624.

5. *Del Duca, M. Yeager, E., Davies, M. O. et Hovorka, F.* Méthodes utilisant les isotopes pour l'étude de la formation phonochimique de l'eau oxygénée, J. Ac. Soc. Am. 30 (1958), 4, 301—307.

6. *Ebert, M.* La chimie des radiations de l'eau, un point de départ dans l'étude des radiations appliquées à la biologie, Angew. Chem. 3 (1955), 169.

7. *Elpiner J. E.* Le mécanisme des effets chimiques des ondes ultrasonores. Akusticeski Jurnal 2 (1959), 133—142.

8. *Jungers, I. C.* Cinétique chimique appliquée, Paris, 1958.

9. *Möckel, P.* Les effets chimiques des andes ultrasonores. Chem. Techn. 2 (1956), 71—78.

10. *Palmé, J.* Les ultrasons en génie chimique. Chim. et Ind. (suppl.) 81 (1959), 1, 8—13.

11. *Prudhomme, R. O.* Sur la dépolymérisation par les ultrasons. Atti del Convegno Internazionale di Ultraacustica, Roma 1950, 279—283.

ФОТО И ФОНОХИМИЧЕСКОЕ ОКИСЛЕНИЕ НЕКОТОРНЫХ УГЛЕВОДОРОДОВ НЕФТИ

(Резюме)

В этой работе изучается реакции окисления некоторных технических алканов, которых содержат от 10 до 40 атомов углерода в молекуле, в жидком состояние, в отсутствие металлических катализаторов, или химических инициаторов, в поле ультрафиолетовых излучение и в ультразвуковом поле от 22 Кг. до 1 Мг.

Полученные резултаты можно прнменять в технике получения алкилпероксидов, спиртов и кислот жирново ряда.

THE PHOTO — AND PHONOCHEMICAL OXIDATION OF CERTAIN PETROL-HYDROCARBONS

(Summary)

The initiation of the oxidation recation by certain commercial alkanes with 10—40 C-atoms in the molecule has been investigated in liquid phase, in the absence of metallic catalysers or chemical promoters, in an ultraviolet-rays field and in ultrasonic fields between 22 KHz. and 1 MHz.

The thereby obtained results may afford a means of manufacturing alkylperoxides alcohols and fatty acids.

L'OXYDATION PHOTO ET PHONOCHIMIQUE DE CERTAINS HYDROCARBURES DU PÉTROLE

(Résumé)

Dans cet ouvrage on étudie l'initiation de la reaction d'oxydation de certains alkanes techniques contenant 10—40 atomes de carbone dans la molécule, en phase liquide, en l'absence des catalyseurs métalliques ou des

promoteurs chimiques, dans le champ de radiations ultraviolettes et dans les champs ultrasonores, de 22 kHz, a 1 MHz.

Les résultats obtenus sont susceptibles d'applications dans la technique de la fabrication des alkylperoxydes des alcools et des acides.

OXIDIERUNG GEWISSER ERDÖLKOHLENWASSERSTOFFE UNTER DER EINWIRKUNG VON UV-STRAHLUNGEN UND ULTRASCHALLWELLEN

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wurde die Möglichkeit erforscht, die Oxidierungsreaktion gewisser technischer Alkane, mit 10—40 C-Atomen in der Moleküle, in flüssiger Phase, ohne metallischen Katalysatoren oder chemischen Anregern, in einem UV-Strahlenfeld und in Ultraschallfeldern zwischen 22 KHz. und 1 MHz, einzuleiten.

Die dabei erlaugten Ergebnisse können praktische Anwendungen auf dem Gebeit der Herstellung von Alkyperoxyden, Alkoholen und Fettsäuren finden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

ON MASS TRANSFER IN RECTIFICATION OF, MIXTURES

E. RUCKENSTEIN

The process of mass transfer in a rectification column is usually described by means of a diffusion model in which it is assumed that the mass transfer between the phases is determined by the concentration differences between the bulk of the fluid and the interface. The mechanism of this transfer process has been presented in several ways. The simplest one is given by the two-film model [1]. To use the language of this diffusion model, one may say that the molecules of the more volatile component diffuse through the liquid phase film; after reaching the interface they vapourise and then diffuse through the vapour phase film. The reverse is true for the molecules of the less volatile component. The other diffusional descriptions of the mass transfer process do not make use of the simplifyng assumptions involved in the two-film model [2], [3], [4], [5].

Computations are usually carried out within the framework of the two-film model assuming that the fluxes of both components have the same value and opposite sign and that thermodynamic equilibrium is attained at the interface. Starting from these assumptions one obtains for the number of moles carried through a unit surface in unit time the well-known expressions

$$N = k'_V (y_i - y) = k'_L (x - x_i) = \frac{V}{s_c}\frac{dy}{dz} = \frac{L}{s_c}\frac{dx}{dz}, \qquad (1)$$

where the mass transfer coefficients k'_V and k'_L are independent of the mole fractions; x_i and y_i (the mole fractions at the interface) are the coordinates of a point on the equilibrium curve; y is the mole fraction in the bulk of the vapour phase and x — the same in liquid.

The experimental results obtained by Jackson and Ceaglshe [6] in a wetted wall rectification column have led to the conclusion that the coefficient k'_V is not independent of the mole fraction y. Similar observations have been made by Sawistowsky and Smith [7] for the case of rectification in packed columns.

In order to explain qualitatively the discrepancy between the conventional theory of rectification and the experiment, Sawistowsky and Smith [7] assume that in a rectification column there also appears, besides diffusional mass transfer a supplementary „mass transfer" due to vapour condensation and liquid vaporisation within the bulk of the phases,

both effects being due to heat transfer between the phases. Concerning the heat transfer between the phases in the cas of rectification, Sawistowsky and Smith write :

„There are two posibilities. If the rate of heat transfer is small, then insufficient heat is removed from the bulk vapour to keep it at its condensation point, and it will superheat. Also insufficient heat is supplied to the bulk liquid to keep it at its boiling point and it will subcool" and further on „On the other hand, if the rate of heat transfer is high, the vapour will cool to its condensation point and the liquid will heat to its boiling point. Beyond this stage, heat transfer will cause condensation in the bulk vapour and evaporation in the bulk liquid. Under these conditions additional mass transfer by thermal distillation will occur in the bulk phases".

These effects are indeed possible and can take place under certain given conditions. It should nevertheless be stressed that in order that a new phase may appear one needs superheating in the liquid and undercooling in the vapour. Especially in the case of nucleation in the homogeneous phase the curve describing the nucleation rate as a function of superheating respectively of undercooling is practically nyl up to a certain value at which it takes a very large — practically infinite — value [10], [11]. In the presence of an already builtup interface it is generally more probable that a diffusional process would take place towards this interface than that a new interface shoud appear as long as superheating or undercooling are not too large.

Since the cavities of a solid surface (in the case of vaporisation of a superheated liquid) and the protruding irregularities (in the case of condensation of undercooled vapour) may act as germs for the appearance of a new phase — provided certain conditions are fulfilled [12], [13] —, the packing in a packed column may possibly play an active part in the process considered by Sawistowsky and Smith. If we take into account the fact that the discrepancy with the conventional theory appears in the cases of wetted wall columns and packed columns as well, this means that neither the packing nor the hydrodynamical conditions are the main cause of this effect.

Thus the experimental results lead to the conclusion that the discrepancy is due to a specific process connected with rectification. Now the only process of this kind is the condensation-vaporisation process which can take place either at the inerface or, if the superheating of the liquid respectively the undercooling of the vapours are large enough, in the bulk of the phases *).

*) In the following we shall show that overheating in liquid may become large. We remark also that even if the temperature in the bulk of the liquid corresponds to saturation, the liquid is superheated in the thermal film. The appearance of this effect is due to the large value of Lewis' number for the liquid phase. Because of this large value the thickness of the thermal film is much larger than the thickness of the diffusion film, and hence the liquid is superheated in the thermal film. Since Lewis' number for the vapour phase is near to unity the two films have, in the vapour phase, practically the same thickness and the vapours' temperature is generally near the saturation one.

The estimations I made (see below) show that the heat quantity transferred by conductivity from the interface to the bulk of the liquid may be of the same order of magnitude as the heat quantity due to the condensation at the interface of the less volatile component, and that the heat flux transferred by conductivity towards the interface in the vapour phase is negligible. The heat quantity transferred to the liquid by conductivity may produce vaporisation in the bulk of the liquid, because in view of its great value it may lead to sufficiently large overheating in the liquid.

In other words, one may not always suppose (as in the conventional theory) that the whole heat quantity provided by the condensation (at the interface) of the less volatile component produces vaporisation (at the interface too) of the more volatile component. A part of the heat provided by condensation is transferred by conductivity to the bulk of the liquid where occurs a vaporisation process.

On the basis of the latter representation we shall establish in this paper appoximate equations for the rectification process. In the first section we shall assume that mass transfer between vapour and liquid is a diffusional process, but that condensation-vaporisation at the interface is influenced by heat transfer between the phases. In this manner one obtains the „diffusional term" of the mass transfer between the phases. The equations obtained are only approximately valid, because the interaction between the vapourisation in the bulk and the convective diffusion processes are not taken into consideration. The computation will be performed within the framework of the two-film theory. In the second section we shall show that the heat quantity transferred by conductivity from the interface to the liquid may be of the same order of magnitude as the heat quantity provided by the condensation at the interface of the less volatile component. In the third section we take into consideration in the mass transfer equation the vapourisation in the bulk of the liquid.

1°. Although the simplifying assumptions, underlying the two-film model are not whilly realistic, they may lead, at least sometimes, to correct results as to the dependence of the transfer rate on concentration. Consider thus two films of thicknesses δ and δ' respectively. According to the simplifying assumptions underlying the two-film theory we may write for the numbers of moles N_1 and N_2 of the two components transferred in unit time through an unit surface:

$$N_1 = uc_1 - D\frac{dc_1}{dr} \tag{2a}$$

$$N_2 = uc_2 - D\frac{dc_2}{dr} \tag{2b}$$

where N_1 and N_2 refer to the more volatile and the less volatile components respectively and do not vary across the film thickness, c_1 and c_2 are the pertaining molar concentrations; D is the diffusion coefficient and u the radial velocity component. N_1 and N_2 are not mutually inde-

pendent; a thermal balance establishes a relationship between them. The molecules of the less volatile component condense at the interface living off a certain heat quantity. The molecules of the more volatile component are vaporised absorbing the corresponding heat quantity. It should be noted that the heat flux transferred by conductivity towards the interface in vapour phase is not equal to the heat flux transferred into the liquid phase, the difference between these heat fluxes taking part in the vaporisation-condensation process which occurs at the interface. Denote by q the difference of the two heat fluxes; q might be positive as well as negative. Our numerical estimations have shown that it is negative and cannot be neglected.

A thermal balance at the interface leads thus to the following equation.

$$l_1 N_1 + l_2 N_2 + q = 0, \tag{3}$$

where l_1 and l_2 are the interface differences between the partial molar enthalpies in vapour and liquid phase for the two components of the mixture.

Adding (2a) and (2 b) and assuming that the total concentration c ($c=c_1+c_2$) varies slightly (a simplifying assumption which may be used safely for the vapour phase), one obtains

$$N_1 + N_2 = uc \tag{4}$$

Eqs. (3) and (4) lead to

$$u = \frac{N_1}{c}\left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) - \frac{q}{cl_2} . \tag{5}$$

Hence

$$N_1 = \frac{N_1}{c}\left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right) c_1 - \frac{q}{cl_2} c_1 - D\frac{dc_1}{dr} . \tag{6}$$

The solution of the differential equation (6) which for $r=r_i$ (r_i bieng the value of r at the interface) leads to $c_1=c_{1,i}$, is

$$c_1 = c_{1,i} \exp\left[\frac{-u(r_i - r)}{D}\right] + \frac{N_1}{u}\left(1 - \exp\left[-\frac{u(r_i - r)}{D}\right]\right) . \tag{7}$$

Since for $r=r_i-\delta$, $c_1=c_{1,m}$, where $c_{1,m}$ is the concentration of the more volatile component in the bulk of the fluid there follows

$$c_{1,m} = c_{1,i} e^{-\frac{u\delta}{D}} + \frac{N_1}{u}(1 - e^{-\frac{u\delta}{D}}) . \tag{8}$$

The transcendental eq. (8) yields the desired relationship connecting N_1, $c_{1,m}$ and $c_{1,i}$. Introduce a coefficient k_V defined by

$$k_V^{-1} = \frac{1}{u}(1 - e^{-\frac{u\delta}{D}}) . \tag{9}$$

We can thus write eq. (8) as follows:

$$N_1 = k_V \frac{c_{1,m} - c_{1,i}\left(1 + \frac{q}{cl_2 k_V}\right)}{1 - \frac{c_{1,i}}{c}\left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right)} . \tag{10}$$

If $\frac{u\delta}{D}$ is small enough, $\exp\left[-\frac{u\delta}{D}\right] \simeq 1 - \frac{u\delta}{D}$ and

$$k_V = \frac{D}{\delta} . \tag{11}$$

If $l_1 \approx l_2$ (which is the most frequent case), $u = -\frac{q}{cl_2}$ and

$$k_V^{-1} = \frac{cl_2}{q}\left(e^{\frac{q}{cl_2}\frac{\delta}{D}} - 1\right). \tag{12}$$

Hence either for sufficiently low u, or for $l_1 \approx l_2$, the coefficient k_V is independent of N_1. This has been the reason for introducing this coefficient. It is also noteworthy that for $l_1 \approx l_2$ and $q \to 0$ we obtain eq. (1).

Putting

$$c_{1,m} = yc, \; c_{1,i} = y_i c,$$

eq. (10) may be written as follows

$$N_1 = k_V'' \frac{y - y_i\left(1 + \frac{q}{l_2 k_V''}\right)}{1 - y_i\left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right)} . \quad (k_V'' \equiv k_V c) \tag{13}$$

Similar equations may be written using the same approximations (this time some of these approximations may be valid to a smaller extent) for the liquid phase too. We introduce now for the liquid phase the transfer coefficient k_L'' defined by

$$k_L''^{-1} = \frac{-1}{u'c'}\left(1 - e^{\frac{u'\delta'}{D'}}\right). \tag{14}$$

The number N_1 of moles transferred in unit time through a unit surface becomes thus

$$N = k_L'' \frac{x_i\left(1 - \frac{q}{l_2 k_L''}\right) - x}{1 - x_i\left(1 - \frac{l_1}{l_2}\right)} . \tag{15}$$

If $\frac{u'\delta'}{D'}$ is small enough as compared to unity, $e^{\frac{u'\delta'}{D'}} \approx 1 + \frac{u'\delta'}{D'}$ and k''_L becomes

$$k''_L = \frac{c'D'}{\delta'}. \tag{16}$$

If $l_1 \approx l_2$

$$k''^{-1}_L = \frac{l_2}{q}\left(1 - e^{-\frac{q}{c'l_2}\frac{\delta'}{D'}}\right) \tag{17}$$

2°. The quantity q can be computed by means of the following equation

$$q = \alpha_V (t_V - t_i) - \alpha_L (t_i - t_L) \equiv q_V - q_L, \tag{18}$$

where α_V and α_L are the heat transfer coefficients for the vapour and liquid phase respectively, t_V and t_L the pertaining temperatures.

Since for the vapour phase Lewis' number (the ratio of thermal diffusivity to the diffusion coefficient) is near to unity, the heat transfer coefficient α_V may be computed as a function of the mass transfer coefficient k'_V by means of the following equation *

$$\alpha_V = c_V \gamma_V \frac{k'_V}{c}, \tag{19}$$

where c_V is the specific heat of the vapour, γ_V its specific gravity and c the total molar concentration.

The heat transfer coefficient α_L in the liquid film, can be computed from:

$$\alpha_L = c_L \gamma_L \frac{k'_L}{c'}\left(\frac{a'}{D'}\right)^m, \tag{20}$$

where c_L is the liquid's specific heat, γ_L its specific gravity, c' the total molar concentration, a' the liquid's thermal diffusivity and m an exponent which has the values indicated below for several cases.

For the case of a wetted wall column with laminary flow of the liquid

$$\frac{1}{2} < m < 1.$$

The value $\frac{1}{2}$ corresponds to a sufficiently short column, whereas the value 1 corresponds to a sufficiently long one.

Indeed, for a sufficiently short column the penetration theory leads to a dependence of the form

$$\alpha_L \sim a'^{1/2}, \qquad k'_L \sim D'^{1/2},$$

* The effect of sensible heat fluxes connected with diffusion, effect which is negleted in equations (19) and (20), may be easily taken into consideration.

while for a sufficiently long one, one obtains easily

$$\alpha_L \sim \frac{a'}{d'} \qquad k'_L \sim \frac{D'}{d'}$$

where d' is the thickness of the liquid layer.

If the flow is turbulent, Dankwerts' renewal theory leads to

$$\alpha_L \sim a'^{1/2} \qquad k'_L \sim D'^{1/2}$$

and hence $m = \frac{1}{2}$.

In order to simplify computations, one might assume as a first order approximation that t_V and t_L correspond to saturation.

In this case the temperature differences $t_V - t_i$ and $t_i - t_L$ may be easily estimated. Starting from the thermodynamic equations

$$Py^* = \gamma_A P_A x\,, \qquad P(1-y^*) = \gamma_B P_B (1-x) \tag{21}$$

(where P is the pressure in the system, P_A and P_B the vapour pressures of the pure components, γ_A and γ_B the activity coefficients) and from the Gibbs-Duhem equation

$$x\left(\frac{\partial \ln \gamma_A}{\partial x}\right)_P + (1-x)\left(\frac{\partial \ln \gamma_B}{\partial x}\right)_P \approx 0\,, \tag{22}$$

one obtains

$$\frac{dt}{dy} = s_{x^*}\frac{x^*-y}{y(1-y)}\,, \qquad \left(\frac{dt}{dy} \approx \frac{t_i - t_V}{y_i - y}\right) \tag{23}$$

$$\left(\frac{1}{1-\alpha} - x\right)\frac{dt}{dx} = s_x\left[1 + x(1-x)\frac{d \ln \alpha}{dx}\right], \qquad \left(\frac{dt}{dx} \approx \frac{t_i - t_L}{x_i - x}\right) \tag{24}$$

where

$$s_x = 0.4343\left[x\frac{d \log P_A}{dt} + (1-x)\frac{d \log P_B}{dt}\right]^{-1}.$$

α is the relative volatility and x^*y, xy^* the coordinates of two points on the equilibrium curve.

The numerical estimations performed by means of the above equations for α_V, α_L, $t_V - t_i$ and $t_i - t_L$ usig equilibrium curves for n-hexane — benzen * lead to the conclusion that the heat quantity transferred by conductivity in the liquid phase may be of the same order of magnitude as the heat quantity due to the condensation of the number of moles of the less volatile component diffusing through the liquid film. This statement is

*) For this case $\frac{dt}{dx} = -40{,}8$ for $x = 0$ and $\frac{dt}{dx} \approx -1$ for $x = 1$.

valid for mixtures formed from components with sufficiently different boiling temperatures.

The heat quantity transferred by conductivity in the vapour phase is negligible. This conclusion is a consequence of the fact that Lewis' number is large for the liquid phase and ≈ 1 for the vapour phase.

3°. The other equations necessary for computing the effectiveness of a wetted wall or a packed column can be easily deduced. Considering that $l_1 \approx l_2 \equiv l$ and that the heat quantity q_L produces vaporisation in the bulk of the liquid, one can write *

$$d\,L\,x = d\,Vy = -N_1 s_c\,dz + \frac{q_L}{l} s_c\,y^*\,dz \tag{25}$$

$$d\,L\,(1-x) = dV\,(1-y) = -N_2 s_c\,dz + \frac{q_L}{l} s_c(1-y^*)\,dz, \tag{26}$$

where L is the liquid molar flow rate, V the vapour molar flow rate, s_c is the contact surface of the phases per unit height and z the distance from the column basis.

Multiplying (25) and (26) by l adding and taking into account eq. (3) and also that $q \approx -q_L$, one obtains

$$V = \text{const.}, \qquad L = \text{const.}$$

Eqs. (25) implied the following assumptions:

a) the vapours which evolve in the bulk of the liquid mix up at once with the bulk of vapour phase without influencing the state of the vapour film;

b) the concentration profile in the liquid film is not essentially influenced by the vaporisation process, occuring in the film.

The first assumption may be accepted if one can suppose that the vapours evolved in the bulk of the liquid go through the vapour film (in certain points) as jets which keep their individuality until they reach the bulk of the vapour phase. The interaction between the convective-diffusion and the vaporisation in the bulk processes will be discussed in the third part of this series of papers. (The second paper will be devoted to the nonadiabatic rectification).

In a first approximation one may use the eqs.:

$$dLx = dVy = \left[N' + \frac{q_L}{l}(y^* - x_i)\right] s_c\,dz, \tag{27}$$

---

* If the sensible heat $\frac{Lc'_L}{s_c}\frac{dt_L}{dz}$ is not negligible as compared to q_L we must replace equation (25) by

$$dLx = dVy = -N_1 s_c\,dz + \left(\frac{q_L}{l} + \frac{Lc'_L}{ls_c}\frac{dt_L}{dz}\right) s_c\,y^*\,dz$$

where

$$N' \approx \frac{Dc}{\delta}(y_i - y) \approx \frac{D' c'}{'\delta}(x - x_i). \tag{28}$$

Since $y^* - x_i$ may have a maximum, the ratio

$$\frac{V\dfrac{dy}{dz}}{N'} = s_c\left[1 + \frac{q_L}{N' l}(y^* - x_i)\right]$$

may have also a maximum.

This conclusion is in agreement with Sawistovsky's and Smith's experimental observations.

NOTATIONS

a — thermal diffusivity in the vapours,
a' — thermal diffusivity in the liquid,
c_1 — molar concentration of the more volatile component in the vapours,
c_2 — molar concentration of the less volatile component in the vapours,
$c_{m,1}$ — molar concentration of the more volatile component in the bulk of the vapour phase,
$c_{1,i}$ — molar concentration of the more volatile component in the vapours at the interface,
c — molar total concentration in the vapours,
c'_1, c'_2, $c'_{m,1}$, $c'_{1,i}$, c' — molar concentration in the liquid,
c_V — specific heat of the vapours,
c_L — specific heat of the liquid,
D — diffusion coefficient in the vapours,
D' — diffusion coefficient in the liquid,
k_V — mass transfer coefficient in the vapour phase,
k_L — mass transfer coefficient in the liquid phase,
l_1, l_2 — the differences between the partial molar enthalpies in vapour and liquid phase for the two components of the mixture,
L — the molar flow rate of the liquid,
P — the pressure,
P_A, P_B — the vapour pressure of the pure components,
r — distance to the tube axis,
s_c — contact surface between phases per unit height,
t_V — the temperature in the bulk of the vapours,
t_L — the temperature in the bulk of the liquid,
t_i — the temperature at the interface,
u, u' — radial velocity component in the vapour and liquid phase,
V — the molar flow rate of the vapours,
z — distance to the column basis,

x — mole fraction of the more volatile component in the bulk of the liquid,
x_i — mole fraction in the liquid phase at the interface,
y — mole fraction in the bulk of the vapours,
y_i — mole fraction in the vapour phase at the interface,
α — relative volatility,
α_L — heat transfer coefficient in the liquid phase,
α_V — heat transfer coefficient in the vapour phase,
γ_L — specific gravity of the liquid,
γ_V — specific gravity of the vapours.
γ_A, γ_B — activity coefficients.

REFERENCES

1. *W. G. Whitman,* Chem. Met. Eng. *29,* 147, 1923.
2. *J. W. Westhaver,* Ind. Eng. Chem, *34,* 126, 1942.
3. *W. Kuhn,* Helv. Chhim. Acta, *25,* 252, 1942.
4. *P. V. Danckwerts,* Ind. Eng. Chem. *43,* 1460, 1951.
5. *E. Ruckenstein,* Dokladî Akad. Nauc SSSR *102,* nr. 3, 1955.
6. *M. L. Jackson, N. H. Ceaglshe,* Ind. Eng. Chem. *42,* 1188, 1950.
7. *H. Sawistowsky, W. Smith,* Ind. Eng. Chem. *51,* 915, 1959.
8. *E. Kirschbaum,* Distilier und Rektifiziertechnik ed. 2, Springer, Berlin, 1950.
9. *I. O. Garcia,* Anales real soc. espan. fis. y quim, 48 B, 449, 1952 (quoted in [7]).
10. *W. E. Garner,* Chemistry of the solid state, Butterworths scientific publications, London, 1955.
11. *J. W. Westwater,* in „Advances in Chemical engineering" Editors T. B. *Drew amd J. W. Hoopes,* vol. I, Academic Press, 1956.
12. *E. Ruckenstein,* Studii şi cercetări de energetică *8,* 7, 1958.
13. *E. Ruckenstein,* Revue de physique *5,* 405, 1960.
14. *O. Redlich, A. T. Kister,* Ind, Eng. Chem. *40,* 341, 1948.

К ВОПРОСУ О ПЕРЕНОСЕ МАССЫ В СЛУЧАЕ РЕКТИФИКАЦИИ СМЕСЕЙ

(Резюме)

Ряд экспериментальных данных, полученных в последнее время, приводят к выводу, что существует несоответствие между классической теорией переноса массы в случае ректификации и опытом. Это несоответствие можно объяснить, если принять во внимание перенос тепла в двух фазах. Тот факт, что отношение между коэффициентом температуропроводности a и коэффициентом диффузии D имеет большие значения для жидкой фазы, привел нас к выводу,

что количество тепла, переходящее в результате теплопроводности в жидкость, может быть той же величины, что и количество тепла, полученное при конденсации на поверхности раздела потока менее летучего компонента. Поэтому мы считаем, в первой части работы, что перенос массы между парообразной и жидкой фазами является диффузионным процессом, но что процесс конденсации испарения, происходящий на поверхности раздела, находится под влиянием этого переноса тепла. Кроме процесса передачи массы диффузией ежно учитывать в конечных уравнениях и процесс испарения, происходящий в массе жидкой фазы, испарение возбужденное количеством тепла переданным кондутивностью в жидкость.

ON MASS TRANSFER IN RECTIFICATION OF MIXTURES

The estimations made by the author have shown that one may not always suppose (as in the conventional theory) that the whole heat quantity provided by the condensation (at the interface) of the less volatile component produces vaporisation (at the interface too) of the more volatile component. A part of the heat provided by condensation is transferred by conductivity to the bulk of the liquid where occurs a vaporization process.

On the basis of the latter representation the author establishes approximate equations for the rectification process. The theory is in agreement with Sawistovsky and Smith experimgental results.

SUR LE TRANSFERT DE MASSE DANS LE CAS DE LA RECTIFICATION DES MELANGES

(Résumé)

Des résultats expérimentaux obtenus ces derniers temps ont montré qu'il existe une discordance entre la théorie classique du transfert de masse dans le cas de la rectification, et l'expérience. Cette non-concordance peut être expliquée si l'on prend en considération le transfert de chaleur dans les deux phases. L'auteur arrive a la conclusion que le flux de chaleur qui passe dans le liquide par conductivité thermique, peut être du même ordre de grandeur que la quantité de chaleur provenant de la condensation à l'interface, du flux de constituant moins volatil. C'est pourquoi, dans la première partie de son travail, l'auteur considère que le transfert de masse, entre les phases vapeur et liquide, est un processus de diffusion, mais que le processus de condensation-vaporisation, qui a lieu à l'interface, est influencé par ce transfert de chaleur. En dehors du processus de transfert de masse par diffusion, on tient compte dans le équations finales de l'évaporation qui a lieu dans la masse du liquide, vaporisation provoquée par la quantité de chaleur qui est transmise par conductivité dans le liquide.

UBER DEN STOFFAUSTAUSCH BEI DER REKTIFIZIERUNG VON GEMISCHEN

(Zusammenfassung)

Versuche, die in letzter Zeit durchgeführt wurden, haben Unstimmigkeit zwischen der klassischen Theorie des Stoffaustausches und den experimenttelen Ergebnissen gezeigt. Diese Unstimmigkeit kann durch Berüchsichtigung des Wärmeüberganges in den zwei Phasen erklärt werden. Der Varfasser zieht den Schluss dass die infolge der Wämeleitung in die Flüssigkeit gelangende Wärmemenge, von der gleichen Grossenordnung sein kann, wie die durch Kondensation des schwersiedender Bestandteiles an der Trennfläche freiwerdende. Deshalb wird im ersten Teil der Arbeit der Stoffaustausch zwischen Flüssigkeit und Dampf wohl als Diffussionsvorgang betrachtet doch beeinflusst der Wärmeübergang den an der Trennfläche Stattfindenen Kondensations-Verdampfungsvorgang. In den Endgleichungen wird, ausser dem Stofaustausch durch Diffusion die Verdampfung die in der Masse der Flüssigkeit stattfindet berüchsichtigt. Diese Verdampfung ist auf die Wärmemenge zurüchzüfuhren, die infolge der Wärmeleitung in die Flüssigkeit gelangt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

MODELAREA COLOANELOR DE SCHIMB IONIC

V. PĂRĂUȘANU, FL. DANEȘ

Tehnica modernă cere substanțe de un grad de puritate din ce în ce mai ridicat. În ultimul timp una dintre metodele care a căpătat o largă aplicabilitate în acest scop o constituie purificarea substanțelor prin intermediul rășinilor schimbătoare de ioni. Această metodă se aplică cu un deosebit succes în izomorfism, sau în cazurile asemănărilor chimice foarte înaintate dintre componentul principal și impuritate, adică tocmai acolo unde metoda cristalizării sau a topirii zonale nu dă rezultate satisfăcătoare [1, 2, 3].

Pentru purificarea acestor sisteme se recomandă folosirea schimbătorilor de ioni cu proprietăți selective, dar acest lucru este greu de realizat tocmai datorită marii asemănări chimice între constituienți cît și datorită faptului că regenerarea acestui gen de schimbători este deosebit de dificilă.

În principiu purificarea prin schimb ionic este posibilă pentru orice sistem în care afinitatea ionitului este mai mare pentru impuritatea decît pentru componentul principal, adică pentru toate procesele a căror constantă de echilibru este supraunitară.

Calculul coloanelor în care se realizează schimbul ionic în scopul arătat mai sus se poate face prin mai multe metode. Cele mai multe dintre ele pleacă de la ecuațiile fizice ale cineticii schimbului de ioni completate cu bilanțuri diferențiale de materiale și uneori cu ecuații hidrodinamice [4, 5, 6]. Toate aceste metode sînt deosebit de complicate și valabile numai pentru cazuri particulare, după cum predomină ca mecanism cinetic difuzia în film, în granulă sau difuzia longitudinală și după regimul hidrodinamic de curgere al soluției prin coloană.

Singura metodă generală, aplicabilă fără distincție la orice operație unitară de schimb ionic, este cea a unităților teoretice de echilibru (UET). Această metodă presupune coloana ca fiind formată dintr-un număr de unități, în care lichidul ce curge este în echilibru cu porțiunea respectivă de ionit. Metoda unităților de echilibru este cu totul asemănătoare metodei talerelor teoretice, folosită într-o serie de operații unitare ca: extracția, distilarea, etc.

Metoda este corectă numai în cazul unor procese ce ajung repede la echilibru [1], cum ar fi schimbul între cationii anorganici. Nu se poate

însă introduce noțiunea de „unitate teoretică de echilibru" în cazul schimburilor unor cationi organici (sau anorganici complexi voluminoși), sau în cazul mediilor neapoase, deoarece în acest caz procesele de schimb de ioni decurg mult prea lent.

Aplicarea metodei UET la proiectarea coloanelor de schimb implică două etape:

I. Determinarea teoretică sau experimental a lungimii unei UET;

II. Calcularea curbei de eluare, pentru o coloană cu un număr dat film, relația:

Pentru prima etapă, o serie de studii dau lungimea UET în funcție de parametrii de lucru d_p (diametrul granulei), c_0 (concentrația globală a soluției), q_0 (capacitatea ionitului), v (viteza lineară de curgere), ε (volumul liber specific), K (concentrația de echilibru a schimbului), μ (viscozitatea soluției), ϱ (densitatea soluției), T (temperatura), D-coeficientul de difuzie (D_l — în film, D_s — în granulă).

Astfel Nachod [7] indică, pentru cazul în care predomină difuzia în film, relația:

$$UET = \frac{v}{d_r} Re^{-n} Sc^{-m} \tag{1}$$

în care, numărul lui Reynolds $Re = \dfrac{v d_p \varepsilon}{(1-\varepsilon)\mu}$ (2)

numărul lui Schmidt $Sc = \dfrac{\mu}{\varrho D}$ (3)

Pentru unele cazuri particulare [8] s-a stabilit $n = 0{,}4$, $m = 0{,}6$, sau [9] $n = 0{,}5$ și $m = 0{,}5$. Se pare însă că coeficienții m, n nu sînt constanți. S-a stabilit [7] că coeficientul n variază în funcție de Re, pînă la valori mici în cazul unor cifre Re foarte mari.

În orice caz, se poate considera că UET crește o dată cu creșterea vitezei de curgere și a diametrului granulei.

Temperatura influențează mult UET, mai ales prin intermediul viscozității și al coeficientului de difuzie; UET variază proporțional cu puterea patra a temperaturii.

Austerweil [10] indică în cazul izotermei de echilibru linear o formulă mai precisă pentru calculul unei UET:

$$UET = 0{,}85\, d_p + 0{,}0355 \frac{K v d_p^2}{(1+K) D_s} + 0{,}0665 \frac{K v d_p^2}{(1+K) D_l (1+30 v d_p)} \tag{4}$$

unde UET se exprimă în cm, D_l, D_s — cm^2/s, d_p — cm.; v — cm/s.

UET apare deci ca o sumă de trei termeni, corespunzînd difuziei longitudinale, în granulă și respectiv în film.

Această formulă, dedusă teoretic, concordă însă destul de slab cu datele experimentale [11] probabil din cauza neregularității inerente a modului de umplere al coloanei.

Etapa a II-a, calcularea curbei de eluare pentru un număr dat de UET, este principial destul de simplă, constînd în aplicarea unui bilanț de

materiale pentru fiecare unitate de echilibru, ceea ce necesită cunoașterea izotermei de echilibru și a volumului liber al coloanei. Dar în practică metoda este foarte greoaie deoarece cere calcularea din aproape în aproape a concentrației lichidului ieșit din fiecare UET, ceea ce duce la un calcul practic de neefectuat, întrucît numărul de unități al unei coloane eficace este de cel puțin cîteva sute.

În articolul de față ne propunem să efectuăm :

1) Calcularea directă a concentrației lichidului ieșit dintr-o coloană cu un număr dat de talere pentru cazul special al purificării soluțiilor ionice ;

2) Elaborarea unei metode pentru determinarea experimentală a lungimii UET pe baza curbei de eluare, printr-o operație simplă, a cărei bază teoretică o constituie relația precedentă dintre concentrația la ieșire și numărul de UET al coloanei.

Se poate arăta că curba de eluare depinde numai de numărul de unități de echilibru al coloanei I și de un raport A care înglobează constanta de echilibru, volumul liber specific și concentrația globală a fazelor lichidă și solidă.

Condițiile inițiale sînt :

a) Cationii celor două metale de schimb au aceeași valență :

$$RA + B^{z+} \rightleftharpoons BR + A^{z+}$$

b) Schimbul verifică legea acțiunii maselor :

$$K = \frac{q_B c_A}{q_A c_B} \tag{5}$$

în care K = constanta de echilibru coeficientul de selectivitate),
q = concentrația în faza solidă mval/ml,
c = concentrația în faza lichidă mval/ml.
indicile A se referă la componentul principal, iar B la impuritate.

c) Coloana este încărcată inițial cu cationul A ; soluția care intră conține un amestec de A și B.

$$q_A + q_B = q_0 \tag{6}$$

d) Capacitatea globală a ionitului nu variază la înlocuirea ionului A prin B :

In acest caz evident că și $c_A + c_B = c_0$ (7)

Aceste condiții sînt îndeplinite în cazul alegerii unui cationit puternic acid, și a unor cationi metalici simpli (necomplexați) deci de rază nu prea mare.

În aceste condiții notînd fracțiile molare ale impurității B în cele două faxe X și Y :

$$X = \frac{c_B}{c_0} \quad \text{și} \quad Y = \frac{q_B}{q_0} \tag{8}$$

Relaţia de echilibru (5) devine:

$$K = \frac{Y(1-X)}{X(1-Y)} \tag{9}$$

e) Dat fiind că este vorba de operaţie de purificare şi deci că atît X cît şi Y au valori foarte mici, se pot aproxima mărimile $1-X$ şi $1-Y$ prin 1. În acest caz izoterma de echilibru (9) devine lineară:

$$Y = K X \tag{10}$$

Se notează cu $X_{i,j}$ şi $Y_{i,j}$ fracţiile molare ale impurităţii B în faza lichidă respectiv solidă. Indicile i se referă la porţiunea de lichid corespunzătoare unei unităţi de echilibru, iar j se referă la poziţia UET în coloană (zero la intrare, 1 după prima UET, etc).

Bilanţul de materiale pentru o UET este:

$$V_L \cdot c_0 \cdot X_{i,j-1} + V_s \cdot q_0 \cdot Y_{i-1,j} = V_L c_0 X_{i,j} + V_s \cdot q^0 \cdot Y_{i,j} \tag{11}$$

în care V_s este volumul fazei solide dintr-o UET şi
V_L volumul fazei lichide dintr-o UET.

Aplicarea condiţiei de echilibru (10 duce la:

$$Y_{i,j} = K X_{i,j} \tag{12}$$

Rezultă astfel relaţiile de recurenţă:

$$X_{i,j} = \frac{1}{K} \cdot Y_{i,f} = \frac{\left(\frac{V_L c_0}{V_s q_0} X_{i,j-1} + Y_{i-1,j}\right)}{\frac{V_L c_0}{V_s q_0} + K} \tag{13}$$

Dar $Y_{i-1,j}$ este legat prin aceeaşi condiţie de echilibru de X_{i-1} şi vom avea:

$$X_{i,j} = \frac{X_{i,j-1} + K \frac{V_s q_0}{V_L c_0} X_{i-1,j}}{1 + K \frac{V_s q_0}{V_L c_0}} \tag{14}$$

Se înglobează mărimile K, V_L, V_s, c_0, q_0, într-o constantă A:

$$A = \frac{K V_s q_0}{V_L c_0} = \frac{K q_0 (1-\varepsilon)}{c_0 \varepsilon} \tag{15}$$

Întrucît mărimile V_L şi V_s sînt proporţionale cu ε, respectiv $1-\varepsilon$ unde ε este volumul liber specific, relaţia (14) devine:

$$X_{i,j} = \frac{X_{i,f-1} + A X_{i-1,f}}{1 + A} \tag{16}$$

Condițiile inițiale sînt:

$$X_{i,0} = \text{cst} = X_0 \tag{17}$$

și

$$Y_{0,j} = 0 \tag{18}$$

Condiția (18) se transformă cu ajutorul izotermei de echilibru (10) în

$$X_{0,j} = 0 \tag{19}$$

Se trece de la variabilele $X_{i,j}$ la $x_{i,j}$ cu ajutorul relației

$$X_{i,j} = \frac{X_{i,j}}{X_0} \tag{20}$$

Variabilele $x_{i,j}$ se dispun într-un tablou bidimensional cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$x_{i,0} = 1 \text{ și } x_{0,j} = 0$$

și al relației de dublă recurență:

$$x_{i,j} = \frac{x_{i,j-1} + A\,x_{i-1,j}}{1 + A} \tag{21}$$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6 . . . .
0	1	1	1	1	1	1	1 . . . .
1	0	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	$x_{3,1}$	. . . . .		
2	0	$x_{1,2}$	$x_{2,2}$	$x_{3,2}$	. . . . .		
3	0	. . . . .					
4	0	. . . . .					
.	.						
.	.						
.	.						
.	.						

Se poate arăta că formula de recurență și condițiile inițiale se pot transforma într-o relație care dă direct pe $x_{i,j}$ în funcție de i, j și A:

$$x_{i,j} = 1 - \frac{A^{i+j-1} + C^1_{i+j-1} A^{i+j-2} + C^2_{i+j-1} A^{i+j-3} + \cdots C^{j-1}_{i+j-1} A^i}{(1+A)^{i+j-1}} \tag{22}$$

Relația (22) este echivalentă cu:

$$x_{i,j} = \frac{1 + C^{1+j-1}_i A + C^2_{i+j-1} A^2 + \cdots C^{i-1}_{i+j-1} A^{i-1}}{(1+A)^{i+j-1}} \tag{23}$$

Pentru calcul se vor putea folosi în mod indiferent (22) sau (23). Este însă practic să se întrebuințeze formula (22) cînd $j < i$ și (23) cînd $j > i$.

În acest mod am calculat valorile $x_{i,j}$ date în tabelele 1, 2, 3 și rezultate grafic fig. 1, 2, pentru:

$$A = 1,\ 2 \text{ și } 4; \qquad i = 1,2, \cdots 10 \qquad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

Tabela 1

A = 1

i / j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	500	750	875	937	959	984	992	996	998	999
2	250	500	688	819	891	937	965	980	989	994
3	125	312	500	656	773	856	910	945	968	981
4	62,5	187	344	500	637	746	828	887	927	954
5	31,2	109	227	363	500	623	726	806	866	910

Tabela 2

A = 2

i / j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	333	555	704	802	868	912	941	961	974	983
2	111	259	407	537	651	738	812	862	899	927
3	37,0	111	210	319	430	533	626	705	770	822
4	12,3	45,2	100	173	259	350	442	530	610	681
5	4,72	17,8	45,3	87,8	145	213	290	367	448	526

Tabela 3

A = 4

i / j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	200	360	508	606	686	749	799	831	863	890
2	40,0	104	185	269	352	431	505	570	629	681
3	8,00	27,2	58,8	101	151	207	266	327	387	446
4	1,60	6,72	17,1	33,8	57,2	87,2	123	164	209	256
5	0,32	1,60	4,70	10,50	19,7	33,3	41,2	65,8	94,4	118

Se observă că i și j sînt legate de caracteristicile schimbului și anume de volumul de eluat V și volumul coloanei de solid, exclusiv golurile, v'

$$i = \frac{V}{V_L} \text{ și } j = \frac{v'}{V_s} \tag{24}$$

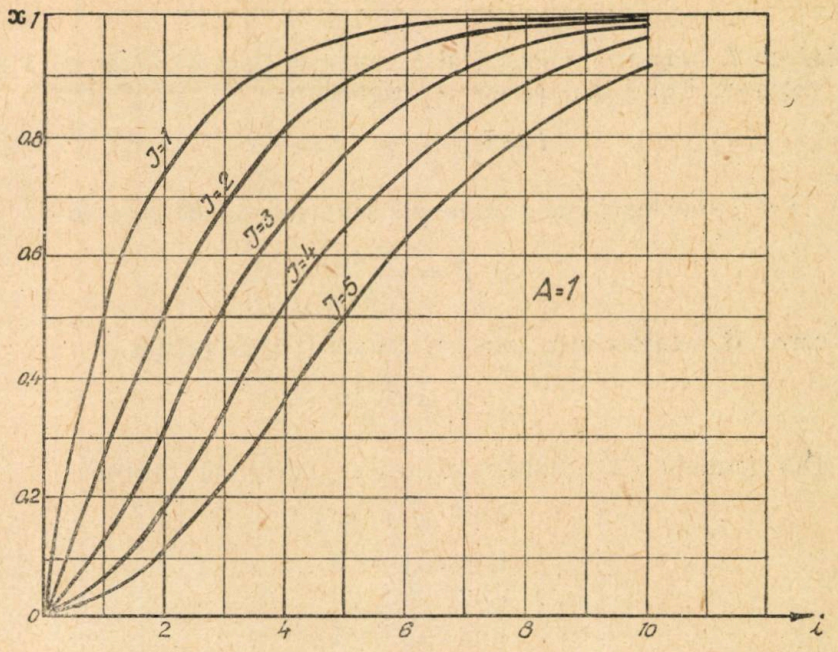

x 1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
i
J=1
J=2
J=3
J=4
J=5
A=1

Fig. 1

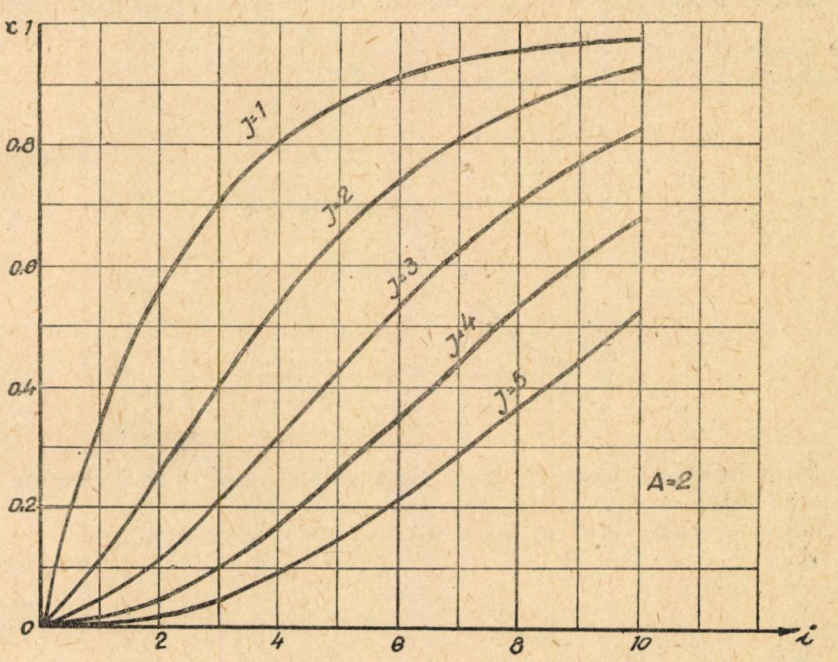

x 1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
i
J=1
J=2
J=3
J=4
J=5
A=2

Fig. 2

Notînd cu L lungimea coloanei și l lungimea unei *UET* iar cu s secțiunea coloanei, i și j sînt redate de expresiile:

$$i = \frac{V}{\varepsilon\, l\, s} \quad \text{și} \quad j = \frac{L}{l} \tag{25}$$

i și j sînt legate de parametrul adimensional de curgere

$$Z = \frac{V\, c_0}{B} \tag{26}$$

(în care: B = capacitatea totală a coloanei) prin relația

$$i = \frac{Z\, A_j}{K} \tag{27}$$

Din formula (23), tabele și grafice reiese că pentru:

$$0 < x_{i,j} < 1$$

$$\lim_{i/j \to 0} x_{i,j} = 0$$

$$\lim_{i,j \to \infty} x_{i,j} = 1$$

$x_{i,j}$ variază monoton cu i sau cu raportul $\frac{i}{j}$ și x crește cînd crește i și cînd scade A și j.

Pentru $j > 1$ curbele au alura în S

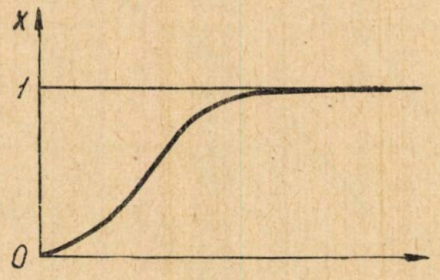


Fig. 3

(fig. 3) și inflexiunea este cu atît mai marcată cu cît j și A sînt mai mari. sînt mai mari.

Derivata curbei $x(i)$ se poate calcula cu ajutorul formulei

$$y = \frac{dx}{di}$$

Astfel: $y_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1,j} - x_{i,j}$ și $y_{i+\frac{1}{2}} = x_{i,j} - x_{i-1,j}$ (28)

Aplicînd formula (22) se deduce:

$$y_{i+1/2} = \frac{C^{i}_{i+j-1} A^{i}}{(1+A)^{i+j}} \quad \text{și} \quad y_{i-1/2} = \frac{C^{i-1}_{i+j-2} A^{i-1}}{(1+A)^{i+j-}} \tag{28}$$

Curba $y(i)$ are alura reprezentată în fig. 4, cu un maxim, și tinde asimptotic către zero pentru $i \to \infty$.

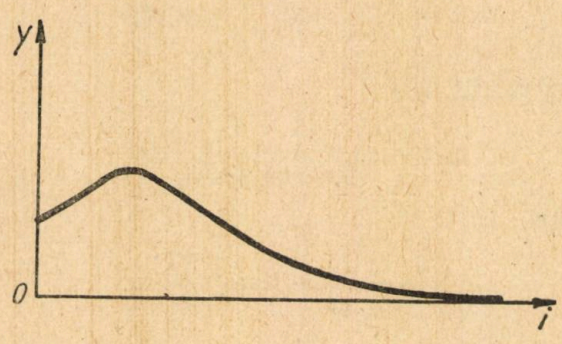


Fig. 4

Valoarea lui i pentru care y este maxim (corespunzătoare punctului de inflexiune a curbei de eluare) se poate determina egalînd $y_{i+1/2}$ cu $y_{i-1/2}$. Rezultă $i_{inflexiune} = A\,(j-1)$

Aplicînd această relație, și trecînd de la i și j la coordonata adimensională Z se obține:

$$\frac{i_{infl}}{j} = A\left(1 - \frac{i}{j}\right) \to \frac{Z_{infl}\,A}{K} = A\left(1 - \frac{l}{L}\right) \to l = L\left(1 - \frac{Z_{infl}}{K}\right) \tag{30}$$

Relația (30) dă o primă metodă de a determina experimental lungimea UET.

Se poate observa că trebuie alese condițiile de lucru astfel încît numărul UET al coloanei să nu fie prea mare, întrucît valoarea raportului $\frac{Z_{infl}}{K}$ va fi apropiată de unitate și deci precizia determinării lungimii UET va fi mică.

Pentru coloana cu număr de UET mare se poate stabili o altă metodă de determinare a lui 1.

Plecînd de la formula (28) se obține:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{C^{i}_{i+j-1} A^{i}}{(1+A)^{i+j}} = \frac{(i+j-1)!}{i!\,(j-1)!} \frac{A^{i}}{(1+A)^{i+j}}$$

Pentru numere i și j mari, se poate aplica factorialilor formula lui Stirling:

$$n! = e^{-n} n^{n} \sqrt{2\pi n} \tag{31}$$

Rezultă :

$$y_{i+1/2} = \frac{(i+j-1)^{i+j-1}}{i^i (j-1)^{j-1}} \sqrt{\frac{i+j-1}{2\pi i (j-1)}} \frac{A^i}{(1+A)^{i+j}} \tag{32}$$

În punctul de inflexiune, conform relației (29)

$$y_{infl} = y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i-\frac{1}{2}} = y_{A^{(j-1)}}$$

sau, înlocuind în relația (32)

$$y_{infl} = \frac{1}{\sqrt{2\pi A (A+1)(j-1)}} \tag{33}$$

Dar, deoarece

$$y = \frac{dx}{di} \text{ și } i = j \frac{AZ}{K}$$

rezultă :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{j}{k} \sqrt{\frac{A}{2\pi (A+1)(j-1}} \tag{34}$$

Notînd $\frac{dx}{dz} = P$ (panta curbei de eluare în coordonate x, z, în punctul de inflexiune) și neglijînd unitatea față de j avem :

$$l = \frac{L}{j} = 2\pi L K^2 P^2 \left(\frac{A+1}{A}\right) \tag{35}$$

Din formula (35) rezultă o a doua metodă de a determina lungimea UET, prin măsurarea pantei $\frac{dx}{dz}$ a curbei de eluare în punctul de inflexiune

Concluzii

S-a stabilit o relație directă între concentrația eluatului și mărimile schimbului : volumul de eluat, numărul de UET din coloană și parametrii de schimb (contanta de echilibru, concentrațiile globale în cele două faze, volumul liber intergranular) înglobați în constanta A.

Pe această bază au fost deduse două metode de determinare experimentală a lungimii unității teoretice de echilibru.

Prima metodă, aplicabilă pentru coloane cu număr redus de UET, se bazează pe măsurarea abscisei corespunzătoare punctului de inflexiune al curbei de eluare ce se determină experimental.

A doua metodă se aplică în cazul unor coloane cu un număr mare de talere, și se bazează pe măsurarea pantei corespunzătoare aceluiași punct de inflexiune.

Laboratorul de chimie Fizică
Institutul Politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *Suit, Semiakin :* Sbornic Issledovania v oblasti ionoobmennoi, raspredelitelinoi i osadocinoi hromatografii. Moscova, izd. Akad. Nauk SSSR 1959, p. 55.
[2] *Wheaton, Baumann* — Ind. Eng. Chem. 1953, *45,* 228.
[3] *Kraus, Nelson* — J. Am. Chem. Soc. 1954, *75,* 984.
[4] *Gilliland, Baddour* : Ind. Eng. Chem. 1953, *45,* 330.
[5] *Suyata, Benchers, Whhite :* Ind. Eng. Chem. 1955, *47,* 2193.
[6] *Klamer, Krevelen :* Chem. Eng. Science 1958, *9,* 24.
[7] *Nachod ;* Ion Exchange Technology, NY, Academic Press 1959, cap. IV
[8] *Bieber, Stedler, Selke :* Chem. Eng. Progr. 1954 *50,* 17.
[9] *Hiester, Fields, Phillips :* Chem. Eng. Progr. 1954, *50,* 139.
[10] *Austerweil :* l'echange d'ions et les échangeurs, Paris, Gauthier-Villars 1955, cap. III.
[11] *Glückauf, Coates :* J. Chem. Soc. 1947, 1315.

МОДЕЛИРОВАНИЯ ИОНООБМЕННОГО ПРОЦЕССА НА КОЛОННЕ

(Резюме)

В данной работе предлагается простой метод расчета выходов ионнообменных колонн в процессе очистки ионных растворов. Предполагаемый метод исключает постепенный расчёт концентрации после каждой ступени колонны и после каждой порции жидкости, вводимой в колонну.

В работе предполагается также н два метод, на установке — лабораторная модель, для определения длины теоретической единицы равновесий, необходимой для проектирования промышленных колонн.

THE MODELATION OF THE IONEXCHANGE PROCESS, ON COLUMNS

(Summary)

There is given a simple method for the calculation of performances of the ionexchange columns in the proceeding of purification of ionic solutions. The proposed method avoids the succesiv calculation of the con-

centration for every step of the column and after every quantity of liquid introduced in the column.

There are also given two methods for the experimental determination on the installation (laboratory model) of the length of one teoretical unit of equilibrium necessarry for the projection of industrial columns.

MODÉLATION DES COLONNES POUR LE PROCÉSSUS D'ÉCHANGE IONIQUE

(Résumé)

On présente une méthode rapide pour calculer les performances des colonnes échangeurs d'ions utilisées pour la purification des solutions ioniques. La méthode proposée élimine les calculs succesifs des concentrations aprés chaque échelon de la colonne et aprés chaque portion du liquide introduit dans la colonne.

On présente aussi deux méthodes permettant la détermination expérimentale, sur des instalations-modèle reduit, de la longueur de l'unité théorique d'équilibre, nécessaire pour la projection des colonnes industrielles.

DAS MODELLIEREN DES JONENAUSTAUSCH PROZESSES AU KOLONNEN

(Zusammenfassung)

Es wird eine einfache Berechnungsmethode der Leistungen von Jonenaustauschkolonnen im Keinigungsverfahren der ionischen Lösungen, dargestellt. Die vorgeschlagene Methode vermeidet die sukzessiren Berechnungen der Konzentrationen nach jeder Stufe und nach jeder in die Kolonne eingeführten Menge Flüssigkeit.

Es werden ebenfalls zwei Verfahren dargestellt, für die experimentelle Feststellung an der Installation (Labor Modell) der Länge einer theorethischen Gleichwichtseinheit, die für die industrielle Projektion nötig ist.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

STUDIUL UNUI NOU PROCES METALURGIC: AFINAREA FONTEI ȘI OȚELULUI CU AJUTORUL ABURULUI

I. TRIPȘA,
candidat în științe tehnice

1. Una din principalele direcții ale progresului tehnic în siderurgie este intensificarea proceselor tehnologice cu ajutorul oxigenului. Metoda a dat rezultate deosebite în special în oțelării. De aceea, Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. prevăd introducerea în următorii ani a acestei metode tehnologice înaintate în industria noastră siderurgică.

Ca urmare ,în prezent în cadrul I.C.E.M. se fac cercetări experimentale de elaborare a oțelului în convertizor prin insuflare de oxigen tehnic pur, pe sus, după procedeul L. D. [1]. Rezultatele obținute confirmă practica unor uzine din străinătate în legătură cu intensificarea proceselor de elaborare a oțelului cu ajutorul oxigenului, precum și eficiența economică a acestei metode tehnologice. Aceste rezultate au dus în același timp la scoaterea în evidență a unor părți negative ale acestei metode, în primul rînd a degajării unei mari cantități de fum brun, datorit oxizilor de fier volatilizați, ceea ce duce la micșorarea recuperării fierului din încărcătură și la reducerea eficacității economice a folosirii oxigenului. Altă latură negativă a acestei tehnologii este micșorarea — în unele cazuri — a durabilității căptușelii refractare.

Pentru combaterea acestor laturi negative s-a propus și s-a introdus în practica industrială adăugarea unei cantități importante de abur la oxigenul suflat în fontă (pînă la proporția 1 : 1) [2, 3]. Reducînd temperaturile procesului de afinare a fontei, aburul duce la evitarea completă a degajării fumului brun din oxizi de fier și, ca urmare, la mărirea recuperării fierului din încărcătură.

Studiind conținutul de hidrogen din oțelul elaborat în convertizor prin suflarea fontei cu amestec de oxigen și abur, H. Neuhaus [4] ajunge la concluzia că în acest caz nu se obține un conținut de hidrogen dăunător caracteristicilor tehnologice și mecanice ale oțelului.

---

[1] Comunicare făcută la a VI-a sesiune de comunicări științifice din S.P.B., Dec. 1960.

Avantajul principal al adaosului de abur la oxigenul suflat în baia metalică constă însă în reducerea apreciabilă (pînă la 30%) a consumului specific de oxigen, ceea ce mărește substanțial eficiența economică a noii tehnologii de elaborare a oțelului. Reducerea consumului specific de oxigen se datorește faptului că parte din elementele însoțitoare din baia metalică sînt oxidate de abur, oxidant puternic cu un conținut de 88,89% oxigen.

Ultimul fapt a făcut ca încă de cîțiva ani (1955) ing. cehoslovac Karel Nemec să obțină brevet de invenție pentru un procedeu de folosire a apei ca agent oxidant pentru oxidarea fontei sau a oțelului [5]. În acest brevet se susține că sub acțiunea temperaturii ridicate și a metalului lichid, apa se descompune în hidrogen și oxigen, ultimul efectuînd procesele de afinare a fontei. Invenția prevede ca injectarea apei la o presiune de cca. 30 at. să se efectueze concomitent cu introducerea de minereu de fier sau eventual de oxigen pentru a nu răci baia metalică (?!).

În U.R.S.S. s-au făcut de asemenea încercări de a preafina fonta în oala de turnare cu oxigen, amestec de oxigen-abur și 6 încercări numai cu abur [6, 7], realizîndu-se o reducere importantă a conținuturilor de siliciu și mangan.

Astfel s-au pus bazele noului proces metalurgic de afinare a fontei cu abur.

Este necesar să se arate următoarele trei fapte:

a) Brevetul cehoslovac menționat conține două recomandări greșite și anume: — folosirea apei în stare lichidă, ceea ce duce la mari pierderi de căldură legate de vaporizarea apei și de încălzirea apei și aburului.

— introducerea — odată cu apa — a minereului de fier, ceea ce nu va duce la încălzirea băii metalice — cum afirmă autorul, ci la răcirea ei.

b) Autorii lucrării [6] consideră cele 6 preafinări ale fontei efectuate cu aburi drept încercări orientative și nu le-au dezvoltat în continuare.

c) În afara celor două lucrări menționate mai sus, în literatura de specialitate, nu s-au publicat nici un fel de date în legătură cu procesul de afinare a fontei cu abur.

Acest proces prezintă, în același timp, încă de la prima vedere, două laturi foarte interesante: prima teoretică, legată de studiul proceselor de afinare cu ajutorul aburului care va îmbogăți fără îndoială conținutul disciplinei — „Teoria proceselor siderurgice" și a doua economică — practică, legată de prețul de cost de 20—30 ori mai mic al unei cantități de oxigen sub formă de abur supraîncălziți față de aceeași cantitate sub formă de oxigen tehnic. În plus, aburul supraîncălzit este mult mai accesibil uzinelor siderurgice, decît oxigenul, în prezent deficitar.

Din aceste considerente rezultă necesitatea studierii aprofundate — teoretice și tehnologice — a proceselor de afinare a fontei cu abur, în care scop a fost efectuată prezenta lucrare de cercetare.

2. Studiul termodinamic al proceselor de afinare cu ajutorul aburului

a) Oxidarea siliciului în acest proces se realizează pe baza reacției:

$$[Si] + 2H_2O = (SiO_2) + 2H_2 \quad (1)$$

Studiul termodinamic al acestei reacții poate fi efectuat cu ajutorul datelor referitoare la reacțiile de disociere a SiO_2 și H_2O:

$$SiO_{2\,topit} = Si_{topit} + O_2 \quad (2)$$

$$2H_2O_g = O_2 + 2H_2 \quad (3)$$

Variația potențiatului termodinamic izobar al reacției (2) este la temperaturile procesului — între 1687 și 1986°K — următoarea [8, pag. 112]:

$$\Delta Z^\circ_{(2)} = +217770 - 49{,}045\ T$$

Aceeași valoare pentru reacția (3) este [8, pag. 253]:

$$\Delta Z^\circ_{(3)} = 120440 - 28{,}051\ T$$

Cum reacția (1) poate fi obținută prin scăderea reacției (2) din (3), variația potențialului ei termodinamic izobar va fi:

$$\Delta Z^\circ_{(1)} = \Delta Z^\circ_{(3)} - \Delta Z^\circ_{(2)} = (120440 - 2177770) + (49{,}045 - 28{,}051)\,T$$

$$\Delta Z^\circ_{(1)} = -97330 + 20{,}994.\,T$$

De unde rezultă temperatura de echilibru pentru condițiile standard: 4640°K.

În concluzie, reacția de oxidare a siliciului cu ajutorul aburului este exotermă, avînd un efect termic ceva mai mare ca valoare absolută (97 330 în loc de 95 460) decît efectul termic al reacției de oxidare a siliciului cu ajutorul oxidului de fier, care se produce, de exemplu, în cuptorul Martin:

$$[Si] + 2\,(FeO) = (SiO_2) + 2\,[Fe];\ \Delta Z = -95460 + 19{,}625\ T$$

Valorile termodinamice ale ultimei reacții au fost calculate cu ajutorul formulelor I - 69 și I - 79 [8].

Prin urmare în condițiile agregatelor bazice, oxidarea siliciului cu abur va fi completă, reacția (1) fiind practic ireversibilă.

b) Oxidarea manganului se va realiza conform reacției:

$$[Mn] + H_2O = (MnO) + H_2 \quad (4)$$

Pentru studiul termodinamic al acestei reacții la temperaturile procesului se pot folosi datele termodinamice ale următoarelor reacții (Pentru $\triangle Z^\circ$ al primei reacții se folosește formula I - 68 [8]):

$$2\,MnO_s = 2\,Mn_l + O_2;\ \Delta Z^\circ_{(\text{de la } 1517 \text{ la } 2051^\circ K)} = 190800 - 39{,}25\,T \quad (5)$$

$$2\,H_2\,O_g = O_2 + 2\,H_2;\ Z^\circ = +120440 - 28{,}051\,T \quad (3)$$

Prin urmare,

$$\Delta Z^\circ_{(4)} = \frac{\Delta Z^\circ_{(3)} - \Delta Z^\circ_{(5)}}{2} = \frac{-(190\,800 - 120\,440) + (39,26 - 28,051)\,T}{2}$$

$$\Delta Z^\circ_{(4)} = -35\,180 + 11,199\,T$$

De unde rezultă temperatura de echilibru în condițiile standard :

$$T = \frac{35\,180}{11,199} = 3140^\circ K$$

În concluzie reacția de oxidare a manganului este exotermă, avînd un efect termic ceva mai mare ca valoare absolută (35 180 în loc de 34 245) decît reacția obișnuită de oxidare a manganului :

$$[Mn] + (FeO) = [Fe] + (MnO)\ ;\ \Delta Z^\circ = -35245 + 4,92\,T$$

c) Oxidarea fierului poate avea loc după reacția

$$[Fe] + H_2O = (FeO) + H_2 \qquad (6)$$

pe care se studiază cu ajutorul reacțiilor :

$$2\,FeO = 2\,Fe + O_2\ ;\ \Delta Z^\circ = 122310 - 29,42\,T \qquad (7)$$

$$2\,H_2O_g = 2\,H_2 + O_2\ ;\ \Delta Z^\circ = 120440 - 28,051\,T \qquad (3)$$

Rezultă :

$$\Delta Z^\circ_{(6)} = \frac{\Delta Z^0_{(3)} - \Delta Z^0_{(7)}}{2} = \frac{-(122310 - 120440) + (29,42 - 28,051)\,T}{2}$$

$$\Delta Z^0_{(6)} = -935 + 0,369\,T$$

Temperatura de echilibru a reacției (6) în condiții standard va fi :

$$T = \frac{935}{0,369} = 2530^\circ K$$

În concluzie, reacția de oxidare a fierului este slab exotermă, avînd un efect termic mult mai mic ca valoare absolută decît reacția de oxidare a fierului, cu ajutorul oxigenului (935 în loc de 61 160), cu ajutorul oxidului magnetic de fier ($Fe_3O_4 + Fe = 4\,FeO$; $\Delta H^\circ = -15\,000$) sau al oxidului superior de fier. Prin urmare aburul pare a fi un oxidant mai puțin violent pentru baia metalică, ceea ce va putea duce — în condiții corespunzătoare — la obținerea unor pierderi mai mici de fier prin oxidare. Pe de altă parte, pe baza datelor de mai sus se poate presupune că oxidul de fier are și la acest procedeu un rol important în procesele de oxidare a elementelor însoțitoare.

d) Cromul se va oxida conform reacției :

$$[Cr] + H_2O = (CrO) + H_2 \qquad (8)$$

studiată cu ajutorul reacțiilor (ΔZ° pentru prima reacție este calculat cu ajutorul formulei I - 94 [8]) :

$$2\,CrO = 2\,Cr + O_2\,;\ \Delta Z^\circ = 171\,000 - 36\,T \qquad (9)$$

$$2\,H_2O = 2\,H_2 + O_2\,;\ \Delta Z^\circ = 120440 - 28{,}051\,T \qquad (3)$$

Rezultă

$$\Delta Z^\circ_{(8)} = \frac{\Delta Z^\circ_{(3)} - \Delta Z^\circ_{(9)}}{2} = \frac{-(171000 - 120\,440) + (36 - 28{,}051)\,T}{2}$$

$$\Delta Z^\circ_{(8)} = -25\,280 + 7{,}949\,T$$

Temperatura de echilibru a reacției (8) în condiții standard va fi :

$$T = \frac{25280}{7{,}949} = 3180^\circ K$$

Reacția de oxidare a cromului este exotermă, avînd un efect termic apropiat de al reacției obișnuite de oxidare a cromului cu ajutorul oxidului de fier :

$$[Cr] + (FeO) = [Fe] + (CrO)\,;\ \Delta Z^\circ = -24345 + 6{,}54\,T$$

e) Oxidarea carbonului se realizează conform reacției :

$$[C] + H_2O = H_2 + CO \qquad (10)$$

Folosind relația constantei de echilibru (V - 31 [8]) se determină valoarea ΔZ°_{11} pentru reacția :

$$C + O = CO\,;\ \Delta Z^\circ_{11} = 6720 - 15{,}85\,T \qquad (11)$$

și în continuare valoarea ΔZ°_{10} :

$$\Delta Z^\circ_{10} = \frac{\Delta Z^\circ_3}{3} + \Delta Z^\circ_{11} = (60220 + 6720) - (14{,}02\ 15{,}85)\,T$$

$$\Delta Z^\circ_{10} = 66940 - 29{,}87\,T.$$

Reacția este endotermă, avînd caracteristici termodinamice foarte apropiate de cele ale reacției de oxidare a carbonului cu oxid de fier :

$$[C] + (FeO) = [Fe] + CO\,;\ \Delta Z^\circ = 67875 - 30{,}56\,T$$

Concluzia generală care se impune este că procesele de afinare cu abur sînt, din punct de vedere termodinamic, foarte apropiate de obișnuitele procese, corespunzătoare, ale afinării cu oxid de fier. Acest lucru se datorește diferențelor mici dintre caracteristicile termodinamice (ΔZ, ΔH, ΔS) ale reacțiilor de formare a oxidului de fier și a vaporilor de apă din elementele componente.

3. Studiul cinetic al proceselor de afinare cu ajutorul aburului

Dacă din punctul de vedere termodinamic afinarea cu abur este apropiată de cea cu oxizi de fier, din punct de vedere cinetic cele două procese se deosebesc fundamental, afinarea cu abur avînd caracteristici comune cu afinarea cu aer, oxigen etc.

Într-adevăr, în cazul afinării cu oxid de fier, etapele limitative ale procesului sînt trecerea oxigenului din zgură în baia metalică, difuzia acestuia prin fiecare fază în parte și formarea germenilor bulelor de *CO* în baia metalică. Acești factori duc la micșorarea vitezii de decarburare în cazul cuptorului Martin bazic pînă la valorile 0,5—0,2% C/h, ceea ce face să crească durata afinării și a întregii șarje de oțel și să se reducă, în mod corespunzător, productivitatea cuptoarelor.

În cazul suflării băii metalice cu abur, se pot introduce pînă la frontul reacțiilor de afinare cantități foarte mari de oxigen în unitatea de timp, cantități comparabile cu cele introduse în convertizoare sau la suflarea băii cuptoarelor Martin și electrice cu oxigen. Prin urmare, trecerea oxigenului dintr-o fază în alta și difuzia sa își pierd caracterul de factor limitativ, neinfluențînd în nici un fel asupra vitezii procesului de afinare cu abur.

Același lucru se poate spune și despre ultima etapă limitativă — formarea germenilor bulelor de *CO*, pentru că în acest caz acești germeni există în tot timpul suflării băii metalice cu abur sub forma jeturilor gazoase conținînd aburul care n-a reacționat încă, oxigen și hidrogen. Prin urmare, ultima etapă a procesului de decarburare — îndepărtarea produsului reacției (oxidul de carbon) din soluție — se va efectua mult mai ușor și anume prin simpla eliminare a oxidului de carbon în jeturile existente de gaze.

În concluzie, se poate considera că mecanismul proceselor de afinare cu abur este asemănător mecanismului proceselor de afinare cu aer, oxigen și alte gaze oxidante, ceea ce va permite să se obțină și în acest caz vitezele mari de afinare realizate în convertizoare sau la suflarea băii cuptoarelor Martin și electrice cu oxigen.

4. Verificarea experimentală a concluziilor studiului termodinamic și cinetic al proceselor de afinare cu abur

Verificarea experimentală a concluziilor teoretice prezentate mai sus s-a făcut în trei etape corespunzătoare condițiilor de laborator, condițiilor semiindustriale și condițiilor industriale.

a) *Faza de laborator*

În scopul verificării posibilității principiale de a realiza procese de afinare cu ajutorul aburului s-au efectuat trei topiri de fontă (4 kg) într-un cuptor electric cu arc orizontal, insuflînd în baie abur cu aju-

torul unei țevi de oțel moale. Cu toate că aburul folosit avea caracteristici (presiune și temperatură) slabe, din care cauză durata fiecărei suflări a fost mică (cca 1 minut), s-a reușit să se realizeze următoarele reduceri ale conținuturilor de Si, Mn și C (tabela 1).

Tabela 1

Afinarea fontei cu aburi în cuptor de laborator

Nr. crt.	Topirea	Si	Mn	C	Observații
1	1	4,55	0,72	3,29	Înaintea suflării
2	1	3,45	0,67	2,72	După prima suflare
3	1	3,02	0,28	2,49	După a doua suflare
4	2	3,70	0,40	2,88	Înaintea suflării
5	2	2,63	0,12	2,84	După prima suflare
6	2	2,57	0,14	2,60	După a doua suflare
7	2	2,22	0,15	2,60	După a treia suflare
8	3	2,94	0,28	3,12	Înaintea suflării
9	3	2,09	0,18	2,70	După prima suflare
10	3	1,76	0,16	2,64	După a doua suflare

Din datele tabelei 1 rezultă că în condițiile șarjelor de laborator s-a reușit să se reducă cu ajutorul aburului conținutul de siliciu din fonta topită cu 33,6 — 40%, cel de mangan cu 42,8 — 62,5%, și cel de carbon cu 9,7 — 24,3%; ceea ce a confirmat posibilitatea principială de a efectua procese de afinare cu abur.

b) *Faza semiindustrială*

În scopul verificării semiindustriale a noului proces metalurgic, s-au elaborat după acest procedeu patru șarje de oțel într-un cuptor electric cu capacitatea de 500 kg.

Prima șarje (nr. 865) a fost elaborată în scopul reconfirmării pe scară semiindustrială a posibilității de a efectua procese de afinare cu abur. În acest scop în încărcătura topită s-a introdus numai fontă de afinare produsă la Combinatul Siderurgic Hunedoara. Aburul a fost introdus în baia lichidă cu ajutorul unor țevi cu diametrul de 3/4". Presiunea aburului a variat în timpul suflărilor între 1 și 2 at; iar temperatura între 125 și 135°C.

Mersul șarjei este prezentat în tabela 2.

După terminarea suflării, oțelul a fost dezoxidat, s-a luat probă specială pentru determinarea conținutului de hidrogen și s-a evacuat șarja.

Proba de oțel luată în cochilă înaintea evacuării nu a crescut, ceea ce dovedește că oțelul era bine dezoxidat și nu conținea o cantitate exagerată de gaze. Conținutul de hidrogen determinat în proba specială de oțel s-a dovedit a fi în limitele obișnuite.

Această primă șarjă a confirmat întru totul posibilitatea de a realiza afinarea fontei cu abur. Conținutul de siliciu a fost redus complet, plecînd de la 1,60% Si. Conținutul de mangan s-a redus de la 3,16% la 0,23%; iar cel de carbon de la 3,92% la 0,036%. S-a redus de asemenea conținutul de fosfor.

Tabela 2

Variația compoziției chimice (%) a băii metalice la prima șarje elaborată în cuptorul semiindustrial

Nr. crt.	Durata suflării anterioare probei, minute	Si	Mn	C	P	Obs.
1	—	1,60	3,16	3,92	0,130	La topire
2	10	0,52	3,02	3,50	0,120	
3	8	0,06	1,57	3,20	0,100	
4	6	—	0,56	2,42	—	
5	6	—	0,54	1,46	—	
6	5	—	0,40	0,12	—	
7	1	—	0,23	0,036	0,085	

Șarja a confirmat de asemenea presupunerea că și la afinarea cu abur se oxidează în primul rînd siliciul urmat de mangan și apoi de carbon, așa cum se observă la toate procesele de afinare.

A doua șarje (nr. 866) a fost efectuată în scopul elaborării unui oțel, pornind de la o încărcătură obișnuită în ceea ce privește raportul dintre fontă și fier vechi la cuptoarele Martin: s-a încărcat 200 kg fontă de afinare Hunedoara, 200 kg capete de țevi, 10 kg var și 3 kg fluorină.

Mersul șarjei este prezentat în tabela 3. Suflarea aburului s-a executat în același mod ca la prima șarje.

Tabela 3

Variația compoziției chimice (%) a șarjei a doua elaborată în cuptorul semiindustrial

Nr. crt.	Durata suflării anterioare probei, minute	Si	Mn	C	P	S	Observații
1	—	1,09	1,26	2,42	0,105	0,039	La topire
2	10	0,49	0,42	1,82	0,103	0,039	
3	2	0,01	0,38	1,26	0,093	0,039	
4	3	—	0,33	0,16	—	—	
5	3	—	0,18	0,04	0,086	—	

În continuare, șarja a fost dezoxidată cu feromangan și ferosiliciu. Din oțelul elaborat s-au turnat două lingouri. Turnarea a decurs normal. Oțelul nu a fiert în lingotiere.

Compoziția finală a oțelului a fost: 0,10% C; 0,96% Mn; 0,40% Si; 0,154% P; 0,018% S.

Amîndouă lingourile au fost laminate în condiții normale în bare cu secțiunea patrată (de 65 mm). Suprafața acestora a fost corespunzătoare standardului.

Din barele laminate s-au executat conform STAS epruvete pentru determinarea caracteristicilor mecanice. Rezultatele obținute sînt prezentate în tabela 4.

Tabela 4

Caracteristicile mecanice ale oțelului din șarja doua (buletinul de încercări nr. 303)

Nr. crt.	Simbolul lingoului	d_o mm	σ_c kgf/mm²	σ_r kgf/mm²	δ_{10} %	δ_5 %	ψ %	k kgm/cm²
1	A	9,8	33	47,1	21,9	29,4	62	19,0
2	A	9,9	29	46,1	21,8	28,6	49	17,5
3	B	9,9	32	46,1	21,8	28,6	57	15.8
4	B	9,9	30	46,1	22,1	29,6	62	14,6

Din datele tabelei 4 se remarcă apropierea rezultatelor obținute, ceea ce arată că oțelul este omogen. S-au obținut caracteristici mecanice întru totul corespunzătoare cerințelor STAS. Trebuie menționat faptul că raportul dintre σ_c și σ_r este foarte ridicat (pînă la 60%), mai mare decît se obține de obicei la oțelul carbon obișnuit.

Această șarje a confirmat posibilitatea elaborării oțelului carbon obișnuit cu caracteristici corespunzătoare cerințelor STAS prin afinare cu ajutorul aburului.

Aspectul exterior al barelor laminate a dovedit că la acest procedeu nu se produc sufluri marginale dăunătoare calității oțelului, ceea ce confirmă rezultatul analizei după care conținutul de hidrogen este în limitele admise.

În scopul verificării posibilității de a elabora prin noul procedeu oțeluri aliate, precum și în scopul verificării ipotezei că în acest caz conținutul de hidrogen este sub limita care dăunează calității oțelului, la a treia șarje (nr. 867) s-a elaborat oțelul 20 H_2N_4A, oțel cu o mare sensibilitate la fulgi.

În încărcătură s-a introdus 160 kg fontă Hunedoara, 240 kg capete de țevi, 10 kg var și 30 kg fluorină.

Mersul șarjei este prezentat în tabela 5.

Suflarea aburului s-a făcut în aceleași condiții ca la prima șarje.

Nichelul necesar alierii (16 kg) s-a introdus după cea de a treia suflare cu abur.

După ultima suflare s-a format zgură albă, s-a dezoxidat oțelul cu feromangan (65% Mn, 6%C), s-a carburat baia timp de un minut cu toți electrozii(pentru a ridica conținutul de carbon la cel prescris de GOST) și s-a introdus ferocromul necesar alierii.

Înaintea evacuării și în lingotiere — la turnare — oțelul a fost liniștit. S-au turnat două lingouri bune, care s-au laminat în bare cu secțiunea patrată (65 mm).

Din aceste bare s-au executat conform STAS epruvete pentru încercări mecanice și probe pentru determinarea fulgilor.

Tabela 5

Variația compoziției chimice (%) a șarjei a treia elaborată în cuptorul semiindustrial

Nr. crt.	Durata suflării anter oare probei, minute	Si	Mn	C	P	S	Obs.
1	—	0,88	2,13	1,98	0,143	0,038	La topire
2	6	0,12	0,61	1,30	0,083	0,036	
3	5	0,01	0,32	0,34	0,075	0,028	
4	3	—	0,16	0,018	0,069	0,026	

Cu toate că la examenul pentru fulgi s-a folosit și un atac special, pe lîngă cel folosit de obicei în laborator, nu s-a observat nici un indiciu al existenței lor, ceea ce a confirmat ipoteza că la afinarea cu abur, conținutul de hidrogen este mic și nedăunător calității oțelului.

Compoziția finală a oțelului elaborat a fost: 0,21% C; 0,80% Mn; 0,20% Si; 0,094% P; 0,012% S; 0,19% Cu; 3,80% Ni; 1,78% Cr.

Rezultatele încercărilor mecanice sînt prezentate în tabela 6. Ele confirmă corespondența oțelului elaborat cerințelor standardului

Tabela 6

Caracteristicile mecanice ale oțelului din șarja treia (Buletin de incercări nr. 334)

Nr. crt.	Simbolul lingoului	do mm	σ_c kgf/mm²	σ_h kgf/mm²	δ 5 %	ψ %	K kgm/cm²	Obs.
1	A	9,9	120	154,3	10,6	51	4,6	
2	A	9,8	132	155,9	11,2	53	4,5	
3	B	9,8	136	152,8	10,4	53	4,6	
4	B	9,9	126	147,2	10,0	53	4,8	

Decarburarea la șarja a treia a fost dusă în mod intenționat pînă la un conținut foarte mic (0,018%) de carbon pentru a verifica încă o dată posibilitatea de a elabora prin noul procedeu oțeluri cu conținuturi foarte mici de carbon.

Pentru a lămuri pe deplin această posibilitate, la a patra șarje (nr. 893) s-a elaborat un oțel de tip ARMCO.

În încărcătură s-a introdus : 500 kg capete de țevi, 2,7 kg cocs și 10 kg minereu de fier :

Mersul șarjei este prezentat în tabela 7.

Suflarea aburului s-a făcut în aceleași condiții ca la celelalte șarje.

Tabela 7

Variația compoziției chimice (%) a șarjei a patra elaborată în cuptorul semiindustrial

Nr. crt.	Durata suflării anterioare probei, minute	Si	Mn	C	P	S	Obs.
1	—	—	0,34	0,60	0,032	0,0 5	La topire
2	3	—	0,20	0,46	0,022	0,022	
3	4	—	0,09	0,13	—	—	
4	1	—	0,045	0.05	—	—	
5	0,5	—	0 040	0,045	0 018	0,020	

Șarja a fost dezoxidată în continuare sub zgură albă cu ferosiliciu (1,3 kg) și aluminiu (1,5 kg în cuptor și 0,7 kg în oală).

Oțelul s-a turnat și laminat în bune condiții. S-au obținut bare cu secțiunea pătrată (65 mm).

Compoziția finală a oțelului a fost : 0,052% C ; 0,09% Mn ; 0,065% Si; 0,011% S ; 0,013% P ; 0,04% Ni ; 0,23% Cu.

Rezultatele încercărilor mecanice efectuate conform STAS sînt prezentate în tabela 8.

Tabela 8

Caracteristicile mecanice ale oțelului șarjei a patra (Buletin de încercări Nr. 338)

Nr. crt.	Simbolul lingoului	d_o mm	σ_c kgf/mm²	σ_h kgf/mm²	δ_5 %	ψ %	k kgm/cm²	Obs.
1	A	9,9	21,0	33,8	37,0	78	La ciocanul de 30 kgm probele nu au putut fi rupte	
2	B	9,9	20,0	33,9	37,4	77		

c) *Faza industrială*

În scopul verificării la scara industrială a posibilității afinării cu ajutorul aburului s-au elaborat două șarje într-un cuptor electric cu capacitate de 7 100 kg. S-a folosit un abur de 9 at și 135—150°C.

La prima șarje (nr. 01668) în încărcătură s-a introdus 2 500 kg fontă și 4600 kg șutaje de laminate.

Mersul șarjei este prezentat în tabela 9.

Tabela 9

Variația compoziției chimice (%) a primei șarje industriale

Nr. crt.	Durata suflării anterioare probei, minute	Si	Mn	C	P	Observații
1	—	0,76	0,80	1,50	0,049	La topire
2	5	0,64	0,68	1,44	0,047	
3	7	0,51	0,58	1,16	0,044	
4	4	—	0,62	1,15	0,041	
5	5	—	0,60	1,03	0,040	
6	12	—	0,52	0,88	0,038	
7	7	—	0,48	0,79	0,036	
8	10	—	0,40	0,64	—	

Durata suflării a fost relativ mare, din cauza unor defecțiuni de ordin organizatoric, din cauza unei puternice carburări a băii de la electrozi datorită barbotării intense a oțelului în contact cu electrozii și din cauza regenerării puternice a manganului.

Ca urmare, la a doua șarje industrială s-au luat măsuri pentru a împiedica recarburarea băii, prin ridicarea electrozilor.

Mersul șarjei a doua este prezentat în tabela 10. Aburul s-a suflat în aceleași condiții ca la prima șarjă industrială. Încărcătura folosită a fost cea obișnuită : 7 100 kg șutaje de laminate și 30 kg cocs.

Tabela 10

Variația compoziției chimice (%) a celei de a doua șarje industriale

Nr. crt.	Durata suflării anterioare, minute	Si	Mn	C	P	Obs.
1	—	—	0,40	0,68	0,051	La topire
2	5	—	0,22	0,26	0,048	
3	2	—	0,20	0,23	—	
4	4	—	0,18	0,13	—	
5	3	—	0,09	0,0136	—	

După terminarea afinării, cele două șarje industriale au fost continuate după tehnologia obișnuită.

5. Concluziile lucrării.

a) S-a demonstrat posibilitatea teoretică a efectuării afinării fontei și oțelului cu ajutorul aburului.

b) S-a verificat experimental în laborator, stație pilot și industrie această posibilitate, elaborînd un număr corespunzător de șarje.

c) Vitezele de afinare cu ajutorul aburului sînt tot atît de mari, ca la afinarea cu oxigen, sau la convertizarea fontei ceea ce confirmă ipoteza cu privire la asemănarea mecanismelor reacțiilor la aceste procese.

d) Caracteristicile oțelului realizat nealiat și aliat, elaborat după acest procedeu, sînt corespunzătoare cerințelor standardelor.

e) Conținutul de hidrogen este mic și, ca urmare, nu dăunează proprietăților oțelului elaborat, neconstatînd fulgi nici în oțelul cu mare sensibilitate la acest defect.

f) Prin acest procedeu se pot elabora oțeluri cu conținuturi foarte mici de carbon, chiar și de tip ARMCO.

g) Deoarece la nici o șarje nu s-a degajat în timpul suflării fum brun, se poate arăta ca avantaj al noului procedeu față de afinarea cu oxigen lipsa acestui fum care crează condiții grele de muncă, precum și al doilea avantaj: obținerea unor pierderi mai mici de fier prin oxidare. Ultimul fapt prezintă importanță deosebită la elaborarea oțelului cu conținut foarte mic de carbon.

h) Rezultatele obținute permit să se aprecieze drept necesară continuarea studiului acestui proces pe scara semiindustrială și industrială pentru a scoate în evidență toate avantajele lui tehnologice și a preciza condițiile în care el poate avea eficiență economică.

BIBLIOGRAFIE

1. *D. Cosma ș.a.* — Cercetări metalurgice și miniere; Nr. 2, 1960, 435—446.
2. Brevet francez nr. 1 113 711/1956.
3. Brevet francez nr. 1 182 730/1959.
4. *H. Neuhaus* — Stahl und Eisen nr. 26/1957
5. *K. Nemec* — Brevet cehoslovac nr. 84 416/1955.
6. *I. A. Șneerov ș.a.* — Stal nr. 8/1958, 694—701.
7. *I. A. Șneerov ș.a.* — Stal nr. 1/1960, 32—35.
8. *S. T. Rostovțev* — Teoria proceselor metalurgice, (traducere din limba rusă) ed. II, Ed. Tehnică 1960.

ИССЛЕДОВАНИЕ НОВОГО МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА: РАФИНИРОВАНИЕ ЧУГУНА И СТАЛИ С ПОМОЩЬЮ ПАРА

(Резюме)

Термодинамическое и кинетическое исследование процессов рафинирования чугуна и стали с помощью пара позволило установить принципиальную возможность их проведения, а также сделать несколько выводов о ходе этих процессов.

Теоретические выводы были подтверждены 3 лабораторными (4 кг), 4 полупромышленными (500 кг) и 2 промышленными (7 100 кг) плавками.

Новым процессом можно выплавить сталь даже с очень низким содержанием углерода (в конце рафинировки одной промышленной плавки получено 0,0136% С).

Механические свойства выплавленной стали (нелегированной и легированной) соответствовали требованиям стантарда. Содержание водорола было невысоким и, следовательно, не оказало вредного влияния на эти свойства.

Скорость рафинировки этим процессом оказалась такой же высокой что и при кислородном процессе. Во время рафинировки паром бурый дым не выделяется, что является одним нз преимуществ ного процесса.

STUDY OF A NEW METALLURGICAL PROCESS: STEAM REFINING OF IRON AND STEEL

(Summary)

The thermodynamic and kinetic study of iron and steel steam refining processes made it possible to establish their applicability, in principle, and to draw certain conclusions on their course of development. The theoretical conclusions have been fully confirmed by the three laboratory heats (4 kgs), the four semi-industrial heats (500 kgs) and the two full-size heats (7 100 kgs).

By this new process it is possible to produce steel even with a very low carbon content (0,0136 per cent. carbon was obtained at the end of an industrial heat).

The physical properties of the produced steel (alloy steel as well as plain carbon steel) meet the specifications of the pertinent standards. The hydrogen content is low and, hence, does not impair these properties.

The rates of refining by this process are as high as in oxygen refining. With steam refining brown smoke is not evolved, thus representing one advantage of the new process.

ÉTUDE D'UN NOUVEAU PROCÉDÉ MÉTALLURGIQUE: L'AFFINAGE DE LA FONTE ET DE L'ACIER PAR LA VAPEUR

(Résumé)

L'étude thermodynamique et cinétique des procédés d'affinage de la fonte et de la l'acier par la vapeur a permis d'établir la possibilité théorique de leur réalisation ainsi que de tirer certaines conclusions sur les phénomènes impliqués dans cette opération. Les conclusions théoriques ont été entièrement confirmées par les trois charges élaborées au laboratoire, (4 kgs), les quatre charges semi-industrielles (500 kgs) et les deux charges industrielles (7 100 kgs).

Le nouveau procédé permet d'élaborer des aciers, même à très faible teneur de carbone (on a obtenu à la fin de l'affinage d'une charge industrielle 0,0136%C).

Les caractéristiques mécaniques des aciers élaborés (aciers au carbone aussi bien qu'aciers spéciaux) correspondent aux conditions des normes. La teneur d'hydrogène est faible et, par suite, ne nuit pas à ces caractéristiques.

Les vitesses d'affinage obtenues par ce procédé ne sont pas inférieures à celles de l'affinage à l'oxygène. Il ne se dégage pas de fumée brune pendant l'affinage à la vapeur, ce qui constitue un avantage du nouveau procédé.

STUDIUM ÜBER EIN NEUES VERFAHREN IN EISENHÜTTENKUNDE: WASSERDAMPFFRISCHE VON EISEN UND STAHL

(Auszug)

Das thermodynamische und kinetische Studium von Eisen und Stahlraffinieren durch Wasserdampf ermöglichte die theoretische Durchführbarkeit des Verfahrens zu begründen und ferner bestimmte Folgerungen über dessen Gang festzustellen. Die theoretischen Folgerungen wurden gänzlich durch drei Laboratoriumchargen (4 kg), vier 500 kg Chargen und zwei unter Betriebsverhältnissen (7 100 kg) erzeugten Chargen bestätigt.

Das neue Verfahren ermöglicht die Herstellung von Stähle mit einem sehr geringem Kohlenstoffgehalt (am Ende des Raffinierens einer 7 100 kg Charge wurde ein Kohlenstoffgehalt von 0,0136%C erhalten).

Die mechanischen Eigenschaften des hergestellten Stahles (legiert sowohl unlegiert) entsprechen den Normen. Der Wasserstoffgehalt ist gering und somit beinträcht diese Eigenschaften nicht.

Die Entkohlungsgeschwindigkeiten sind bei diesem Verfahren gleich so gross wie bei der Sauerstoffraffinierung. Während des Frieschens entwickeln sich kein braune Rauch, was einen Vorteil des neuen Verfahrens darstellt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

DETERMINAREA STELAJELOR MANIVELELOR ȘI A UNGHIURILOR DINTRE LINIILE DE CILINDRI LA MOTOARELE ÎN V ÎN DOI TIMPI CU APRINDERI UNIFORM REPARTIZATE

G. BĂRĂNESCU, N. APOSTOLESCU

1. Introducere.

La cercetarea problemelor de echilibraj ale motoarelor cu ardere internă, este necesar să se cunoască în prealabil stelajul manivelelor, adică poziția relativă în jurul axei de rotație a manivelelor. Datele inițiale ale problemei sînt numărul și așezarea cilindrilor, precum și repartiția aprinderilor, care în general se alege uniformă.

Dacă cilindrii motorului sînt așezați în linie și aprinderile sînt uniform repartizate, pentru fiecare număr de cilindri există un singur stelaj al manivelelor.

Cînd așezarea cilindrilor motorului se face în V, pentru un număr de cilindri dat există mai multe stelaje ale manivelelor care asigură uniformitatea aprinderilor. Totodată echilibrajul motorului depinde și de unghiul dintre liniile de cilindri, care poate avea mai multe valori. În vederea folosirii soluției optime este deci necesar să se stabilească toate stelajele manivelelor și toate unghiurile posibilie dintre liniile de cilindri.

În articol se cercetează aceste probleme pentru cazul mai complex al motoarelor în V în doi timpi cu aprinderi uniform repartizate. Expunerea nu face distincția între ambielajul normal și ambielajul articulat, deoarece, datorită identității mecanismelor motoare din fiecare linie, aceleași stelaje ale manivelelor asigură uniformitatea aprinderilor atît la motoarele în V cu ambielaj normal, cît și la motoarele în V cu ambielaj articulat.

2. Condiții generale.

Realizarea uniformității aprinderilor reclamă îndeplinirea unor condiții în legătură cu stelajul manivelelor și cu unghiul dintre liniile de cilindri.

În fiecare linie echipajele mobile sînt identice și ca urmare, în momentul declanșării aprinderilor, manivelele ocupă aceleași poziții față de planul cilindrilor dintr-o linie. Rezultă că manivelele trebuie plasate numai pe

direcțiile uniform distribuite în jurul axei de rotație, care pentru motoarele în doi timpi fac între ele unghiul $\frac{2\pi}{i}$ dintre două aprinderi, unde i este numărul total de cilindri. Exista deci i direcții radiale uniform distribuite în jurul axei de rotație, pe care urmează să fie plasate $\frac{i}{2}$ manivele.

La motoarele în doi timpi, unde aprinderile au loc într-o singură rotație a arborelui cotit, nu se pot produce simultan mai multe puncte moarte. Manivelele trebuie deci să ocupe fiecare cîte o direcție radială; din cele i direcții radiale disponibile vor fi întotdeauna ocupate $\frac{i}{2}$ direcții.

Unghiul γ dintre liniile de cilindri, care este cuprins între $0 < \gamma \leqslant \pi$, poate fi la motoarele cu ambielaj normal numai un multimplu al unghiului dintre două aprinderi

$$\gamma = K\frac{2\pi}{i}, \quad (K = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

deoarece mecanismele motoare din cele două linii fiind identice, în momentul declanșării aprinderilor, manivelele trebuie să ocupe aceleași poziții față de planul cilindrilor din oricare linie; neîndeplinirea condiției (1) ar duce la aprinderi neuniform repartizate cînd se face trecerea aprinderilor dintr-o linie în alta. La motoarele în V cu ambielaj articulat, pentru realizarea uniformității aprinderilor, unghiul dintre liniile de cilindri nu este obligatoriu un multiplu al unghiului dintre două aprinderi. El poate avea și alte valori, cu condiția ca elementele geometrice ale mecanismelor cu bielă secundară să fie astfel alese, încît să se realizeze puncte moarte interioare în linia respectivă, cînd manivelele trec prin dreptul unui plan, ce face cu planul cilindrilor cu biele principale unul din unghiurile la care se obțin aprinderi uniform repartizate pentru motorul cu ambielaj normal și același stelaj al manivelelor.

Cele două linii de cilindri fiind deservite de același arbore cotit, succesiunea aprinderilor în fiecare linie este aceeași. În fiecare linie aprinderile pot să se succeadă în grupe cu același număr de aprinderi, sau în grupe cu număr diferit de aprinderi.

3. Cazul succesiunii aprinderilor în grupe egale.

Dacă aprinderile se succedă în grupe egale, numărul de aprinderi dintr-o grupă poate fi numai oricare din divizorii d ai numărului de cilindri dintr-o linie, deoarece $d+d+d+\ldots = \frac{i}{2}$, sau $ad = \frac{i}{2}$. Stelajul manivelelor va fi format din a grupe de cîte d manivele; în fiecare grupă manivelele sînt aranjate cîte una pe direcțiile radiale disponibile consecutive,

grupele de manivele fiind separate între ele prin d direcții radiale consecutive libere.

Pentru ambielajul normal, la fiecare din divizorii d unghiurile dintre liniile de cilindri se aleg dintre unghiurile precizate de formula (1), astfel ca să nu se realizeze niciodată mai multe puncte moarte simultane. Aceasta se întîmplă dacă în stelajul manivelelor nici una din manivele nu face cu alta unghiul dintre liniile de cilindri.

În vederea stabilirii unghiurilor γ posibile la un stelaj dat, se determină unghiurile pe care le fac manivelele între ele. Manivelele unei grupe fac între ele unghiurile $\frac{2\pi}{i}, 2\frac{2\pi}{i}, \ldots (d-1)\frac{2\pi}{i}$. Plecînd de la una din grupe, și analizînd unghiurile pe care le fac manivelele ei cu manivelele celorlalte grupe, se ajunge la concluzia că unghiurile dintre manivele sînt următorii multipli de $\frac{2\pi}{i}$

$$1 \ldots . d - 1$$
$$d + 1 \ldots . 3d - 1$$
$$3d + 1 \ldots . 5d - 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

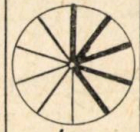
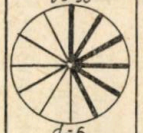
Ca urmare multiplul K din formula (1) poate avea numai valorile egale cu multipli impari ai divizorului d.

În tabloul 1 sînt trecute stelajele manivelelor și unghiurile γ posibile, pentru motoarele în V în doi timpi, cu ambielaj normal și aprinderi uniform repartizate, la care aprinderile se succedă în fiecare linie în grupe egale.

4. Cazul succesiunii aprinderilor în grupe neegale.

Se presupune că succesiunea aprinderilor într-o linie este $q+r+s+t+\ldots = \frac{i}{2}$ în total a grupe de aprinderi. În stelajul manivelelor cele i direcții radiale disponibile vor fi repartizate pe $2a$ sectoare și anume după fiecare sector cu direcțiile radiale ocupate de manivele urmează cîte un sector cu direcțiile radiale libere. Se alege un sens de parcurgere a stelajului manivelelor de exemplu sensul invers sensului de rotație al arborelui cotit, și se numerotează consecutiv cele $2a$ sectoare, astfel ca sectoarele în care direcțiile radiale sînt ocupate de manivele să poarte numere de ordine impare. Pentru simplificarea expunerii se presupune că în orice linie de cilindri aprinderile sînt declanșate în punctele moarte interioare, care se realizează cînd manivelele trec prin dreptul planului liniei de cilindri respective.

Tabloul 1

Nr. de cilindri	2	4	6	8	10	12	14	16
Divizorii numărului de manivele d	1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8
Stelajul manivelelor și unghiurile dintre liniile de cilindri	 d = 1 γ = 180°	 d = 1 γ = 90° d = 2 γ = 180°	 d = 1 γ = 60°; 180° d = 3 γ = 180°	 d = 1 γ = 45°; 135° d = 2 γ = 90° d = 4 γ = 180°	 d = 1 γ = 36°; 108°; 180°  d = 5 γ = 180°	 d = 1 γ = 30°; 90°; 150° d = 2 γ = 60°; 180° d = 3 γ = 90°  d = 6 γ = 180°	 d = 1 γ = π/7 ; 3π/7 5π/7 ; π d = 7 γ = 180°	 d = 1 γ = 22,5°; 67,5°; 112,5°; 157,5° d = 2 γ = 45°; 135° d = 4 γ = 90° d = 8 γ = 180°

Stelajele manivelelor și unghiurile dintre liniile de cilindri la motoarele în V în doi timpi cu ambielaj normal și aprinderi uniform repartizate, la care aprinderile se succedă în fiecare linie în grupe egale

Urmează să se precizeze unghiurile posibile dintre liniile de cilindri și stelajele manivelelor, pentru motoarele cu aprinderi uniform repartizate.

Unghiul dintre liniile de cilindri fiind un multiplu al unghiului dintre două direcții radiale consecutive, cînd se realizează un punct mort interior într-o linie, în dreptul celeilalte linii se va afla una din direcțiile radiale; aceasta trebuie să fie liberă, pentru a nu se produce două puncte moarte interioare simultane. Ca urmare, cît timp manivelele unuia din cele a sectoare comandă aprinderile într-o linie, în dreptul celeilalte linii trebuie să treacă un număr egal de direcții radiale libere; în stelajul manivelelor, la fiecare din cele a sectoare cu direcțiile radiale ocupate de manivele, trebuie să existe cîte un sector, care să conțină același număr de direcții radiale libere.

Se consideră intervalul de timp în care aprinderile dintr-o linie sînt comandate de manivelele sectorului $2f-1$ ($f=1, 2, 3, \ldots$). În acest interval trec prin dreptul planului cilindrilor celeilalte linii direcțiile radiale libere ale sectorului cu numărul de ordine $2f-1+\delta$, unde δ este un număr impar, deoarece — conform numerotării — sectoarele cu direcțiile radiale libere au numere de ordine pare. În momentul aprinderii corespunzătoare primei manivele a sectorului $2f-1$, în dreptul planului cilindrilor celeilalte linii trebuie să se afle prima direcție radială a sectorului $2f-1+\delta$. Ca urmare, unghiul γ dintre liniile de cilindri este egal cu unghiul dintre prima manivelă a sectorului $2f-1$ și prima direcție radială a sectorului $2f-1+\delta$. El are mărimea

$$\gamma = K_d \frac{2\pi}{i}, \qquad (2)$$

în care K_d este numărul de direcții radiale (libere, sau ocupate de manivele) conținute de un număr impar δ de sectoare consecutive *.

Odată fixat numărul de sectoare care determină unghiul dintre liniile de cilindri, rezultă și perechile de sectoare care conțin același număr de direcții radiale (la unele, direcții radiale fiind ocupate de manivele). Astfel, cît timp prin dreptul unei linii trec manivelele sectorului 1, prin dreptul celeilalte linii trec direcțiile radiale ale sectorului $\delta+1$, al căror număr trebuie să fie agl cu numărul de manivele ale sectorului 1. Urmează în cealaltă linie aprinderile corespunzătoare manivelelor sectorului $\delta+2$; în acest timp trec prin dreptul primei linii direcțiile radiale libere ale sectorului 2, al căror număr trebuie să fie egal cu numărul de manivele ale sectorului $\delta+2$. Vor avea deci același număr de direcții radiale sectoarele

* Mai departe se arată că $\delta \neq 1$

$$
\left.\begin{array}{lcl}
1 & \text{cu} & \delta+1 \\
2 & \text{cu} & \delta+2 \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\delta & \text{cu} & 2\delta+1 \\
\delta+1 & \text{cu} & 2\delta+1 \\
\delta+2 & \text{cu} & 2\delta+2 \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
2\delta & \text{cu} & 3\delta \\
2\delta+1 & \text{cu} & 3\delta+1 \\
2\delta+2 & \text{cu} & 3\delta+2 \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
3\delta & \text{cu} & 4\delta \\
3\delta+1 & \text{cu} & 4\delta+1 \\
3\delta+2 & \text{cu} & 4\delta+2 \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
4\delta & \text{cu} & 5\delta
\end{array}\right\} \quad (3)
$$

etc

Din acest șir de relații se constată că unele sectoare cu direcțiile radiale ocupate de manivele au același număr de manivele. De exemplu, sectoarele cu numerele de ordine 1 și 2 $\delta+1$ au un număr de manivele egal cu numărul de direcții radiale libere ale sectorului $\delta+1$; sectoarele cu numerele de ordine 2 $\delta+1$ și 4 $\delta+1$ au un număr de manivele egal cu numărul de direcții radiale libere ale sectorului $3\delta+1$; etc. Deci sectoarele cu numerele de ordine 1, 2 $\delta+1$, 4 $\delta+1$, ... au același număr de mani-

vele. La fel sectoarele cu numerele de ordine 3, $2\delta+3$, $4\delta+3$, ... Rezultă că sectoarele care au direcțiile radiale ocupate de manivele (sectoarele cu numere de ordine impare) se aranjează în serii consecutive de cîte δ grupe, fiecare serie fiind formată din aceleași grupe, dispuse în aceeași ordine *:

Numerele de ordine ale sectoarelor din seria I, cu direcțiile radiale ocupate de manivele:

	1		3		5	.....	δ	.....	$2\delta-1$
idem seria II-a	$2\delta+1$		$2\delta+3$		$2\delta+5$	.....	3δ	.....	$4\delta-1$
idem seria III-a	$4\delta+1$		$4\delta+3$		$4\delta+5$	....	5δ	.....	$6\delta-1$

etc.

Dacă există m serii de sectoare cu direcțiile radiale ocupate de manivele, numărul total de astfel de sectoare este

$$a = m \cdot \delta \tag{4}$$

Pentru $\delta = 1$ se obține un stelaj al manivelelor format din a serii, fiecare avînd cîte un sector cu același număr de manivele; la un astfel de stelaj aprinderile se vor succeda în grupe egale și ca atare el nu face parte dintre stelajele căutate.

Numărul m de serii de sectoare poate avea numai anumite valori, dependente de numărul de cilindri ai motorului. Valoarea minimă este $m=1$. Valoarea maximă se obține cînd fiecare serie conține numărul minim de sectoare cu direcțiile radiale ocupate de manivele ($\delta=3$), seriile fiind realizate cu numărul minim de manivele, adică patru manivele (două sectoare conțin cîte o manivelă, iar al treilea sector două manivele); fiindcă numărul total de manivele este egal cu numărul de manivele dintr-o serie înmulțit cu numărul de serii, se obține $4m_{max} \leqslant \frac{i}{2}$. Rezultă deci condiția

$$1 \leqslant m \leqslant \frac{i}{8} \quad (m \text{ întreg}). \tag{5}$$

Pe de altă parte fiecare serie conține același număr de manivele și ca atare pentru a se putea forma m serii, numărul total de manivele trebuie să fie divizibil cu m, rezultatul diviziunii fiind cel puțin patru. Din valorile precizate de condiția (5) sînt posibile numai valorile care îndeplinesc și condiția

$$m = \frac{i}{2K'} \quad (K' = 4, 5, 6, \ldots) \tag{6}$$

* S-au încadrat sectoarele care conțin același număr de manivele.

După fixarea valorilor posibile ale numărului m de serii conform condițiilor (5) și (6), se pot stabili și valorile posibile ale numărului total a de sectoare care au direcțiile radiale ocupate de manivele. Din (4) rezultă că a este egal cu multipli impari ai numărului m, începînd cu multiplu trei

$$a = (2K + 1)\, m \quad (K = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Valoarea maximă a numărului a se obține cînd în fiecare serie sectoarele care au direcțiile radiale ocupate de manivele conțin cîte o manivelă, cu excepția unui sector care conține două manivele, deci

$$a_{max} = \frac{i}{2} - m. \tag{8}$$

Cunoscînd valoarea numărului m de serii de sectoare, rezultă și unghiul dintre cele două linii de cilindri. Conform relației (2) acest unghi este determinat de numărul de direcții radiale conținute de un număr impar δ de sectoare consecutive. Din șirul (3) rezultă că δ sectoare consecutive oarecare conțin același număr de direcții radiale. Ca urmare același număr de direcții radiale va conține și un număr de sectoare consecutive egal cu orice multiplu al numărului δ. Se presupune cazul cînd acest multiplu este par și se consideră intervalul în care aprinderile dintr-o linie sînt comandate de manivelele sectorului $2f - 1$. În acest interval, prin dreptul celeilalte linii trec direcțiile radiale ale sectorului $2f - 1 + 2K\delta$ $(K = 1, 2, 3, \ldots)$, care trebuie să fie libere, pentru a nu se realiza puncte moarte interioare simultane. Însă numărul $2f - 1 + 2K\delta$ este impar, deci direcțiile radiale ale sectorului care poartă acest număr de ordine sînt ocupate de manivele. Rezultă că la stabilirea unghiului dintre liniile de cilindri se poate considera numai un număr de sectoare consecutive egal cu multiplii impari ai numărului δ

$$n = (2K - 1)\delta \quad (K = 1, 2, 3, \ldots).$$

Fiindcă în total există i direcții radiale, uneia din cele m serii de sectoare îi revin $\frac{i}{m}$ direcții radiale. Fiecare serie avînd 2δ sectoare, numărul de direcții radiale conținut de δ sectoare consecutive este $\frac{i}{2m}$. Cele n sectoare consecutive conțin deci $K_d = (2K - 1)\frac{i}{2m}$ direcții radiale. Înlocuind această expresie în formula (2), rezultă valorile posibile ale unghiului dintre liniile de cilindri.

$$\gamma = (2K -)\frac{\pi}{m} \leqslant \pi \qquad (K = 1, 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Pentru un număr de cilindri dat, formulele (5) ... (9) determină caracteristicile generale ale stelajului manivelelor. Mai întîi se stabilesc

din formulele (5) și (6) valorile numărului de serii m. La fiecare din aceste valori rezultă din formulele (7) și (8) valorile numărului total de sectoare a care au direcțiile radiale ocupate de manivele, iar din formula (9) unghiurile la care se pot cala cele două linii de cilindri.

Formula (5) arată că pentru obținerea unei succesiuni a aprinderilor în grupe neegale, este necesar ca motorul să aibă cel puțin opt cilindri. Din formula (6) rezultă că organizarea manivelelor în mai multe serii de grupe este posibilă numai pentru anumite valori ale numărului de cilindri ; de exemplu se pot forma $m=2$ serii dacă $i=16, 20, 24....$ cilindri, $m=3$ serii dacă $i=24, 30,...$ cilindri, etc. La $m=1$ și $i \geqslant 8$ condiția (6) este întotdeauna satisfăcută, deci manivelele se pot întotdeauna organiza într-o singură serie de grupe ; în acest caz numărul de grupe poate fi egal cu orice număr impar cuprins între 3 și $\frac{i}{2} - 1$ [formulele (7) și (8)], iar unghiul dintre liniile de cilindri este $\gamma = \pi$.

După determinarea caracteristicilor generale ale stelajului manivelelor prin intermediul mărimilor m, a și γ, urmează să se repartizeze cele $\frac{i}{2m}$ manivele care revin unei serii. Această repartiție poate fi făcută în toate modurile distincte posibile, cu condiția să existe cel puțin o grupă care să conțină un număr de manivele diferit de numărul de manivele ale celorlalte grupe ; dată toate grupele ar avea același număr de manivele, aprinderile s-ar succeda în grupe egale și deci stelajul obținut nu face parte din stelajele căutate. Repartițiile sînt distincte unele de altele, cînd succesiunea aprinderilor în fiecare linie de cilindri nu depinde de grupa de manivele aleasă ca origine, sau de sensul de rotație al arborelui cotit. De exemplu, dacă într-o serie există trei grupe (trei sectoare cu direcțiile radiale ocupate de manivele) cărora le revin șase manivele și s-a ales repartiția.

I) 3, 2, 1,

adică prima grupă este formată din trei manivele, a doua grupă din două manivele și ultima grupă dintr-o manivelă, repartițiile

II) 2, 1, 3
III) 1, 3, 2
IV) 1, 2, 3
V) 2, 3, 1
VI) 3, 1, 2

nu sînt distincte, deoarece repartițiile II și III conduc la aceeași succesiune a aprinderilor ca repartiția I (la care se alege ca origine respectiv grupa doua și a treia), iar ultimele trei repartiții derivă din primele trei prin schimbarea sensului de rotație al arborelui cotit.

Pentru precizarea stelajului manivelelor este suficient să se stabilească într-o serie poziția unui sector cu direcțiile radiale libere față de

sectorul care conține același număr de direcții radiale, ocupate însă de manivele. Dacă se atribuie numărul de ordine 1 unui sector oarecare cu direcțiile radiale ocupate de manivele, sectorul numărul $\delta+1$ $\left(\delta=\frac{a}{m}\right)$ trebuie să aibă același număr de direcții radiale libere. De exemplu pentru $m=1$ și $a=5$ grupe de manivele, care au q, r, s, t, u manivele, atribuind numărul de ordine 1 sectorului care conține q manivelele, sectorul numărul $\delta+1=6$ trebuie să aibă q direcții radiale libere, adică

$$\delta=\frac{a}{m}$$

Sectorul	$\boxed{q}$		$\boxed{r}$		$\boxed{s}$	q	$\boxed{t}$		$\boxed{u}$	
Numărul de ordine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Succesiunea sectoarelor cu direcțiile radiale libere fiind tot q, r, s, t, u, stelajul manivelelor va fi

$$\boxed{q}\ t\ \boxed{r}\ u\ \boxed{s}\ q\ \boxed{t}\ r\ \boxed{u}\ s,$$

adică după q direcții radiale ocupate de q manivele urmează t direcții radiale libere, apoi r direcții radiale ocupate de manivele etc.

In tabloul 2 sînt trecute stelajele manivelelor și unghiul dintre liniile de cilindri pentru motoarele în V în doi timpi cu 8...16 cilindri, la care aprinderile sînt uniform repartizate dar se succedă în fiecare linie în grupe neegale.

Concluzii

Metoda descrisă este generală. Ea permite stabilirea tuturor stelajelor manivelelor și unghiurilor dintre liniile de cilindri la motoarele în V cu aprinderi uniform repartizate, oricare ar fi numărul de cilindri.

Din punctul de vedere al echilibrajului forțelor de inerție sînt avantajoase stelajele la care manivelele sînt uniform distribuite în jurul axei de rotație. Din punctul de vedere al echilibrajului momentelor forțelor de inerție sînt avantajoase stelajele la care manivelele sînt două cîte două în opoziție, iar unghiul dintre liniile de cilindri este 90°; deoarece în aceste condiții este posibilă echilibrarea completă a momentelor externe ale forțelor de inerție.

Rezumat.

Se prezintă o metodă de determinare a stelajelor manivelelor și a unghiurilor dintre liniile de cilindri la motoarele în V în doi timpi cu aprinderi uniform repartizate. Mai întîi se stabilesc unele condiții gene-

rale, după care se tratează cazul succesiunii aprinderilor în fiecare linie în grupe neegale. Metoda este generală, ea putînd fi aplicată motoarelor în V în doi timpi cu orice număr de cilindri.

BIBLIOGRAFIE

Schrön H.: Die Zündfolge. R. Oldenbourg, Berlin, 1938.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕЛЛАЖА КРИВОШИПОВ И УГЛОВ МЕЖДУ ОСЯМИ ЦИЛИНДРОВ В V-ОБРАЗНЫХ ДВУХТАКТНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ С РАВНОМЕРНЫМ ЗАЖИГАНИЕМ

Краткое содержание

Представляется метод определения стелажа кривошипов и углов между осями цилиндров в V-образных двухтактных двигателях с равномерным зажиганием.

В начале устанавливаются некоторые общие условия, после чего исследуются последовательность зажилания в каждой линии цилиндров в равных группах, а затем последовательность зажигания в каждой линии в неравных группах. Это является общим методам, который может быть применен V-образным двухтактным двигателям с любым числом цилиндров.

DETERMINATION OF CRANKSTARS AND CYLINDER LINES ANGLES FOR V TRVO STROKE ENGINES, WITH UNIFORMLY DISTRIBUTED IGNITIONS

(Summary)

A method is shown, to find crankstars and cylinder lines angles for V two stroke engines, with uniformly distributed ignitions. Some general conditions are established, and then the casses of ignitions succession in equal groups and inequal groups in every line are treated.

The method is general, it may be applied for V two storke engines, no matter the number of cylinders would be.

DÉTERMINATION DES STELLAGES DES MANIVELLES ET DES ANGLES ENTRE LES LIGNES DES CYLINDRES CHEZ LES MOTEURS EN V EN DEUX TEMPS AVEC DES ALLUMAGES UNIFORMÉMENT REPARTIS

(Résumé)

On présente une m-thode de détermination des stellages des manivelles et des angles entre les lignes des cylindres chez les moteurs en V en deux temps avec des allumages uniformément repartis. On etablit

premièrement quelques conditions généraux, et après on traite le cas des successions des allumages en chaque ligne en groupes egaux et le cas des successions des allunmages en chaque ligne en groupes inégaux. La méthode est générale, elle peut être appliquée pour les moteurs en V en deux temps à n'importe quel nombre des cylindres.

BESTIMMUNG DES KURBELSTERNS UND DER WINKEL ZWISCHEN DEN ZYLINDERREIHEN BEI ZWEITAKT V-MOTOREN MIT GLEICHER ZÜNDFOLGE

(Zusammenfassung)

Es wird eine Methode zur Bestimmung des Kurbelsterns und der Winkel zwischen Zilinderreihen den Zweitakt V-Morten geboten.

Anfangs werden einige allgemeine Bedingungen festgelgt, nachher werden die Zündfolgen für gleiche Gruppen und dann für ungleiche Gruppen in jeder Reihe behandelt.

Die Methode ist allgemein, sie kann Zweitakt V-Motoren mit beliebiger Zylinderanzahl angewendet werden.

Tabloul 2

i	$3 \le a \le \frac{i}{2}-1$	δ	$\Delta \le a$	Succesiunea sectoarelor în stelajul manivelelor *)	Repartizările posibile ale manivelelor aferente unei serii de sectoare q	r	s	t	u	v	w	Stelajul manivelelor
8	1	3	3	$\overbrace{q\,s\,r}^{\delta}\,q\,s\,r$	2	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
10	1	3	3		3	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
					2	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
12	1	3	3		4	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
					3	2	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
		5	5	$\overbrace{q\,t\,r\,u\,s\,q\,t\,r\,u\,s}^{\delta}$	2	1	1	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
14	1	3	3	$\overbrace{q\,s\,r\,q\,s\,r}^{\delta}$	5	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
					4	2	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
					3	3	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
					3	2	2	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
		5	5	$\overbrace{q\,t\,r\,u\,s\,q\,t\,r\,u\,s}^{\delta}$	3	1	1	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
					2	2	1	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
					2	1	2	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
16	1	3	3	$\overbrace{q\,s\,r\,q\,s\,r}^{\delta}$	6	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
					5	2	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
					4	3	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
					4	2	2	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
					3	3	2	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
		5	5	$\overbrace{q\,t\,r\,u\,s\,q\,t\,r\,u\,s}^{\delta}$	4	1	1	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
					3	2	1	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
					3	1	2	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
					2	2	2	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
					2	1	2	2	1	–	–	$\gamma = 180°$
		7	7	$\overbrace{q\,u\,v\,r\,o\,u\,t\,q\,u\,v\,o\,w\,t}^{\delta}$	2	1	1	1	1	1	1	$\gamma = 180°$
	2	6	3	$\overbrace{q\,o\,v\,q\,o\,r\,q\,o\,v\,q\,o\,r}^{\delta}$	2	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 90°$

*) Stelajele manivelelor și unghiurile dintre liniile de cilindri la motoarele în V în doi timpi cu ambielaj normal și aprinderi uniform repartizate, la care aprinderile se succedă în fiecare linie în grupe neegale.

Tabelul 3

i	Treapta	d	d d a	Stelajul manivelelor *)	Suprafețuirea stelajului manivelelor *)	Reperizările posibile ale manivelelor decalate unul față de celălalt							Stelajul manivelelor
						q	r	s	t	u	v	w	
8		3	3			2	1	1	–				$\gamma = 180°$
10	1	3	3			3	1	1	–				$\gamma = 180°$
						2	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
12	1	3	3			4	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
						3	2	1	–	–	–	–	$\beta = 180°$
		5	5			2	1	1	1	–	–	–	$\gamma = 180°$
14	1	3	3			5	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
						4	2	1	–	–	–	–	$\beta = 180°$
						3	3	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
		5	5			3	2	2	–	–	–	–	$\beta = 180°$
						2	1	1	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
16	1	3	3			5	1	1	–	–	–	–	$\gamma = 180°$
						4	1	1	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
						3	2	1	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
		5	5			3	1	2	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
						2	2	2	1	1	–	–	$\gamma = 180°$
		7	7			2	1	1	1	1	1	1	$\gamma = 180°$
		5	5			2	1	1	–	–	–	–	$\beta = 60°$

*) Stelajele manivelelor și ampliturile diferite limite de cilindri la motoarele în V în doi timpi cu aprindere normal și aprindere uniform repartizate, la care aprinderile se succedă în fiecare linie în grupe negale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

ASUPRA TEOREMELOR LUI THÉVENIN ȘI NORTON

MARIUS PREDA

În calculul circuitelor electrice se folosesc frecvent teoremele lui Thévenin și Norton (B 1) și, îndeosebi, atunci cînd se pune problema determinării intensității curentului într-o singură latură (sau într-un singur element) a circuitului. Prima teoremă exprimă această intensitate de curent în funcție de tensiunea la borne în regimul de mers în gol iar a doua din aceste teoreme folosește intensitatea curentului în regimul de scurtcircuit.

a) Teorema înlocuirii

În cele de mai jos se demonstrează noi forme ale acestor teoreme care exprimă intensitatea curentului căutat, respectiv tensiunea la borne, în funcție de intensitatea curentului și tensiunea la borne corespunzătoare unui regim oarecare. Acest mod de abordare a problemei reprezintă pe de o parte un progres metodic — prin faptul că printr-o demonstrație simplă se stabilesc simultan atît teorema lui Thévenin cît și teorema lui Norton, iar pe de altă parte aceste noi forme au avantajul că rezolvă direct o clasă mai largă de probleme, care constau în determinarea curenților dintr-un element de circuit, cu impedanță cunoscută în funcție de curentul și tensiunea la bornele acestui element de circuit într-un regim cînd acesta are o altă impedanță (oarecare).

Pentru demonstrație considerăm un circuit liniar și activ, în regim armonic permanent, avînd un element de circuit (fig. 1), de impedanță complexă Z', străbătut de un curent de intensitate $\underline{I'}$ și avînd la borne o tensiune $\underline{U'}$.

Aceste trei mărimi sînt dependente în virtutea legii lui Ohm

$$\underline{U'} = Z' \underline{I'} . \tag{1}$$

Ne propunem să determinăm (în regim armonic permanent) intensitatea curentului care se stabilește prin elementul de circuit considerat, în cazul cînd impedanța acestuia nu va mai avea valoarea Z' ci va avea valoarea Z. Noile valori, corespunzătoare, ale tensiunii și intensității curentului (fig. 2 a) le vom nota cu $\underline{U}$ respectiv $\underline{I}$.

Adăugînd, în serie cu elementul de impedanță Z, două surse ideale de tensiuni electromotoare egale avînd valorile

$$\underline{E'} = \underline{U'} \tag{2}$$

și acționînd în sensuri opuse (fig. 2 b), evident, intensitatea curentului

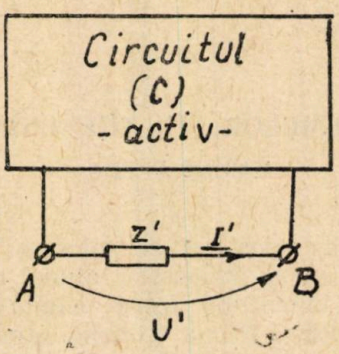


Fig. 1

din latura cu elementul de impedanță Z nu se modifică, ci își păstrează valoarea I.

Circuitul considerat fiind prin ipoteză liniar, putem aplica teorema superpoziției — așa cum se indică schematic în figura 3 — suprapunînd

(b)

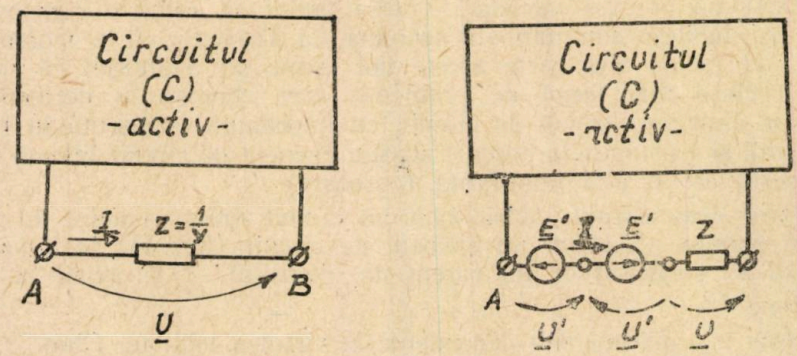


Fig. 2

efectele surselor S_2 și S_3 pe de o parte, cu efectele sursei S_1 și a celor din circuitul activ (C) pe de altă parte.

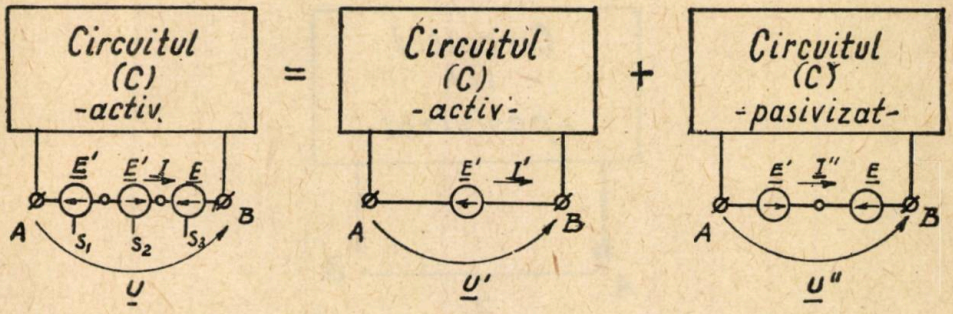
Tensiunea electromotoare a sursei ideale S_3, introduse folosind teorema compensației, avînd valoarea

$$\underline{E} = Z\underline{I}, \tag{3}$$

conform teoremei superpoziției rezultă

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}' + \underline{U}'' \\ \underline{I} &= \underline{I}' + \underline{I}'' , \end{aligned} \tag{4}$$

unde semnificația notațiilor este cea indicată în figura 3.



Fg. 3

Folosind relațiile (1, 2, 3, 4), și aplicînd legea Ohm ultimului circuit din figura 3, se deduc ecuațiile

$$\underline{U} = \underline{U}' + Z_i \cdot (\underline{I}' - Y\underline{U}) \tag{5}$$

$$\underline{I} = \underline{I} + Y_i \cdot (\underline{U}' - Z\underline{I}) \tag{6}$$

unde Z și Y sînt respectiv impedanța și admitanța complexă de intrare a circuitului dat (C), în raport cu bornele A și B la care este conectat elementul de impedanță Z. Pentru determinarea acestei impedanțe de intrare Z_i se pasivizează circuitul (C) — anulînd toate t.e.m. ale surselor din acest circuit — și se calculează (sau se măsoară) impedanța dintre punctele A și B (fig. 4).

Rezolvînd ecuația (5) în raport cu $\underline{U}$ se obține formula

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}' + Z_i \underline{I}'}{1 + YZ_i} \tag{7}$$

care reperzintă o generalizare a teoremei lui Norton.

Rezolvînd ecuația (6) în raport cu $\underline{I}$ se obține formula

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}' + Y_i \underline{U}'}{1 + ZY_i} \tag{8}$$

care reprezintă o generalizare a teoremei lui Thévenin.

Formulele (7) și (8) reprezintă generalizări ale teoremelor lui Norton și Thévenin, în sensul că exprimă mărimile „căutate" $\underline{U}$ respectiv $\underline{I}$ nu în funcție de mărimile ce caracterizează funcționarea unui regim „inițial" particular (mersul în scurtcircuit respectiv mersul în gol) ci în funcție

de mărimile corespunzătoare unui regim de funcționare „inițial" oarecare (deci inclusiv cel de mers în scurtcircuit sau cel de mers în gol), caracterizat prin mărimile U' și I'.

Particularizînd relația (7) pentru $\underline{U}'=0$ se obține valoarea tensiunii $\underline{U}$, de la bornele impedanței Z, în funcție de curentul $\underline{I}'=\underline{I}_{sc}$ care ar trece

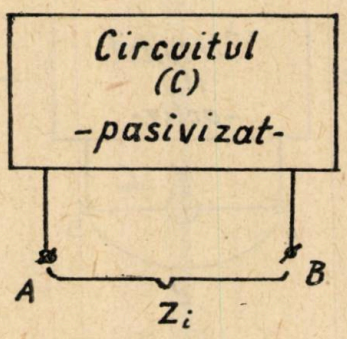


Fig. 4

printr-un conductor de impedanță nulă atunci cînd acesta s-ar lega între bornele A și B în locul impedanței Z:

$$\underline{U}=\frac{Z_i I_{sc}}{1+Y Z_i} \tag{7'}$$

relația care reprezintă cunoscuta teoremă a lui Norton.

Particularizînd relația (8) pentru $\underline{I}'=0$, notînd tensiunea corespunzătoare (de mers în gol) cu $\underline{U}'=\underline{U}_0$ după înmulțirea numărătorului și a numitorului cu Z_i se obține

$$\underline{I}=\frac{U_0}{Z+Z_i}\ , \tag{8'}$$

relația care exprimă bine cunoscuta teoremă a lui Thévenin.

Pentru cazurile particulare de mers în gol respectiv de mers în scurtcircuit se mai obțin direct formulele

$$\underline{U}=\frac{U_0}{1+Y Z_i} \tag{7''}$$ și $$\underline{I}=\frac{I_{sc}}{1+Y_i Z}\ , \tag{8''}$$

Se menționează că din sistemul de ecuații (7) și (8) nu se pot calcula valorile $\underline{U}'$ și $\underline{I}'$, deoarece ecuația (8) care se poate obține din ecuația (7) pe baza principiului dualității, este o consecință directă a ecuației (7) — după cum și teorema lui Norton este o consecință imediată a teoremei lui Thévenin.

În concluzie, formulele (7) și (8) sînt două expresii duale ale unei teoreme pe care o putem numi *teorema înlocuirii*. Enunțul primei forme a teoremei înlocuirii este următorul: înlocuind într-un circuit liniar o impe-

danță oarecare printr-o impedanță Z, tensiunea la bornele acestei noi impedanțe — în regim permanent — este egală cu cîtul sumei tensiunii la bornele impedanței înlocuite și a produsului intensitate a curentului din impedanța înlocuită ori valoarea impedanței de intrare a circuitului (care alimentează impedanța Z), prin suma dintre unitate și produsul valoare a impedanței de intrare (amintite) ori valoarea impedanței Z. Enunțul celei de a doua forme a teoremei înlocuirii se obține simplu pe baza principiului dualității, folosind corespondențele $\underline{U} \to \underline{I}$, $\underline{I} \to \underline{U}$, $Y \to Z$, și $Z_i \to Y_i$.

Se menționează faptul evident, că pentru teorema înlocuirii se pot da și alte demonstrații inclusiv cea bazată pe aplicarea repetată a teoremei lui Thévenin sau Norton pentru determinarea valorilor $\underline{I}$ și $\underline{I}'$ respectiv $\underline{U}$ și $\underline{U}'$. De asemenea, ea poate rezulta din teoria generală a multipolilor, de exemplu din formula generală dată în lucrarea [B 3]. Demonstrația propusă are avantajul că pe o cale relativ simplă conduce la demonstrarea directă a celor două forme duale ale teoremei înlocuirii.

b) **O demonstrație a teoremei lui Thévenin.**

Considerăm un dipol activ, în regim armonic permanent care alimentează, prin bornele A și B, o latură exterioară (fig. 5) avînd o impedanță complexă Z și o tensiune electromotoare $\underline{E}$.

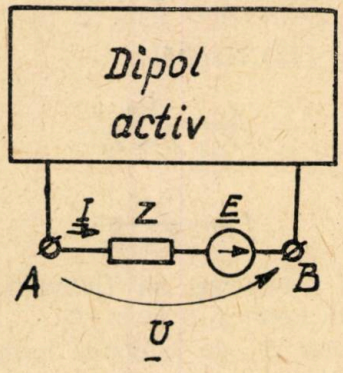


Fig. 5

În cele ce urmează se dă o demonstrație simplă a teoremei lui Thévenin care, spre deosebire de alte demonstrații date în literatură, nu necesită scheme auxiliare nici artificiul introducerii unor surse ideale conectate în opoziție (B 1, 4, 5) și nu are un caracter atît de abstract ca cel al demonstrațiilor date în (B 6, 7). Demonstrația de mai jos, propusă de autor, mai are avantajul că duce direct la o formă mai generală a teoremei referitoare la cazul cînd în latura considerată există și o t.e.m.

Pentru stabilirea teoremei pornim de la expresia legii lui Ohm — pentru latura activă considerată

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}+\underline{E}}{Z} \tag{9}$$

Exprimînd pe de altă parte intensitatea curentului $\underline{I}$, pe baza teoremei superpoziției, ca sumă a intensității curentului stabilit separat de t.e.m. $\underline{E}$ și a intensității curentului $\underline{I}_i$ stabilit de celelalte t.e.m. din circuit, se obține

$$\underline{I}=\frac{\underline{E}}{Z+Z_i}+\underline{I}_i, \tag{10}$$

unde Z_1 este impedanța de intrare a dipolului considerat, în raport cu bornele A și B.

Observînd că intensitatea curentului I_i nu depinde de valoarea t.e.m. $\underline{E}$, rezultă că există o valoare a acestei t.e.m. notată $\underline{E}=\underline{E}_0$, pentru care suma din membrul doi al ecuației (10) se anulează

$$O=\frac{\underline{E}_0}{Z+Z_i}+I_i \tag{11}$$

Notînd cu $\underline{U}_0$ valoarea pe care o capătă tensiunea $\underline{U}$ în cazul $\underline{I}=0$, ecuația (9) devine

$$O=\frac{\underline{E}_0+\underline{U}_0}{Z}\,. \tag{12}$$

Din ecuațiile (11) și (12) rezultă

$$\underline{I}_i=\frac{\underline{U}_0}{Z+Z_i}$$

și deci

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}_0+\underline{E}}{Z+Z_i} \tag{13}$$

care reprezintă o formă a teoremei lui Thévenin, valabilă pentru cazul cînd în latura considerată avem și o t.e.m. $\underline{E}$.

Pentru cazul particular $E=0$ se obține forma obișnuită a teoremei lui Thévenin.

ANEXA

Determinarea căderilor de tensiune într-o rețea buclată de curent continuu.

Ca exemplu, vom calcula în cele ce urmează căderea de tensiune într-o rețea buclată pe baza teoremei înlocuirii.

Presupunînd cunoscut un regim de funcționare al rețelei (fig. 6) în care intensitatea curentului și tensiunea la borne pentru sarcina din punc-

tul D au valorile $I'_D = 40$ A, respectiv $U'_D = 114{,}7$ V, ne propunem să determinăm tensiunea liniei în punctul D în cazul cînd în locul sarcinii conectate în acest punct se va conecta o sarcină de $R = 1{,}5\ \Omega$. Valorile în ohmi ale rezistențelor liniei, rezistențelor sarcinilor și a rezistențelor interioare a generatorului sînt cele indicate în figură.

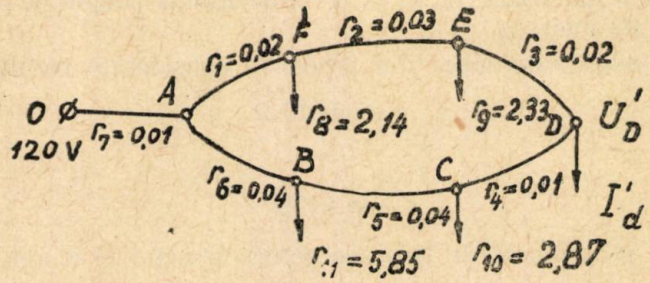


Fig. 6

Conform teoremei înlocuirii (7) tensiunea în punctul D al liniei, în cazul conectării sarcinii R, are expresia:

$$U_D = \frac{U'_D + r_i I'_D}{1 + \frac{r_i}{R}}, \tag{14}$$

unde rezistența r_i este rezistența de intrare între punctele D și 0 ale rețelei (fig. 7 a).

Pentru determinarea rezistenței r_i, se înlocuiesc grupurile de rezistențe r_1, r_2, r_8, și r_5, r_6, r_{11}, conectate în stea, prin grupuri echivalente de rezis-

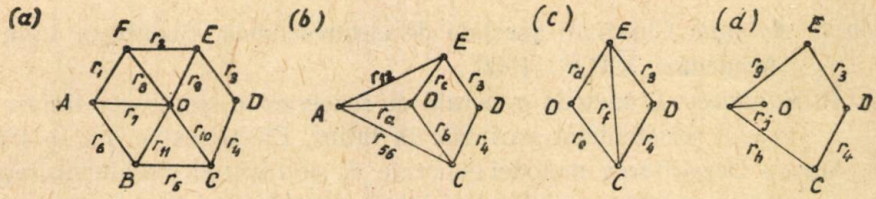


Fig. 7

tențe legate în triunghi; astfel după înlocuirea rezistențelor legate în derivație, prin cîte o rezistență echivalentă, se obține circuitul reprezentat în fig. 7 b, care este echivalent cu circuitul reprezentat în fig. 7 a. Înlocuind grupul de rezistențe r_{12}, r_{56}, r_a printr-un grup echivalent de rezistențe conectate în triunghi, după înlocuirea rezistențelor legate în derivație prin cîte o rezistență echivalentă, se obține schema echivalentă din fig. 7 c.

Printr-o ultimă transfigurare se obține schema echivalentă din fig. 7 d, și deci pentru rezistența interioară rezultă expresia,

$$r_i = r_j + \frac{(r_3 + r_g)(r_4 + r_g)}{r_3 + r_4 + r_g r_h} \tag{15}$$

unde valorile rezistențelor r_g, r_h și r_j se determină simplu pe baza transfigurării indicate mai sus.

Pentru valorile numerice din problema considerată rezultă:

$$r_i \cong 0{,}017\ \Omega$$

și deci:

$$U_D \cong 113{,}1\ V$$

Căderea procentuală de tensiune pentru punctul D al rețelei are deci valoarea:

$$\Delta U_D = \frac{120 - U_D}{120} \cdot 100 = 5{,}75\ \% \tag{16}$$

În cazul cînd se neglijează (r_7) — rezistența interioară a generatorului și rezistența conductoarelor din porțiunea OA, rezolvarea problemei se simplifică considerabil, prin aceea că în schema de calcul fig. 7 punctul A capătă același potențial ca și punctul O, și deci se obține o schemă cu conexiune mixtă.

București
16 iulie 1961

BIBLIOGRAFIE

1. *Ion S. Antoniu*, Chestiuni speciale de electrotehnică, București, Editura Academiei R.P.R., 1956.
2. *O. M. Bogatirev*, O metodă generală de rezolvare a circuitelor liniare în cazul rezistențelor variabile în laturi, Electricestvo, nr. 9, 1955.
3. *V. Savuc*, Dezvoltarea metodei generale de rezolvare a circuitelor liniare cu impedanțe variabile în laturi, Studii și realizări electrotehnice, Institutul Tehnic Craiova 1957.
4. *P. L. Kalantarov* și *L. P. Neiman*, Bazele teoretice ale electrotehnicei, Vol. I, E.E.S. — 1955 (traducere din l. rusă).
5. *G. V. Zeveke* și *P. A. Ionkin*, Bazele electrotehnicei, GEI, Moscova, 1955.
6. *William R. Smithe*, Static and dynamic electricity, New-York, 1950.
7. *K. Küpfmüller*, Einführung in die theoretische Elektrotechnik, Springer-Verlag, Berlin, 1959.

К ВОПРОСУ О ТЕОРЕМАХ ТЕВЕНЕНА И НОРТОНА

Краткое содержание

На основе теоремы компенсации и теоремы суперпозиции авт р выводит в работе теорему более общую, чем теоремы Тевенена и Нортона.

Исходя из двух дуальных форм этой теоремы, доказываются как частные случаи еоремы Тевенена и теорема Нортона. Автор дает и пример применения этой теоремы при определении падений напряжения в замкнутой цепи.

ON THÉVENIN AND NORTON'S THEOREMES

(Summary)

A more general theorem than Thévenin and Norton's is demonstrated on the basis of the compensation and superposition theorems.

Thévenin and Norton's tehorem is demonstrated by the peculiarity of the two dual forms of this theorem.

We give an example of the application of this theorem to the voltage drop in a looped mains.

SUR LES THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON

(Résumé)

En utilisant le théorème de la compensation et celui de la superposition, l'auteur établit un théorème plus générale que le théorème de Thévenin et celui de Norton. En particularisant les deux formes duales de ce nouveau théorème, l'auteur retrouve les deux théorème de Thévenin et de Norton, Un exemple d'application de ce théorème est doné dans le calcul des chutes de tension dans, un réseau bouclé.

DIE VERALLGEMEINERUNG DER THEOREMEN (LEHRSÄTZE) VON THÉVENIN UND NORTON

(Zusammenfassung)

Auf Grund des Ausgleichtheorems und des Uberlagerungstheorems wird ein allgemeineres Theorem als das Theorem von Thévenin und das Theorem von Norton vorgeführt.

Durch Vereinseln der beiden Dualitätsformen drises Theorems wird das Theorem vor Thévenin und das Theorem von Norton vorgeführt. Es wind ein Beispiel für die Anwendung dreies Theorems zur Ermitlung der Spannungsabfälle in einem Schleifenetz gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

ÎNCADRAREA STUDIULUI GHIDURILOR UNIFORME ÎN TEORIA GENERALĂ A REȚELELOR CU CONSTANTE CONCENTRATE

GH. RULEA

1. Introducere.

Determinarea răspunsului unei rețele electrice cînd se aplică tensiuni sau curenți cunoscuți, sau determinarea structurii cîmpului electromagnetic într-o regiune a spațiului cînd se cunosc condițiile la limită, formează una din problemele de bază ale electrotehnicei în general, ale radiotehnicei în special.

Caracterul general al rezolvării problemei nu este limitat de faptul că se lucrează în regim permanent sau nepermanent, deoarece cu ajutorul transformatei Fourier se poate ușor face trecerea de la regimul sinusoidal la cel neperiodic. Analizînd metodele de calcul ale răspunsului rețelelor și metodele de determinare a structurii cîmpului electromagnetic, se observă că ele prezintă o varietate, care poate uneori face să se piardă din vedere caracterul unitar al acestor metode. Ele nu sînt în fond decît aplicarea ecuațiilor lui Maxwell la diferite cazuri particulare.

Astfel privind lucrurile, se pot găsi analogii și puncte de vedere comune în studiul rețelelor și studiul cîmpurilor electromagnetice.

Ecuațiile lui Maxwell, reprezintă un instrument de calcul precis și foarte pretențios, în sensul că dă structura exactă a cîmpului analizat. În treacăt amintim că de fapt rezolvarea ecuației undelor care rezultă din sistemul de ecuații al lui Maxwell, nu prezintă prea mare interes. Se știe că soluția sistemului de ecuații al lui Maxwell este de forma.

$$S = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$

pentru cazul particular al propagării pe o singură direcție. (Ecuația coardei vibrante). Rezultă că soluția generală a ecuației lui Maxwell nu se spune decît că există un fenomen de propagare. (Cazul considerat în spațiul liber).

Despre funcțiile f_1 și f_2 sistemul de ecuații dat nu poate să precizeze nimic. De aceea structura cîmpurilor este determinată în mod esențial de condițiile la limită. Acestea pot fi foarte complexe și pînă acum nu este cunoscută o metodă pentru rezolvarea problemei pe suprafețe oarecare.

Importanța condițiilor la limită rezultă și din faptul să ele determină existența propagării.

Utilizarea ecuațiilor lui Maxwell nu este întotdeauna utilă, datorită faptului că ea este în general o metodă care dă prea multe detalii ce nu sînt întotdeauna necesare.

De altfel fenomenele electrice studiate în fiecare caz particular pun în evidență acest lucru.

În rețelele parcurse de curent continuu atenția în mod normal s-a îndreptat și se îndreaptă mai mult asupra curentului sau a tensiunilor, decît asupra cîmpurilor electrice și magnetice ce iau naștere. În curent alternativ modul de lucru al unei bobine este perfect caracterizat de rezistența și de inductanța sa. Nu este necesar să se analizeze precis structura cîmpului magnetic și electric, în fiecare punct al spațiului ce înconjoară bobina, ci se ține seama de efectul lor global. Se știe că inductanța și rezistența se pot respectiv calcula din puterea disipată și energia cîmpului magnetic, pe o perioadă. Chiar în cazul circuitelor cu constante distribuite (linie uniformă) se poate calcula curentul și tensiunea în fiecare punct al liniei fără a se analiza structura cîmpului electromagnetic în spațiul înconjurător. Aici se ridică deja întrebarea : Cum este posibil să se studieze propagarea de-a-lungul liniei, fără să fie necesar a se preciza nimic asupra structurii cîmpului în secțiunea transversală a liniei ? La această întrebare se va răspunde în cele de mai jos.

Înainte de a da acest răspuns merită să se observe că între ecuațiile lui Maxwell și sistemul de ecuații pe ochiuri sau pe noduri ce poate fi scris pentru o rețea cu constante concentrate, există următoarea analogie :

Ecuațiile lui Maxwell sub forma lor simetrică, în care deci sînt reprezentanți și curenți magnetici prezintă proprietatea de reciprocitate, adică prima ecuație de evoluție poate fi obținută din a doua ecuație de evoluție înlocuind pe E cu H și pe $-\mu$ global cu ε global.

În teoria rețelelor această proprietate îmbarcă forma principiului dualității în care mărimile U, I, Z, sînt duale cu I, U, Y. În cazul circuitelro la frecvențe foarte înalte, ghidurile, în care în mod normal se încadrează și linia bifilară, monofilară și cablul coaxial, problema răspunsului poate fi rezolvată numai prin analiza completă a structurii cîmpului electromagnetic. Metoda este laborioasă, dar asigură determinarea proprietăților electrice a ghidurilor. Mai complicată devine problema cînd aceste ghiduri trebuie să realizeze o serie de ramificații, să se îmbine în T, în Z, etc. În acest caz este de dorit să se poată obține o metodă eficace, care să utilizeze proprietățile cunoscute ale ghidului simplu. Echivalența între ghiduri și rețele cu constante concentrate se va face numai în cazul ghidului uniform adică al ghidului care are în toate punctele axei de popagare aceeași secțiune (de contur oarecare).

Această particularizare nu micșorează însă importanța practică a problemei, majoritatea ghidurilor fiind uniforme. Și alte ghiduri cum ar fi cele conice pot fi asimilate cu linie exponențială și apoi cu un transformator ideal. Asemenea cazuri prezintă însă mai puțin interes.

O observație care arată imediat că echivalența între ghidurile neuniforme radiale, de exemplu, și rețelele este o problemă mai complicată, rezultă din faptul că la ghidurile uniforme ideale amplitudinea tensiunii și curentului rămîne constantă pe direcția de propagare, în schimb ce la ghidurile neuniforme radiale ideale, amplitudinea variază cu $\frac{1}{r}$, conform principiului conservării energiei. Problema echivalenței ghidurilor conice nu va intra în cadrul prezentei lucrări.

La punctul 2 se va răspunde pe scurt la problema de ce pe linia bifilară este posibil să se studieze numai propagarea de-a-lungul direcției de propagare și nu e necesar să se analizeze și structura cîmpului transversal. Așa cum se va arăta, ecuațiile lui Maxwell se desfac în grupuri de ecuații care permit determinarea independentă a componentelor transversale și axiale.

Totodată expresia fiecărei componente cuprinde o constantă, o funcție de distribuție în planul transversal, și o expresie care indică propagarea de-a-lungul ghidului.

Dacă funcția de distribuție este pentru componente o constantă sau are pentru toate aceeași formă, urmează că ea poate fi cuprinsă în amplitudinea tensiunii și curentului pe linie și analiza se poate face numai în funcție de direcția de propagare.

2. Relații între componentele transversale ale cîmpului $\bar{E}$ și $\bar{H}$.

Posibilitatea trecerii de la ghidurile de undă la liniile de transmisiune se datorește proprietății pe care o au componentele transversale ai cîmpului electric E_S și ale cîmpului H_S de a se putea exprima unele în funcție de celelalte independent de componentele axiale.

Prin ecuație de evoluție a lui Maxwell

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \tag{2}$$

se poate scrie punînd în evidență componentele axiale și transversale atît pentru vectorul E cît și pentru operatorul ∇

$$\bar{E} = \bar{e}_1 E_x + \bar{E}_s$$

$$\nabla = \bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \nabla_s$$

în care $$\nabla_s = \bar{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \bar{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

Înlocuind în (2) și separînd vectorii transversali T și longitudinali L rezultă :

$$T \qquad \nabla_S \times \bar{e}_1 E_x + \bar{e}_1 \times \frac{\partial \bar{E}_S}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \bar{H}_s}{\partial t} \tag{4}$$

$$L \qquad \nabla_S \times \bar{E}_S = -\mu \bar{e}_1 \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

Prin reciprocitate se scriu ecuațiile :

$$T \qquad \nabla_s \times \bar{e}_1 H_x + \bar{e}_1 \times \frac{\partial \bar{H}_s}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}_s}{\partial t} \tag{5}$$

$$L \qquad \nabla_s \times \bar{H}_S = \varepsilon \bar{e}_1 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Se rescrie (4) ținînd seamă că variația cîmpului în timp este sinusoidală. (Mărimile vor fi amplitudini complexe)

$$\nabla_s \underline{E}_x \times \bar{e}_1 + \bar{e}_1 \times \frac{\partial \bar{E}_s}{\partial x} = -\mu j \omega \underline{\bar{H}}_S \tag{4a}$$

$$\nabla_S \times \underline{\bar{H}}_S = j \omega \bar{e}_1 \underline{E}_x \tag{5}$$

Se înmulțește (5a) vectorial cu ∇_S și se obține :

$$\nabla_s \times (\nabla_s \times \underline{\bar{H}}_s) = j \omega \varepsilon \nabla_s \times \bar{e}_1 \underline{E}_x = j \omega \varepsilon \nabla_s \underline{E}_x \times \bar{e}_1$$

Cum

$$\nabla_s \times (\nabla_s \times \underline{\bar{H}}_s) = \nabla_s (\nabla_s \underline{\bar{H}}_s) - (\nabla_s \nabla_s) \underline{\bar{H}}_s$$

și întrucît divergența cîmpului $\underline{\bar{H}}_S$ e nulă,

($\nabla_s \underline{\bar{H}}_s = 0$) deoarece nu există sarcini magnetice, rezultă :

$$-\frac{(\nabla_s \nabla_s) \underline{\bar{H}}_s}{j \omega \varepsilon} = \nabla_s \underline{E}_x \times \bar{e}_1 \tag{6}$$

Înlocuind în 4a se obține :

$$-\frac{(\nabla_s \nabla_s) \underline{\bar{H}}_s}{j \omega \varepsilon} + \bar{e}_1 \times \frac{\partial \bar{E}_s}{\partial x} = -j \varepsilon \mu \underline{\bar{H}}_s \tag{7}$$

Înmulțind vectorial ecuația (7) cu $\bar{e}_1$ și știind că :

$$e_1 \times \left(\bar{e}_1 \times \frac{\partial \bar{E}_s}{\partial x} \right) = \bar{e}_1 \left(\bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{E}_s}{\partial x} \right) - \frac{\partial \bar{E}_s}{\partial x} (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1)$$

în care primul termen din membru al doilea e nul deoarece $\bar{e}_1$ și $\frac{\partial \bar{E}_s}{\partial x}$ sînt ortogonali, iar $(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) = 1$, se obține:

$$-\frac{\partial \bar{E}_s}{\partial x} = -j\omega\mu\,(\bar{e}_1 \times \bar{H}_s) + \frac{\nabla_s \nabla_s}{j\omega\varepsilon}\,[\bar{e}_1 \times \bar{H}_s] \tag{8}$$

sau in formă finală:

$$\frac{\partial \bar{E}_s}{\partial x} = -j\beta Z_0 \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\,\nabla_s \nabla_s\right)(\bar{H}_s \times \bar{e}_1) \tag{9}$$

În mod analog se obține ecuația:

$$\frac{\partial \bar{H}_s}{\partial x} = -\frac{j\beta}{Z_0}\left(1 + \frac{1}{\beta_2}\,\nabla_s \nabla_s\right)(\bar{e}_1 \times \bar{E}_s) \tag{10}$$

Ecuațiile (9) și (10) pun în evidență faptul că în secțiunea transversală cîmpul poate fi determinat fără a fi necesară și prezența componentei axiale.

Așa cum se va arăta mai jos ecuațiile (9) și (10), pot deveni în mod simplu de forma ecuațiilor liniilor. Ele formează baza teoretică a echivalenței între ghidurile uniforme și linia de transmisie bifilară.

3. Relații între componentele axiale și transversale ale cîmpului $\bar{E}$ și cîmpului $\bar{H}$.

Ecuația a doua din (5) poate fi pusă sub forma:

$$j\omega\varepsilon\,\bar{e}_1 \underline{E}_x = \nabla_s \times \bar{H}_s = j\frac{Z_0}{\beta}\,\bar{e}_1 \underline{E}_x$$

cînd variația cîmpului în timp este sinusoidală.

Înmulțind vectorial cu ∇_s se obține relația (6).

Se înmulțește (6) vectorial cu e_1 și se observă că:

$$\bar{e}_1 \times (\nabla_s \underline{E}_x \times \bar{e}_1) = \nabla_s \underline{E}_x\,(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) - \bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_1 \nabla_s \underline{E}_x)$$

Ultimul termen din membrul al doilea e nul, iar $e_1 \cdot e_1 = 1$:
Se obține deci:

$$-\frac{\nabla_s \nabla_s (\bar{e}_1 \times \bar{H}_s)}{j\beta\,\frac{1}{Z_0}} = \nabla_s \underline{E}_x$$

Schimbînd ordinea de înmulțire a lui e_1 și H_s și eliminînd un operator rezultă :

$$j\beta \frac{1}{Z_0} \underline{E}_x = \nabla_s (\underline{H}_s \times \overline{e}_1) \tag{11}$$

$$j\beta Z_0 \underline{H}_x = \nabla_s (\overline{e}_1 \times \underline{E}_s) \tag{12}$$

Relațiile (11) și (12) permit deducerea componentelor axiale din cele transversale. Ele vor fi utile și la echivalența ghidului cu linia, care are loc separat pentru unda E și pentru unda H cînd respectiv

$$H_x = 0 \text{ sau}$$

$$E_x = 0 \text{ și deci}$$

$$\nabla_s (\overline{e}_1 \times \overline{E}_s) = 0$$

sau

$$\nabla_s (\underline{H}_s \times \overline{e}_1) = 0$$

4. Deducerea componentelor transversale ale cîmpului din componentele axiale

Ecuațiile (4) și (5) pot fi scrise și sub forma :

$$\text{grad}_s \underline{E}_x \overline{e}_1 + \overline{e}_1 \times (-\gamma \underline{E}_s) = - j\omega\mu \underline{H}_s \tag{13}$$

$$\text{grad}_s H_x \times \overline{e}_1 + \overline{e}_1 \times (-\gamma \underline{H}_s) = j\omega\varepsilon \underline{E}_s \tag{14}$$

dacă se admite o variație exponențială după direcția de propagare $U = U_0 e^{-\gamma x}$ în care U poate fi oricare componentă.

Înmulțind ecuația (13) vectorial cu $\gamma \cdot e_1$ și ecuația (14) cu $j\omega\mu$ se obține :

$$\gamma \overline{e}_1 \times \text{grad}_s \underline{E}_x \times \overline{e}_1 + \gamma \overline{e}_1 \times \overline{e}_1 \times (-\gamma \underline{E}_s) = \gamma \overline{e}_1 \times (-j\omega\mu \underline{H}_s)$$

$$j\omega\mu \, \text{grad}_s \underline{H}_x \times \overline{e}_1 + j\omega\mu \overline{e}_1 \times (-\gamma \underline{H}_s) = j\omega\varepsilon \underline{E}_s \, j\omega\mu$$

Dezvoltînd și adunînd se obține :
Pentru modul *TM*, unda *E*

$$\underline{E}_s = -\frac{\gamma}{K^2} \text{grad}_s \underline{E}_x \tag{15}$$

$$\underline{H}_s = -\frac{j\omega\varepsilon}{K^2} e_1 \times \text{grad}_s \underline{E}_x \tag{16}$$

și

$$\Delta_s \underline{E}_x + K^2 \underline{E}_x = 0 \tag{17}$$

iar pentru modul *TE*, unda *H* rezultă:

$$\overline{\underline{H}}_s = -\frac{\gamma}{K^2} \operatorname{grad}_s \underline{H}_x \tag{18}$$

$$\overline{\underline{E}}_s = \frac{j\omega\mu}{K^2} \overline{e}_1 \times \operatorname{grad}_s \underline{H}_x \tag{19}$$

$$\Delta_s \underline{H}_x + K^2 \underline{H}_x = 0 \tag{20}$$

Pentru modul *T E M* care se studiază pe linii, ecuația ce dă componentele transversale este ecuația lui Laplace:

$$\Delta_s \underline{E}_s = 0 \; ; \; \Delta_s \underline{H}_s = 0$$

care rezultă din ecuația undelor pentru componentele transversale

$$\Delta_s \overline{\underline{E}}_s + K^2 \overline{\underline{E}}_s = 0$$

$$\Delta_s \overline{\underline{H}}_s + K^2 \overline{\underline{H}}_s = 0$$

în cazul în care K^2 e egal cu zero (modul *T E M*).

Rezultă că pentru modul fundamental structura cîmpului electromagmetic în plan transversal este aceeași cu structura electrostatică.

5. Echivalența între un ghid uniform și o linie biliară lucrînd pe modul fundamental.

Ecuațiile (9) și (10) se pot pune sub forma

$$\frac{\partial \overline{\underline{E}}_s}{\partial x} = j Z_0 \beta \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \Delta_s\right) (\overline{e}_1 \times \overline{\underline{H}}_s) \tag{9a}$$

$$\frac{\partial \overline{\underline{H}}_s}{\partial x} = j \frac{\beta}{Z_0} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \Delta_s\right) (\overline{\underline{E}}_s \times \overline{e}_1) \tag{10a}$$

Componentele cîmpului electric și magnetic în plan transversal pot fi exprimate prin:

$$\overline{\underline{E}}_s = \overline{F}(y_1 z)\, \underline{V}(x) \tag{21}$$

$$\overline{\underline{H}}_s = \overline{G}(y_1 z)\, \underline{I}(x) \tag{22}$$

în care $\overline{F}$ și $\overline{G}$ sînt funcțiile de distribuție în plan transversal, iar $\underline{V}(x)$ și $\underline{I}(x)$ sînt termenii ce pun în evidență propagarea și sînt efectiv de natura unei tensiuni și al unui curent.

De fapt

$$\underline{V}(x) = K_1 \int_L \underline{\overline{E}}_s \, \overline{dl} \tag{21a}$$

și

$$\underline{I}(x) = K_2 \int_{L1} \underline{\overline{H}}_s \cdot \overline{dl_1} \tag{22a}$$

sau punînd în evidență legătura între elementele de drum

$$I(x) = K_2 \int_{L1} \underline{\overline{H}}_s \, (\overline{e_1} \times \overline{dl})$$

Admițînd proporționalitatea dintre componentele $\underline{\overline{E}}_s$, $\underline{\overline{H}}_s$ și tensiunea $\underline{V}(x)$ și curentul $\underline{I}(x)$ exprimate în relațiile (21) și (22) se înlocuiește în (9 a) și (10 a) și se obține:

$$\overline{F} \frac{\partial \underline{V}(x)}{\partial x} = j Z_0 \beta \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \Delta_s\right) (\overline{e_1} \times \overline{G}) \, \underline{I}(x) \tag{23}$$

$$\overline{G} \frac{\partial \underline{I}(x)}{\partial x} = j \frac{\beta}{Z_0} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \Delta_s\right) (\overline{F} \times \overline{e_1}) \, \underline{V}(x) \tag{24}$$

Dar

$$\overline{e_1} \times \overline{G} = -\overline{F} \tag{25}$$

$$\overline{e_1} \times \overline{F} = \overline{G} \tag{26}$$

Înlocuind relațiile (25) și (26) în (23) și (24) rezultă

$$\overline{F} \frac{\partial \underline{V}(x)}{\partial x} = -j Z_0 \beta \, (1 + \Delta_s) \overline{F} \, \underline{I}(x) \tag{27}$$

$$\overline{G} \frac{\partial \underline{I}(x)}{\partial x} = -j \frac{\beta}{Z_0} (1 + \Delta_s) \overline{G} \, V(x) \tag{28}$$

Dar

$$\Delta_s \underline{\overline{E}}_s + K^2 \underline{\overline{E}}_s = \Delta_s \overline{F} \, \underline{V}(x) + k^2 \overline{F} \, \underline{V}(x) = 0$$

adică:

$$\Delta_s \overline{F} + K^2 \overline{F} = 0 \tag{29}$$

$$\text{și} \quad \Delta_s \overline{G} + K^2 \overline{G} = 0 \tag{30}$$

în care

$$K^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon = \gamma^2 + \beta^2$$

(Se știe că γ în acest caz este constanta de propagare a cîmpului electromagnetic în ghid).

Ținînd seama de (29) și (30) ecuațiile (27) și (28) devin:

$$\overline{F}\frac{\partial \underline{V}(x)}{\partial x} = -jZ_0\beta\left(1-\frac{K^2}{\beta^2}\right)\overline{F}\,\underline{I}(x)$$

$$\overline{G}\frac{\partial \underline{I}(x)}{\partial x} = -j\frac{\beta}{Z_0}\left(1-\frac{K^2}{\beta^2}\right)\overline{G}\,\underline{V}(x)$$

și ținînd seamă de (11) și (12) rezultă:

(în cazul undei E, $\nabla_s \nabla_s (\overline{e}_1 \times \overline{E}_s) = 0$

iar în cazul undei H, $\nabla_s \nabla_s (e_1 \times H_s) = 0$)

$$\frac{\partial \underline{V}(x)}{\partial x} = Z_u \gamma \underline{I}(x) \tag{31}$$

$$\frac{\partial \underline{I}(x)}{\partial x} Y_u \gamma \underline{V}(x) \tag{32}$$

Ecuațiile (31) și (32) reprezintă ecuațiile fundamentale de echivalență între o linie bifilară lucrînd pe modul fundamental și un ghid uniform.

Această echivalență explică de ce diagrama cercului și studiul reflexiilor de la teoria liniilor bifilare pot fi aplicate și la ghiduri.

Rezultă, în concluzie, că orice ghid uniform poate fi considerat ca o linie uniformă cu impedanța caracteristică egală cu impedanța de undă a modului ce se propagă în ghid și cu constanta de propagare egală cu a modului considerat.

Evident, această metodă de echivalență nu elimină analiza influenței condițiilor la limită, și cere ca γ și Z_u să fie cunoscuți.

Nu este obligatoriu a se studia configurația cîmpului. Analogia este esențială pentru determinarea impedanțelor structurilor mai complicate formate din ghiduri.

6. Despre proporționalitatea între $\overline{E}_s$ și $\underline{V}$ și $\overline{H}_s$ și $\underline{I}$

Proporționalitatea între $\overline{E}_s$ și $\underline{V}$ și $\overline{H}_s$ și $\underline{I}$ poate *fi* determinată și pe baza unor relații energetice (3). Întrucît sistemele studiate sînt liniare iar $\underline{V}$ și $\underline{I}$ depind de $\overline{E}_s$ și $\overline{H}_s$ se poate scrie:

$$\underline{V} = a\,\overline{E}_s + b\,\overline{H}_s$$

$$\underline{I} = c\,\overline{E}_s + \overline{d}\;\overline{H}_s$$

în care a, b, c, d sînt mărimi vectoriale.

Considerînd $\underline{V}$, I, $\underline{\overline{E}_s}$ și $\underline{\overline{H}_s}$ ca amplitudini și nu valori eficace, rezultă puterea medie reală ca :

$$P = \frac{1}{2}\underline{V}\ \underline{I}^* = \frac{1}{2}\left[a\,c^*\,|E_s|^2 + b\,c^*\ \underline{\overline{H}_s}\ \underline{\overline{E}_s^*}\right.$$

$$\left. + a\,a^*\ \underline{\overline{E}_s}\ \underline{\overline{H}_s^*} + a\,d^*\,|H_s|^2\right]$$

Cum vectorul Poynting

are expresia $\underline{\overline{p}} = k\,\underline{\overline{E}_s}\ \underline{\overline{H}_s^*}$

trebuie ca :

$$a\,c^* = b\,d^* \qquad \text{sau}$$

$$a = d = 0 \tag{33}$$

$$b = e = 0 \tag{34}$$

Condiția (34) e valabilă și în acest caz rezultă :

$$\underline{V} = a\,\underline{\overline{E}_s} \text{ și } \underline{I} = d\,\underline{\overline{H}_s}$$

Impedanța la intrare va fi

$$\frac{\underline{\overline{V}}}{\underline{I}} = \frac{a}{d}\,\frac{\underline{\overline{E}_s}}{\underline{\overline{H}_s}} = \frac{a}{d}\,Z_u$$

iar puterea P, va putea fi calculată cu ajutorul relației

$$P = \frac{1}{2}\,a\,d\,\underline{\overline{E}_s}\ \underline{\overline{H}_s}$$

Determinarea coeficienților de proporționalitate se poate face utilizînd relațiile (21 a) și (22 a), în care se introduc valorile respective ale lui

$$\underline{\overline{E}_s} \text{ și } \underline{\overline{H}_s}$$

$$\underline{V_l}(x) = K_1 \int_L \underline{V}(x)\,\overline{F}(y,z)\,\overline{dl} \tag{35}$$

$$I_l(x) = K_2 \int_{L1} \underline{I}(x)\,\overline{G}(y,z)\,\overline{dl_1} \tag{36}$$

Integrarea nu se face în raport cu x ci numai în funcție de y și Z, $\overline{dl}$ ca și $\overline{dl_1}$ fiind numai funcții de y și Z (observăm că dl și dl_1 sînt ortogonali).

$$\underline{V}(x)\,l = \underline{V}(x)\,K_1 \int_L \overline{F}\ (y,z)\,\overline{dl}$$

$$I(x)\,l = I(x)\,K_2 \int_{L2} \overline{G}\,(y,z)\,\overline{dl_1}$$

Rezultă că funcțiile $V(x)$ și $\underline{I}(x)$ analizate anterior sînt proporționale cu tensiunea și curentul pe linie.

7. Quadripolul echivalent unei porțiuni de ghid uniform

Deoarece a fost stabilită echivalența între ecuațiile liniilor și ale ghidurilor uniforme se poate scrie impedanța de intrare liniei echivalente sub forma :

$$Z_i = Z_u \frac{Z_s + j Z_u \operatorname{tg} \beta_n l}{Z_u + j Z_s \operatorname{tg} \beta_n l} \tag{37}$$

în care Z_u este impedanța de undă a modului din ghid și β_n constanta de fază a acestuia. Ghidul este considerat fără pierderi, și de lungime 1. Fie cuadripolul în T echivalent. Datorită simetriei liniei sau ghidului cuadripolul echivalent este simetric.

Dacă se scrie impedanța la intrarea cuadripolului :

$$Z_i = Z_1 + \frac{Z_2 (Z_1 + Z_s)}{Z_1 + Z_2 + Z_s} \tag{38}$$

și se grupează convenabil :

$$Z_i = \frac{Z_1 \dfrac{Z_1 + 2 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_s}{1 + \dfrac{Z_s}{Z_1 + Z_2}} \tag{39}$$

se obține :

$$Z_1 \frac{Z_1 + 2 Z_2}{Z_1 + Z_2} = j Z_u \operatorname{tg} \beta_n l \tag{40}$$

$$\frac{1}{Z_1 + Z_2} = j \frac{\operatorname{tg} \beta_n l}{Z_u} \tag{41}$$

Este util a avea datele necesare atît pornind de la ghid la cuadripol cît și invers, de la cuadripol la ghid. Elementele cuadripolului în funcție de mărimile electrice caracteristice ghidului sînt :

$$Z_1 = j Z_u \operatorname{tg} \frac{\beta_n l}{2} \tag{42}$$

$$Z_2 = j Z_u \operatorname{csc} \beta l \tag{43}$$

iar cele ale ghidului în funcție de cuadripol sînt :

$$Z_u = \sqrt{Z_1 (Z_1 + 2 Z_2)} \tag{44}$$

$$\operatorname{tg} \beta_n l = - j \frac{\sqrt{Z_1 (Z_1 + 2 Z_2)}}{Z_1 + Z_2} \tag{45}$$

Se observă că elementele cuadripolului echivalent sînt funcții de frecvență.

BIBLIOGRAFIE

1. *I. D. Şirman* — Radiovolnovodî i obemnîe rezonatorî. Sviazizdat Moskva 1959, pag. 98—101 ; pag. 106—112.
2. Spravocinik pa volnovodam Sovetscoe Radio, Moskva 1952, p. 5—12.
3. *Montgomery C. G., Dicke R. H., Purcell E. M.* — Principles of microwave circuits. New-York 1948, M.I.T. Rad Lab. Series 9, pag. 30—50.

ВОЛНОВОДЫ КАК ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Краткое содержание

Указываются основные отношения между поперечными и продольными составляющами электрического и малнитного поля, распространяющегося в однородном волноводе.

Для изучения расространения электропалнитного поля, предлогается метод определения урав ения подобные уравнениям линий, в которах волновое сопротивление линии равняется волновоиу сопротивлению специфического вида полям, постоянное распостранения линий равняется постоянной распространения вида поля.

Эти уравнения — основа теории волноводов как четы[ехполюсники и вообше как электрические сети с сосредоточенными постоянными.

L'ÉQUIVALENCE ENTRE LES LIGNES DE TRANSMISSION ET LES GUIDES D'ONDES

(Résumé)

On présente les relations fondamentales entre les composantes transversales et longitudinales du champ électrique et magnétique qui se propage dans les guides d'ondes uniformes.

En ce qui concerne la propagation du champ électromagnetique dans les guides uniformes l'auteur expose une méthode d'etablir des écuations semblabes aux écuations des lignes. Dans ces écuations on etablit que l'impedance caracteristique de la ligne est l'impedance d'onde du mode respectif et que la constante de propagation est la constante de propagation de ce mode.

Les écuations ainsi obtenues sont le fondement sur lequel se developpe la théorie des guides uniformes considérés comme des quadripoles, ou, en géneral comme des réseaux electriques aux constantes concentrées.

THE EQUIVALENCE BETWEEN THE TRANSMISSION LINES AND THE WAVEGUIDES

The paper presents a method for determining the equivalence between the transmission lines and the waveguides. The separation of the transverse and longitudinal components of the electromagnetic field that propagates in the guide is used for the demonstration.

The result is an equivalent line which may be considered as a quadripol.

The equivalence is valuable for a constant frequency.

DER GLEICHSTELLUNG ZWISCHEN DEN TRANSMISSIONSLINIEN WELLENLEITER

Die Arbeit zeigt eine Methode der Demonstrienung der Gleichstellung zwischen den Transmissionslinien und Wellenleiter. Für die Demonstration verwendet man die Tennung der Quer — und Längskomponenten des elektromagnetishen Feldes welches im Wellenleiter sich verbritet.

Es geht hervor dass man eine gleichwertige Linie erhalten kann und diese als Vierpol angesehen werden kann.

Die Aquivalenz ist gültig bei feststehender Frequenz.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

THE DEPENDENCE OF THE SMALL SIGNAL A. C. PARAMETERS OF A JUNCTION TRANSISTOR ON THE INJECTION LEVEL. A THEORETICAL APPROACH

M. DRĂGĂNESCU

1. Introduction.

This work is a continuation of a previous work [1] on the theory of the junction transistor at high injection levels. In the above mentioned work [1] only the d.c. regim was considered. In the present work the a.c. regim at small signals is considered.

The present theory as was stated in [1] has at the basis a formulation of the theory of the transistor due to A. W. MATZ [2], but with some observations made in a note of the author [3], who gave the possibility for obtainig — in the limits of some wellprecised approximations, but valid for most transistors* — general formulae for the various parameters interesting the transistor behaviour.

In the present work, general formulae are obtained for the small signal parameters in function of the injection level. The injection level increases with the emitter current and a relation between these quantities was obtained in work [1].

The general formulae obtained are used for numerical calculations for a transistor with given numerical parameters. The data of this transistor are given also in work [1]. The results show qualitative agreement with the experimental data.

For an understanding of the following calculations, reference is necessary to the work [1].

2. The expressions for the D. C. emitter and collector currents.

In work [1] the hole currents were normalised to the following reference current

$$I_p = \frac{e D_p N}{L_p} \tag{1}$$

* The essential approximation made is that $\frac{W}{L_p} \ll 1$, (for instance) $\frac{W}{L_p} \approx \frac{1}{100}$ where W is the base width and L_p is the diffusion length of the holes in the base (for a transistor PNP).

and the electron currents to the reference current,

$$I_n = b\, I_p \tag{2}$$

where b is given by

$$b = \frac{\mu_{n\,B}}{\mu_p} \tag{3}$$

that is b is the quotient of the electron mobility (in the base) $\mu_{n\,B}$ to the hole mobility (in the base) μ_p

The emitter current of the transistor is:

$$j_e = j_p(0) + j_{ps} + j_n(0) \tag{4}$$

where

$j_p(0)$ — the hole current at the emitter junction
$j_n(0)$ — the electron current at the emitter junction
j_{ps} — the surface recombination current in the base.

By normalisation to the refrence current (1), the expression (4) becomes

$$i_e = i_p(0) + i_{ps} + b\, i_n(0) \tag{5}$$

where

$$i_p(0) = \frac{j_p(0)}{I_p} = 2\,(1+2\,\Delta)\,\xi - i_n(0) \tag{6}$$

$$i_{ps} = \frac{j_{ps}}{I_p} = \Sigma\,\Delta \tag{7}$$

$$i_n(0) = \frac{j_n(0)}{I_n} = \eta_0\,\Delta\,(1+\Delta) \tag{8}$$

The expressions (6)—(8) are taken from work [1], where Δ is the injection level, ξ is the normalised electric field in the base, η_0 is a technological parameter of the transistor and Σ is the surface recombination parameter.

Noting,

$$f_a(\Delta, \xi) = 2\,(1+2\,\Delta)\,\xi + (b-1)\,\eta_0\,\Delta\,(1+\Delta) \tag{9}$$

the expression (5) becomes

$$\boxed{i_e = f_a(\Delta, \xi) + \Sigma\,\Delta} \tag{10}$$

which is a general expression for the normalised emitter current.

The collector current of the transistor is $j_p(w)$ because in the present theory [1] [2] it is taken $j_n(w) = 0$. The normalised collector current will be then [1],

$$i_c = i_p(w) = i_p(0) - \frac{w}{L_p}(1+\xi^2)\,\Delta \tag{11}$$

Taking into account the relations (5)—(8) the expression (11) may be written

$$i_c = i_e - f_b(\Delta) - \Sigma\,\Delta - \frac{w}{L_p}(1+\xi^2)\,\Delta \tag{12}$$

where

$$f_b(\Delta) = b\,\eta_0\,\Delta(1+\Delta) \tag{13}$$

In expression (12) the first three terms are much greater then the forth as may be proofed by numerical calculations [1].

The relations (10) and (12) where the functions f_a and f_b are given by the expressions (9) and (13), constitute the point of departure for the following developments.

Otfer useful formulae, derived in work [1], are:

$$\Delta(1+\Delta) = \frac{p_n}{N}\,\epsilon\,\frac{eu_e}{KT} \tag{14}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\Delta\left[1+\eta_0\frac{L_p}{w}(1+\Delta)\right]}{8(1+\Delta)}} \tag{15}$$

The formula (14) gives the injection level Δ in function of the emitter potential u_e and formula (15) gives the normalised electric field in the base ξ in function of the injection level Δ and of ω (which in turn is dependent on the collector potential μ_c).

3. The general small signal parameters.

If equations (10) and (12) are multiplyied by I_p and then differentiated, one obtains:

$$dj_e = I_p\left(\frac{\partial f_a}{\partial\Delta} + \frac{\partial f_a}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\Delta} + \Sigma'\right)\frac{d\Delta}{du_e}du_e + I_p\frac{\partial f_a}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial w}\cdot\frac{dw}{du_c}\cdot du_c \tag{16}$$

$$dj_c = dj_e - I_p\left[\frac{\partial f_b}{\partial\Delta} + \Sigma'\right]\frac{d\Delta}{du_e}\cdot du_e - I_p\left[\frac{(1+\xi)^2\,\Delta}{L_p} + \frac{2\xi\,w\,\Delta}{L_p}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial w}\right]\frac{\partial w}{\partial u_c}du_c \tag{17}*)$$

where

$$\Sigma' = \frac{d}{d\Delta}(\Sigma\,\Delta) = \Sigma + \Delta\frac{d\Delta}{d\xi} \tag{18}$$

It is to be noted that if $\Sigma = \text{const.}$, then $\Sigma' = \Sigma$.

---

* For the calculation of the derivative of expression (12) with respect to u_e the last term, beeing extremly smal, was neglected.

From (14) it may be seen that

$$\frac{d\Delta}{du_e}=\frac{e}{KT}\cdot\frac{\Delta(1+\Delta)}{1+2\Delta}=\frac{e}{KT}\cdot f_1(\Delta) \tag{19}$$

where the function $f_1(\Delta)$ was defined and represented graphically in work [1].

Noting,

$$G_r=\frac{e I_p}{KT}$$

which represents a conductance of reference, if (18) is taken into account. the equation (16) and (17) become:

$$dj_e=G_r\cdot f_1(\Delta)\left[\frac{\partial f_a}{\partial\Delta}+\frac{\partial f_a}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\Delta}+\Sigma'\right]du_e+G_r\frac{KT}{e}\frac{\partial f_a}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial w}\cdot\frac{\partial u_c}{\partial w}du_c \tag{21}$$

$$dj_c=dj_e-G_r f_1(\Delta)\left[\frac{\partial f_b}{\partial\Delta}+\Sigma'\right]du_e-G_r\frac{KT}{e}\left[\frac{(1+\xi^2)\Delta}{L_p}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\xi w\Delta}{L_p}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial w}\right]\frac{\partial w}{\partial u_c}du_c \tag{22}$$

Noting,

$$g_{11}=f_1(\Delta)\left[\frac{\partial f_a}{\partial\Delta}+\frac{\partial f_a}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\Delta}+\Sigma'\right] \tag{23}$$

$$g_{12}=\frac{KT}{e}\cdot\frac{\partial f_a}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u_c} \tag{24}$$

$$g_{12}=f_1(\Delta)\cdot\left[\frac{\partial f_b}{\partial\Delta}++\Sigma'\right] \tag{25}$$

$$g_3=\frac{KT}{e}\cdot\left[\frac{(1+\xi^2)\Delta}{L_p}+\frac{2\xi w\Delta}{L_p}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial w}\right]\frac{\partial w}{\partial u_c} \tag{26}$$

these quantities represent the normalised general conductances of the transistor. The real general conductances for a transistor with active surface equal to unity are

$$G_{11}=G_r\cdot g_{11} \tag{27}$$
$$G_{12}=G_r\cdot g_{12} \tag{28}$$
$$G_2=G_r\cdot g_2 \tag{29}$$
$$G_3=G_r\cdot g_3 \tag{30}$$

** If it is taken into account [6] the expression $\Sigma=\frac{\Sigma_0}{(1+c\Delta)}$ then

$$\Sigma'=\Sigma_0\frac{1}{(1+c\Delta)^2}$$

With the notations (23) — (27), the small signal equations (21) — (22) become

$$\boxed{d j_e = G_{11} d u_e + G_{12} d u_c} \tag{31}$$

$$\boxed{d j_c = d j_e - G_2 d u_e - G_3 d u_c} \tag{32}$$

The four parameters (27) — (30) describe the small signal behaviour of the transistor if capacitive effects are completely neglected. In this work no analysis is made with respect to the transistor capacitances.

The calculations of the functions which appear in expressions (23) — (26) give the following results:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \Delta} = 4\xi + (b-1)\eta_0(1+2\Delta) \tag{33}$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial \xi} = 2(1+2\Delta) \tag{34}$$

$$\frac{\partial f_b}{\partial \Delta} = b\,\eta_0(1+2\Delta) \tag{35}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \Delta} = \frac{1}{16\xi} \cdot \frac{1+\eta_0 \dfrac{L_p}{w}(1+\Delta)^2}{(1+\Delta)^2} \tag{36}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial w} = \frac{1}{16\xi} \cdot \eta_0 \frac{L_p}{w} \Delta\left(-\frac{1}{w}\right) \tag{37}$$

These functions depend on the injection level (through ξ and Δ) and on some technological parameters of the transistor such as b, η_0 and $\eta_0 \dfrac{L_p}{w}$.

4. The normalised conductance g_{11}.

In this paragraph attention is paid to the normalised conductance g_{11} given by relation (23).

If it is introduced the notation

$$F_a = \frac{\partial f_a}{\partial \Delta} + \frac{\partial f_a}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \Delta} \tag{38}$$

the expression (22) takes the form

$$\boxed{g_{11} = f_1(\Delta)[F_a + \Sigma']} \tag{39}$$

For the transistor with the following technological parameters [1],

$$b = 2, \eta_0 = 0{,}0007, \eta_0 \frac{L_p}{w} = 0{,}07 \tag{40}$$

the function F_a is represented in fig. 1 together with $f_1(\Delta)$.

If the surface recombination is neglected ($\Sigma = 0$) then $g_{11} = f_1(\Delta).F_a$. In general $F_a \gg \Sigma$, and g_{11} is not too affected by surface recombination. The surface recombiniation increases only slightly this conductance. This

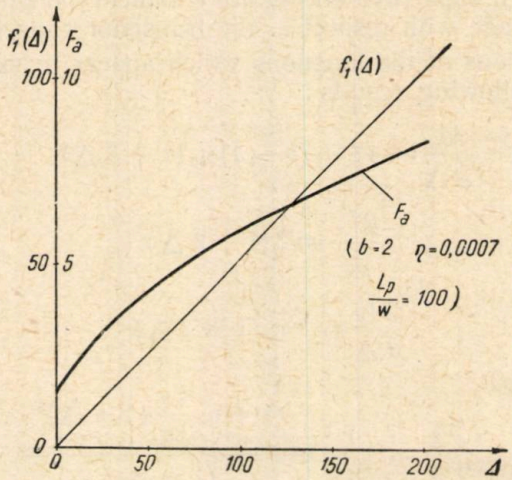


Fig. 1 The general function $f_1(\Delta)$ and F_a

may be proofed by numerical calculations. What is to be put in evidence here is the dependence of g_{11} on the injection level. In fig. 2, g_{11} is represented in function of Δ for $\Sigma = 0$.

A more interesting representation is that of fig. 3, where g_{11} is represented in function of the normalised emitter current i . The normalised emitter current i was calculated with formula (10) for $\Sigma = 0$. In order to compare with the results of the small level theory it will be observed that

$$(g_{11})_{\text{lov levels}} = \frac{(G_{11})_{\text{low levels}}}{\frac{eI_p}{KT}} \tag{41}$$

Because [4]

$$(G_{11})_{\text{low levels}} = \frac{e\, i_e}{K\, T} \tag{42}$$

then

$$(g_{11})_{\text{low levels}} = \frac{e\, j_e}{K\, T} \tag{43}$$

In fig. 3 is also represented $(g_{11})_{\text{low levels}}$ in function of i_e It may be seen that for any value of

$$g_{11} < (g_{11})_{\text{low levels}} \tag{44}$$

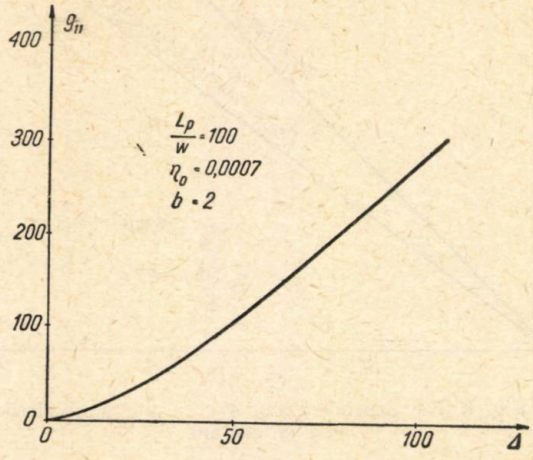


Fig. 2 The dependence of the normalised conductance g_{11} on the injection level.

It may be easily deduced that if the resistance of the base wafer $(r_{bb'})$ is neglected, then the hybrid parameter h_{11} has the value

$$h_{11} = \frac{1}{G_{11}} \tag{45}$$

Therefore is to be expected for h_{11} to have values greater than those preticted by the low level teory. This is in agreement with the experimental facts [5].

5. The normalised conductance g_2

The expression of the normalised conductance g_2 is given by formula (25). For the numerical transistor considered in the previous paragraph, a representation of g_2 in function of the injection level is given in fig. 4, It may be seen that the surface recombination plays here a more important role than for the parameter g_{11}. The value of g_2 is encreasing seriously with encreasing surface recombination velocity. On the other hand g_2 accuses an important encrease with the injection level.

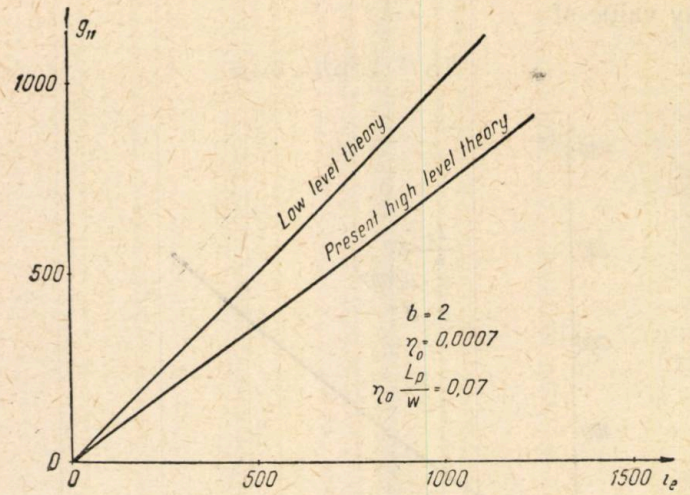


Fig. 3 The dependence of g_{11} on the normalised emitter current.

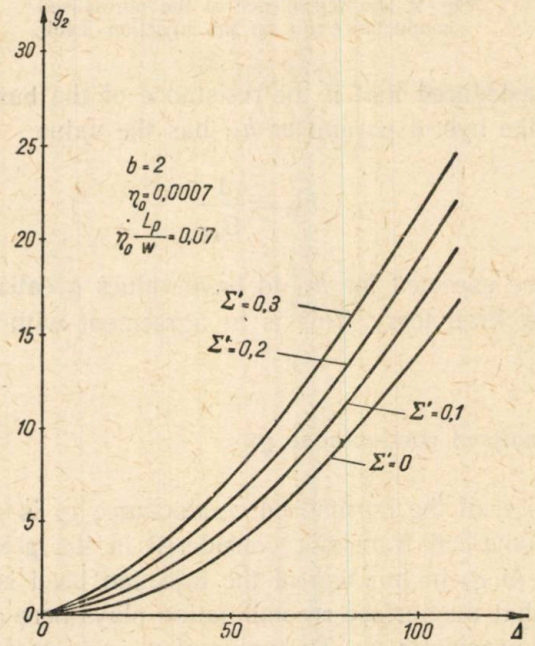


Fig. 4. The dependence of the normalised conductance g_2 on the injection level.

It easy to proof that the hybrid parameter h_{21} has the value (by comparison of the equations (31) — (32) with the equations for the hybrid quadripole)

$$|h_{21}| = 1 - \frac{G_2}{G_{11}} = 1 - \frac{g_2}{g_{11}} \tag{46}$$

The parameter h_{21e} (common emitter) will be then,

$$h_{21e} = \frac{|h_{21}|}{1 - |h_{21}|} = \frac{g_{11}}{g_2} - 1 \tag{47}$$

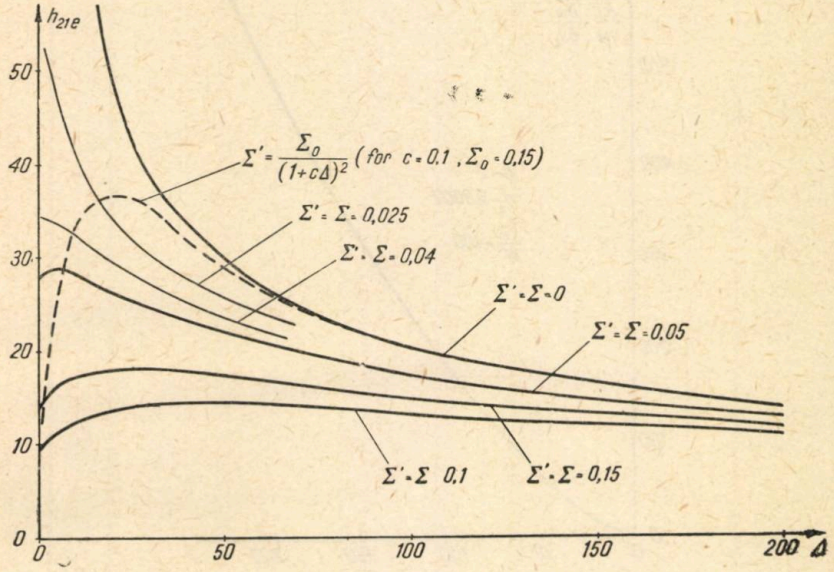


Fig. 5. The dependence of the current amplification factor h_{21} on the injection level.

For the numerical transistor considered before, in fig. 5 is represented the variation of h_{21e} with the injection level for constant values of the surface parameter *.

$$\Sigma = 0,025\ ;\ 0,04\ ;\ 0,05\ ;\ 0,1\ ;\ 0,15$$

It is to be noted that the surface recombination strongly affects h_{21e} at intermediate injection levels but not so much at very high injection levels. Although the effects of the electric field and surface recombination are explainig the dependence of h_{21e} on the injection level (and therefore on the emitter current) — see the curves for $\Sigma' = \Sigma > 0,05$ in fig. 5 — a better approach to the well known experimental results may be obtained

* It was noted that for then $\Sigma = \text{const.}$, then $\Sigma' = \Sigma = \text{const.}$

if it is supposed that Σ is depending on the injection level [5] [6]. If [6]

$$\Sigma = \frac{\Sigma_0}{1 + e\,\Delta}$$

where Σ_0 is the value of the surface parameter at $s = 0$ and c is a constant, Then

$$\Sigma' = \frac{d}{d\,\Delta}(\Sigma\,\Delta) = \frac{\Sigma_0}{(1 + c\,\Delta)^2} \tag{49}$$

In fig. 5 the dotted curve represents the variation of h_{21e} supposing that in equation (49), $\Sigma_0 = 0{,}15$ and $c = 0{,}1$.

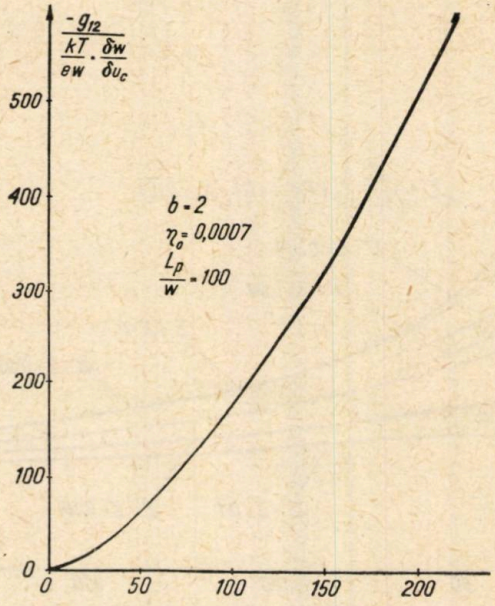


Fig. 6. The dependence of normalised conductance g_{12} on the injection level.

From fig. 5 it may be seen how the calculated curves for $\Sigma = \text{const.}$ may be used to deduce the variation of h_{21e} when Σ is decreasing with the injection level. The result is that at low currents h_{21e} may know a stronger variation than previously calculated (for $\Sigma = \text{const.}$) This is in agreement with the experimental facts [5].

6. **The normalised conductance g_{12}.**

The expression for the normalised conductance g_{12}, with the values of $\frac{\partial f_a}{\partial \xi}$ and $\frac{\partial \xi}{\partial w}$ from (34) and (37) becomes,

$$g_{12} = -\frac{KT}{ew} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u_c}\right) F_b \tag{50}$$

where

$$F_b = 2(1+2\Delta)\frac{\eta_0 \frac{L_p}{w}\Delta}{16\xi} \tag{51}$$

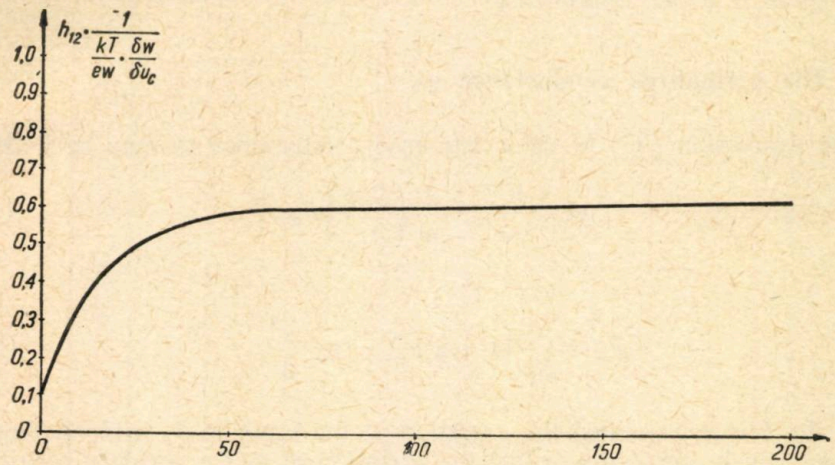


Fig. 7. The dependence of the hybrid parameter h_{12} on the injection level.

Because the quantity $\frac{KT}{ew}\cdot\frac{\partial w}{\partial u_c}$ is not depending on the emitter current but only on the collector potential, the quantity.

$$-\frac{g_{12}}{\frac{KT}{ew}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial \mu_c}\right)} = \frac{\eta_0 \frac{L_p}{w}\Delta}{16\xi}$$

shows only the relative variation of g_{12} with the injection level (or with the emitter current).

In fig. 6 is represented this dependence for the „numerical transistor" considered previously.

It easy to proof that the inverse amplification factor (BM) of a transistor has the expression.

$$h_{12} = -\frac{G_{12}}{G_{11}} = -\frac{g_{12}}{g_{11}}$$

In fig. 7 is represented the quantity $h_{12}\Big/\frac{KT}{ew}\cdot\frac{\partial w}{\partial u_c}$ in function of the injection level. It may be seen that h_{21} (at constant collector voltage) knows

a strong encrease with the injection level at intermidiate levels and after that follows a slower encrease. This is also in agreement with the experimental facts [5]. It is to be noted that the theory of Webster-Rittner-Misawal-Meyer [5] predicts a relatively stronger encrease also at high injection levels. (It seems that at really high injection levels the present theory gives a better approach.)

7. The normalised conductance g_3.

The expression (26) of the normalised conductance g_3 may be written

$$g_3 = \frac{KT}{e} \cdot \frac{1}{w} \left(\frac{\partial w}{\partial u_c} \right) F_d \tag{54}$$

where

$$F_d = \frac{w}{L_p} (1 + \xi^2) \Delta - \eta_0 \frac{\Delta^2}{8} \tag{55}$$

In fig. 8 is represented the variation of the function F_d with the injection level, which represents in fact the variation of g_3 (at constant collector

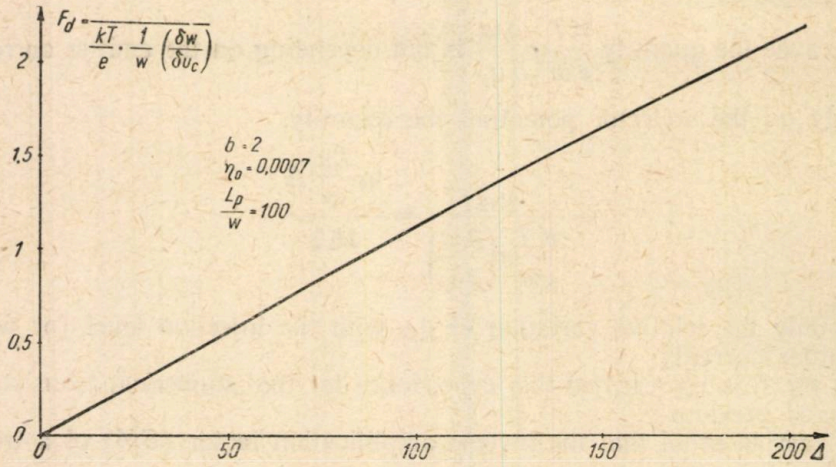


Fig. 8. The dependence of the normalised conductance g_3 on the injection level

voltage) It may be seen that g_3 encreases almost linearly with the injection level. It may be also easily verifyied that G_3 represents the conductance collector-base in the equivalent natural circuit of Giacolette. Experimentally one obtaines really an encrease of this conductance with the injection level (or with the emitter current).

8. Conclusions.

In fig. 9 is presented a complete equivalent representation for the transistor in which r represents the resistance of the base material, and g a leakage conductance. From this circuit governed by the equations

$$d j_1 = d j_e = G_{11} d u_e + G_{12} d u_c \tag{56}$$

$$d j_2 = - d j_c = (G_{11} - G_2) d u_e + G_{12} d u_e \tag{57}$$

$$d u_1 = d u_e + \lambda_{bb'} (d j_1 + d j_2) \tag{58*}$$

$$d u_2 = d u_c + \lambda_{bb'} (d j_1 + d j_2) \tag{59}$$

any equivalent circuit for the transistor may be derived. Thus, the parameters of any usual equivalent circuit are depending on the general parameters G_{11}, G_{12}, G_2 and G_3 analysed in the preceedings paragraphs and on $r_{bb'}$ (also on g_c when this is taken into account).

In this work, general expressions for the parameters G_{11}, G_{12}, G_2 and G_3 were obtained schowing the dependence of these parameters on the einer vorherigen Abhandlung Verfassers betreffend den stationären on u_e). The dependence on u_c was not analysed because the results are similar with those derived from the small level theory [4]. Only the

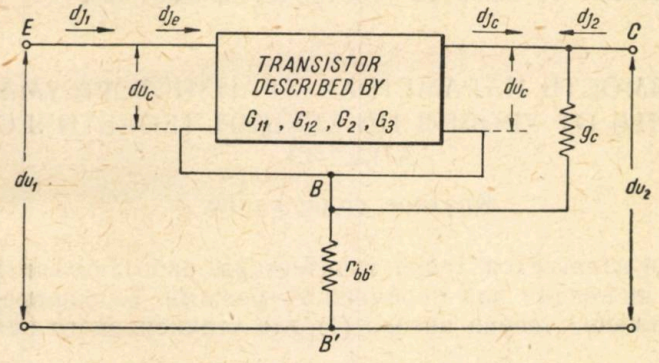


Fig. 9. An equivalent representation for the transistor.

dependence of the parameters on the emitter current is not explained by the small level tehory of the transistor.

The present theory (at high injection levels) describes qualitatevely well the experimental facts. Also the theory of Webster-Rittner-Misawa-Meyer [5] describes qualitatevely well the experimental facts.

In any case the formulation of the present theory, such as presented in references [2] [1] [3] seems to have a more rigorous basis.

* With g_c neglected.

References

1. *M. Drăgănescu:* Contributions to the theory of the junction transistor at high injection levels. Buletinul Institutului Politehnic București 23 (1961), 161.
2. *A. W. Matz:* A modification of the theory of the variation of junction transistor current gain with operating point and frequency. Journal of electronics and control 7 (1959) Aug. nr. 2, 133—152.
3. *M. Drăgănescu:* On the MATZ theory of the junction transistor at high injection levels. Journal of electronics and control, 8 (1960), nr. 6, 459—462.
4. *A. W. Lo, R. O. Endres, J. Zawels:* Transistor electronics, Prentice Hall, 1956.
5. *N. I. Meyer:* On the variation of transistor small signal parameters with emitter current and collector voltage Journal of electronics and control 4 (1958) nr. 4, 305—334.
6. *M. Drăgănescu:* Notă asupra teoriei tranzistorului la nivele mari de injecție (Dependența vitezei de recombinare de suprafață de nivelul de injecție în regiunea bazei unui tranzistor). Studii și cercetări de fizică 12 (1961), nr. 4, 815—820.

ЗАВИСИМОСТЬ ПАРАМЕТРАХ ТРАНЗИСТОРА (МАЛЫЕ СИГНАЛЫ) ОТ УРОВНЯ ИНЖЕКЦИЙ. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Краткое содержание

В статье излагается теоря транзистора, работающего при высоких уровнях инжекций для переменного режима. Теория представляет собой продолжение теории автора (1) для стационарного режима.

THE DEPENDENCE OF THE SMALL SIGNAL A. C. PARAMETERS OF A JUNCTION TRANSISTOR ON THE INJECTION LEVEL, A THEORETICAL APPROACH

(Summary)

In this work is presented a theoretical analysis of the junction transistor at high injection levels with respect to the a. c. regim. The theory is a continuation of a previous work of the author [1] with respect to the d. c. regim.

LA DEPENDANCE DES PARAMETRES (POUR PETITS SIGNAUX) DU TRANSISTOR A JONCTIONS EN FONCTION DU NIVEL D'INJECTION. ANALYSE THEORETIQUE

(Sommaire)

On expose une theorie du transistor aux grandes niveaux d'injection pour le regime variabe, qui este une continuation du theorie de l'auteur [1] pour le regime stationaire.

ABHANGIGKEIT DER WECHSELSTROM-KLEINSIGNAL-PARAMETER EINES TRANSISTORS VOM INJEKTIONSNIVEAU. THEORETISCHE UNTERSUCHUNG

(Zusammenfassung)

Es wird eine Theorie des Transistors bei hohen Injectionsniveaus für den Wechselstrombetrieb dargelgt. Diese Theorie ist eine Fortsetzung einer vorherigen Abhandlung des Verfassers betreffend den stationären Betrieb.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXIII — 1961, Fascicola IV

UN PROCEDEU NOU DE DESCOMPUNERE A SEMNALELOR

VASILIU CRISTOFOR

Teorema sondajelor descompune un semnal ce are spectrul limitat între O și F într-o sumă de semnale elementare ponderate, sub forma :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\tau) \frac{\sin \cdot 2\pi F(t - n\tau)}{2\pi F(t - n\tau)} \tag{1}$$

cu $\tau = \frac{1}{2F}$. Ansamblul funcțiilor $\frac{\sin \cdot 2\pi F(t - n\tau)}{2\pi F(t - n\tau)}$ cu $n = 0, \mp 1, \mp 2 + \ldots$ constituie un sistem de funcții ortogonale pe întreaga axă reală, iar relația (1) este dezvoltarea lui $g(t)$ în serie Fourier relativă la acest sistem.

Se cunosc avantajele acestei descompuneri. Printre altele, ea permite ca integralele să fie înlocuite cu sume, ceea ce poate simplifica mult calculele. De ex. :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot dt = \tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\tau); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) \cdot dt = \tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g^2(n\tau) \tag{2}$$

Această simplificare este folosită pentru calculul distorsiunilor liniare, la studiul regimului tranzitoriu, etc.

În cele ce urmează se caută a se obține o descompunere analoagă a semnalelor, fără ca acestea să fie supuse la restricția de a fi cu spectru limitat.

1. Sistemul de funcții și ortogonalitatea lui.

Vom lua ca semnal elementar de bază funcția $u_{mo}(t)$ ce are spectrul de frecvență constant și egal cu $\tau = \frac{1}{2F}$ în intervalul de frecvențe $mF \leqslant |f| \leqslant (m(+1)F$ și nul în rest, adică :

$$u_{mo}(t) = \tau \int_{-(m+1)F}^{-mF} e^{j2\pi tf}\, df + \tau \int_{mF}^{(m+1)F} e^{j2\pi tf}\, df =$$

$$= \frac{\sin \cdot 2\pi (m+1) F t - \sin \cdot 2\pi m F t}{2\pi F t} \tag{3}$$

Atunci sistemul de funcții elementare folosit va fi:

$$u_{mn}(t) = u_{mo}(t - n\tau) = \frac{\sin \cdot 2\pi (m+1) F(t - n\tau) - \sin \cdot 2\pi m F(t - n\tau)}{2\pi F(t - n\tau)} \tag{4}$$

cu $\tau = \frac{1}{2F}$; $m = 0, 1, 2, \ldots$ și $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$

Sistemul de funcții (4) este ortogonal pe întreaga axă reală, adică

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{p\alpha}(t) \cdot u_{q\beta}(t)\, dt = 0 \text{ pentru } p \neq q \text{ sau } \alpha \neq \beta \tag{5}$$

Pentru a arăta aceasta să considerăm integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{p\alpha}(t) \cdot u_{q\beta}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \cdot 2\pi (p+1) F(t - \alpha\tau) - \sin 2\pi p F(t - \alpha\tau)}{2\pi F(t - \alpha\tau)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin \cdot 2\pi (q+1) F(t - \beta\tau) - \sin \cdot 2\pi q F(t - \beta\tau)}{2\pi F(t - \beta\tau)}\, dt \tag{6}$$

Ea se descompune în patru integrale de forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \cdot 2\pi p F(t - \alpha\tau) \cdot \sin \cdot 2\pi q F(t - \beta\tau)}{(2\pi F t - \alpha\pi)(2\pi F t - \beta\pi)}\, dt =$$

$$= (-1)^{p\alpha + q\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \cdot 2\pi p F t \cdot \sin 2\pi q F t}{(2\pi F t - \alpha\pi) \cdot (2\pi F t - \beta\pi)}\, dt \tag{7}$$

Să facem schimbarea de variabilă $2\pi Ft = y$. Integrala (7) devine:

$$\frac{(-1)^{p\alpha + q\beta}}{2\pi F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \cdot py \cdot \sin qy}{(y - \alpha\pi)(y - \beta\pi)}\, dy \tag{8}$$

Să considerăm $\alpha \neq \beta$, și să punem

$$\frac{1}{(y - \alpha\pi)(y - \beta\pi)} = \frac{1}{(\alpha - \beta)\pi} \left(\frac{1}{y - \alpha\pi} - \frac{1}{y - \beta\pi} \right)$$

Integrala (8) se descompune în două integrale de forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin py \cdot \sin qy}{y - \alpha\pi}\, dy = (-1)^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px \cdot \sin qx}{x}\, dx = 0$$

Așadar, integrala (6) este nulă pentru $\alpha \neq \beta$.

Să considerăm acum $\alpha = \beta = n$. Integrala (8) devine:

$$\frac{(-1)^{(q+p)n}}{2\pi F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin p q \cdot \sin q y}{(y - n\pi)^2} \, dy \tag{9}$$

Cu schimbarea de variabilă $y = x + n\pi$, (9) devine [1]:

$$\frac{1}{2\pi F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin p x \cdot \sin q x}{x^2} \, dx = \begin{cases} \frac{p}{2F} \text{ pentru } p \leqslant q \\ \frac{q}{2F} \text{ pentru } q \leqslant p \end{cases} \tag{10}$$

Introducînd acest rezultat în (6) obținem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{pn}(t) \cdot u_{qn}(t) \, dt = \begin{cases} O \text{ pentru } p \neq q \\ \frac{1}{2F} = \tau \text{ pentru } p = q \end{cases} \tag{11}$$

Prin urmare, integrala (6) este diferită de zero numai cînd $\alpha = \beta$ și, în același timp, $p = q$, ceea ce demonstrează ortogonalitatea sistemului de funcții (4).

2. Completudinea sistemului (4) pentru ansamblul funcțiilor ce posedă o transformată Fourier.

Să arătăm acum că orice funcție reală $g(t)$ ce posedă o transformată Fourier $G(f)$ se poate descompune după sistemul de funcții (4), adică putem scrie: [1])

$$g(t) = \sum_{mn} a_{mn} \cdot u_{mn}(t) \tag{12}$$

Pentru aceasta vom descompune pe $g(t)$ astfel:

$$g(t) = \sum_{m} g_m(t) \text{ cu } m = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

cu

$$g_m(t) = \int_{-(m+1)F}^{-mF} G(f) \cdot e^{j2\pi t f} \, df + \int_{mF}^{(m+1)F} G(f) \cdot e^{j2\pi f t} \, df \tag{14}$$

Adică spectrul $G_m(f)$ este egal cu $G(f)$ pentru $mF \leqslant |f| \leqslant (m+1)F$ și nul în rest. Să considerăm prelungirea periodică a lui $G_m(f)$ cu perioada $2F$ și s-o descompunem în serie Fourier:

$$\sum_{i} G_m(f - i2F) = \sum_{n} A_n \cdot e^{-j2\pi n \tau f} \tag{15}$$

$$\text{cu } A_n = \tau \int_{-(m+1)F}^{-mF} G(f) \cdot e^{j2\pi n \tau f} \, df + \tau \int_{mF}^{(m+1)F} G(f) \cdot e^{j2\pi n \tau f} \, df = \tau g_m(n\tau) \tag{16}$$

---

[1]) Desigur că $g(t)$ poate diferi de $\sum_{mn} a_{mn} \cdot u_{mn}(t)$ cu o cantitate finită, într-un număr de puncte numărabil, ceea ce are loc și pentru descompunerea Fourier.

Din (14), (15) și (16) rezultă :

$$g_m(t) = \int_{-(m+1)F}^{-mF} e^{j2\pi tf} \cdot \sum_n A_n \cdot e^{-j2\pi n\tau f}\, df + \int_{mF}^{(m+1)F} e^{j2\pi tf} \cdot \sum_n A_n e^{-j2\pi n\tau f}\, df =$$

$$= \tau \sum_n g_m(n\tau) \cdot \int_{-(m+1)F}^{-mF} e^{j2\pi(t-n\tau)f}\, df + \tau \sum_n g_m(n\tau) \cdot \int_{mF}^{(m+1)F} e^{j2\pi(t-n\tau)f}\, df \quad (17)$$

Efectuînd integrala (17) obținem :

$$g_m(t) = \sum_n g_m(n\tau) \frac{\sin \cdot 2\pi(m+1)F(t-n\tau) - \sin \cdot 2\pi mF(t-n\tau)}{2\pi F(t-n\tau)} =$$

$$= \sum_n g_m(n\tau) \cdot u_{mn}(t) \quad (18)$$

Relația (13) devine atunci :

$$g(t) = \sum_{mn} g_m(n\tau) \cdot u_{mn}(t) \quad (19)$$

identică cu (12), dacă punem

$$a_{mn} = g_m(n\tau) \quad (20)$$

Descompunerea (12) este prin urmare justificată.

Se poate observa că dacă $G(f)$ este nul pentru $|f| > F$, egalitatea (19) se reduce la

$$g(t) = \sum_n g_o(n\tau) \cdot u_{on}(t) = \sum_n g(n\tau) \frac{\sin \cdot 2\pi F(t-n\tau)}{2\pi F(t-u\tau)} \quad (21)$$

adică la descompunerea dată de teorema sondajelor.

Aplicații.

Să considerăm acum cîteva din aplicațiile posibile ale descompunerii prezentate.

Să observăm de la început că frecvența F este arbitrară. Alegerea ei este o chestiune de comoditate și va depinde de problema particulară pe care o tratăm.

Determinarea coeficienților a_{mn} se poate face fie din egalitatea

$$a_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot u_{mn}(t)\, dt \quad (22)$$

justificată de ortogonalitatea sistemului de funcții elementare, fie din relația următoare (ce rezultă din (14) și (20)) :

$$a_{mn} = g_m(n\tau) = \int_{-(m+1)F}^{-mF} G(f) \cdot e^{j2\pi n\tau f}\, df + \int_{mF}^{(m+1)F} G(f) \cdot e^{j2\pi n\tau f}\, df \quad (23)$$

Să evaluăm integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$. Descompunînd pe $g(t)$ vom avea:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{mn} a_{mn} \times u_{mn}(t)\,dt = \sum_{mn} a_{mn} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{mn}(t)\,dt \qquad (24)$$

Una din funcțiile elementare integrată ne va da:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{mn}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \cdot 2\pi (m+1) F (t - n\tau) - \sin \cdot 2\pi m F (t - n\tau)}{2\pi F (t - n\tau)}\,dt =$$

$$= (-1)^{(m+1)n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \cdot 2\pi (m+1) F t}{2\pi F t - n\pi}\,dt - (-1)^{mn} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \cdot 2\pi m F t}{2\pi F t - n\pi}\,dt \qquad (25)$$

Să considerăm a doua integrală din (25) și să punem $2\pi Ft - n\pi = \frac{x}{m}$

$$(-1)^{mn} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \cdot 2\pi m F t}{2\pi F t - n\pi}\,dt = \frac{(-1)^{2mn}}{2\pi F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \cdot x}{x}\,dx = \frac{1}{2F} = \tau \qquad (26)$$

Prin urmare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_{mn}(t)\,dt = \begin{cases} o \text{ pentru } m \neq 0 \\ \tau \text{ pentru } m = 0 \end{cases} \qquad (27)$$

iar (24) devine:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \tau \sum_{n} a_{on} \qquad (28)$$

Tot așa, ținînd seama de ortogonalitatea sistemului (4) obținem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{mn} a_{mn} \cdot u_{mn}(t)\right]^2 dt = \sum_{n\,n} a_{mn}^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u_{mn}^2(t)\,dt$$

sau, cu rezultatul obținut în (11):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt = \tau \sum_{mn} a_{mn}^2 \qquad (29)$$

Să folosim acum descompunerea pentru calculul răspunsului rețelelor liniare. Fie o rețea cu caracteristica de transfer $S(f)$ și cu răspunsul la impulsul unitar $s(t)$, adică

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi tf}\,df \qquad (30)$$

Fie apoi $g(t)$ semnalul aplicat acestei rețele și $h(t)$ răspunsul căutat. Obținem acest răspuns efectuînd integrala

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) \cdot s(t-\theta)\, d\theta \tag{31}$$

Să descompunem funcțiile $g(\theta)$ și $s(t-\theta)$ după relațiile (13) și (14):

$$h(\theta) = \sum_p g_p(\theta) \text{ și } s(t-\theta) = \sum_q s_q(t-\theta)$$

Avem atunci pentru (31):

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\sum_p g_p(\theta)] \cdot [\sum_q s_q(t-\theta)]\, d\theta \tag{33}$$

Însă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_p(\theta) \cdot s_q(t-\theta)\, d\theta = 0 \text{ peniru } p \neq q \tag{34}$$

și deci

$$h(t) = \sum_m h_m(t) = \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} g_m(\theta) \cdot s_m(t-\theta)\, d\theta \tag{35}$$

cu

$$h_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_m(\theta) \cdot s_m(t-\theta)\, d\theta \tag{36}$$

Să descompunem acum pe $h_m(t)$, $g_m(t)$ și $s_m(t)$ după (18):

$$h_m(t) = \sum_n h_m(n\tau) \cdot u_{mn}(t) = \sum_n c_{mn} \cdot u_{mn}(t) \tag{37}$$

$$g_m(t) = \sum_\alpha g_m(\alpha\tau) \cdot u_{m\alpha}(t) = \sum_\alpha a_{m\alpha} \cdot u_{m\alpha}(t) \tag{38}$$

$$s_m(t) = \sum_\beta s_m(\beta\tau) \cdot u_{m\beta}(t) = \sum_\beta b_{m\beta} \cdot u_{m\beta}(t) \tag{39}$$

Dar $s_m(t-\theta) = \sum_\beta b_{m\beta} \cdot u_{m\beta}(t-\theta)$

și fiindcă $u_{m\beta}(x) = u_{m,-\beta}(-x)$ avem:

$$s_m(t-\theta) = \sum_\beta s_m(\beta\tau) \cdot u_{m-\beta}(\theta - t) = \sum_\beta b_{m\beta} \cdot u_{m-\beta}(\theta - t) \tag{40}$$

Din (36), (38) și (40) obținem atunci:

$$h_m(n\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\sum_\alpha a_{m\alpha} \cdot u_{m\alpha}(\theta)] \cdot [\sum_\beta b_{m\beta} \cdot {}_{m,n-\beta}(\theta)]\, d\theta \tag{41}$$

După (11) însă, integralele pentru $\alpha \neq n - \beta$ sînt nule și deci:

$$h_m(n\tau) = \tau \sum_\alpha a_{m\alpha} \cdot b_{m,n-\alpha} = c_{mn} \tag{42}$$

Prin urmare răspunsul căutat este dat de egalitatea :

$$h(t) = \sum_{mn} c_{mn} \cdot u_{mn}(t) \tag{43}$$

coeficienții c_{mn} ai descompunerii lui $h(t)$ fiind legați de coeficienții descompunerii lui $g(t)$ prin relația (42).

Să exprimăm acum procesul translației de frecvență (modulația de amplitudine cu bandă laterală unică). Fie semnalul $g_0(t)$ cu spectrul de frecvențe nul pentru $|f| > F$ și să-l modulăm cu purtătoarea $s(t)$ de frecvență $2kF$ (k întreg) :

$$s(t) = M \cdot \cos 2\pi 2kFt = \frac{M}{2}(e^{j2\pi 2kFt} + e^{-j2\pi 2kFt}) \tag{44}$$

Transformata Fourier $S(f)$ a acestei purtătoare va fi :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt = \frac{M}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-2kF)t}\, dt + \\ + \frac{M}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f+2kF)t}\, dt = \frac{M}{2}[\delta(f - 2kF) + \delta(f + 2kF)] \tag{45}$$

Semnalul modulat (două benzi laterale fără purtătoare) $h(t)$ va fi :

$$h(t) = g_o(t) \cdot s(t) \tag{46}$$

Folosind teorema convoluției, vom avea pentru transformata Fourier $H(f)$ a lui $h(t)$:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_o(x) \cdot S(f - x)\, dx = \frac{M}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_o(x) \cdot \delta(f - x + 2kF)\, dx + \\ + \frac{M}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_o(x) \cdot \delta(f - x - 2kF)\, dx = \frac{M}{2} G_o(f + 2kF) + \frac{M}{2} G_o(f - 2kF) \tag{47}$$

Fie acum $g_{2k}(t)$ semnalul corespunzător benzii laterale superioare. Să descompunem pe $g_o(t)$ și $g_{2k}(t)$:

$$g_o(t) = \sum_n g_o(n\tau) \cdot u_{on}(t) = \sum_n a_{on} \cdot u_{on}(t) \\ g_{2k}(t) = \sum_n g_{2k}(n\tau) \cdot u_{2kn}(t) = \sum_u c_{2kn} \cdot u_{2kn}(t) \tag{48}$$

Deoarece $G_{2k}(f)$, pentru $2kF \leqslant |f| \leqslant (2k+1)F$, este egal cu $\frac{M}{2} G_o(f)$ pentru

$O \leqslant | f | \leqslant F$, relațiile (14), (16) și (18) ne dau coeficienții descompunerii lui $g_{2k}(t)$ funcție de cei ai descompunerii lui $g_0(t)$:

$$g_{2k}(n\tau) = \frac{M}{2} g_o(n\tau) \text{ și } c_{2kn} = a_{on} \tag{49}$$

Tot așa pentru semnalul $g_{2k-1}(t)$ corespunzător benzii laterale inferioare, obținem :

$$g_{2k-1}(n\tau) = \frac{M}{2} g_o(n\tau) \tag{50}$$

Prin urmare, sondajele efectuate la intervale $\tau = \frac{1}{2F}$ asupra semnalului modulator $g_o(t)$ și celui translatat în frecvență $g_{2k}(t)$ sau $g_{2k-1}(t)$ dau aceleași valori (abstracție făcînd de un factor de proporționalitate constant), cu condiția ca originea să fie un punct de sondare.

Este evident că dacă faza inițială a purtătoarei nu este nulă, egalitățile (49) și (50) nu mai au loc, iar coeficienții c_{2kn} se obțin din coeficienții a_{on} printr-o tarnsformare liniară de felul celei din (42). Fie faza inițială a acestei purtătoare φ_0, adică $s(t) = M \cdot \cos(2\pi 2kFt + \varphi_0)$, și $g_{2k}(t)$ semnalul corespunzător benzii laterale superioare în acest caz. Repetînd raționamentele de mai sus găsim :

$$g_{2k}(t) = \sum_n g_{2k}(n\tau + t_0) \cdot u_{2kn}(t - t_0) = \sum_n g_o(n\tau + t_0) \cdot u_{2kn}(t - t_0) \tag{51}$$

$$\text{cu } t_o = \frac{\varphi_0 \pm 2i\pi}{2\pi 2kF} \ (i \text{ întreg})$$

Rezultă că dacă sondăm semnalul modulator $g_0(t)$ și cel translatat în frecvență $g_{2k}(t)$ sau $g_{2k-1}(t)$ la intervale $\tau = \frac{1}{2F}$ (purtătoarea avînd frecvența un multiplu întreg de $2F$), găsim valori egale atunci cînd punctele de sondare sînt puncte de maxim ale purtătoarei.

Dacă frecvența purtătoarei f_p nu-i un multiplu întreg, par, al frecvenței superioare f_0 a semnalului modulator, atunci se poate alege pentru F una din valorile (de preferat cea mai mică) ce satisfac inegalitatea :

$$F = \frac{f_p}{2k} \leqslant f_o \tag{52}$$

În încheiere să facem observația că dacă împărțim planul timp-frecvență în dreptunghiuri prin paralele la axa timpului distanțate cu F și la axa frecvențelor distanțate cu $\tau = \frac{1}{2F}$, putem asocia acestor dreptunghiuri coeficienții a_{mn} ai descompunerii lui $g(t)$. Un semnal ce are o energie neglijabilă în afara unui interval de timp T și în afara unei benzi de frecvență Φ, va avea coeficienții a_{mn} neglijabili în afara suprafeței

$T\Phi$ şi atunci semnalul va fi specificat de $2T\Phi$ numere. Fiecare semnal elementar $u_{mn}(t)$ va fi format din frecvenţe cuprinse numai între paralela m şi $m+1$, şi va apare la momentul corespunzător paralelei n. Reamintim că distanţa τ între două paralele la axa frecvenţelor este la alegerea noastră, distanţa între două paralele la axa timpului fiind $F = \frac{1}{2\tau}$, astfel încît totdeauna numărul de dreptunghiuri este $2T\Phi$.

CR. VASILIU

BIBLIOGRAFIE

[1] *I. M. Rijic* şi *I. C. Gradştein*, — „Tabliţî integralov" — Moscova-Leningrad, 1951, pag. 195.

ДРУГОЙ СПОСОБ РАЗЛОЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Краткое содержание

Расматривается способ разложения сипнала д(t) в элементарные сигналы, аналогичный способу данным теоремой отсчетов, но без требования чтобы д(t) был ограничен по частоте. Показываются несколько приложений предлагаемого разложения.

ANOTHER METHOD OF SIGNALS DECOMPOSITION

(Summary)

A method is showen, by means of which a signal $g(t)$ may be decomposed in elementary components. The method is similar to that given by the Sampling principle, but the Signal $g(t)$ is not constrained to be band-limited.

Some possibble uses of the method are also showen.

UN AUTRE PROCÉDÉ DÉCOMPOSITION DES SIGNAUX

(Résumé)

In présente un procédé de décomposition d'un signal $g(t)$ en composantes élémentaires, analogue à celui donnée par le théorème de l'échantillonnage, mais sans kue $g(t)$ soit supposé à spectre borné. On indicre quelques applications possibles de cette décomposition.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁR 1883

EIN ANDERES VERFAHREN ZUR SIGNALZERLEGUNG

(Zusammenfassung)

Es wird ein Verfahren beschrieben, ein Signal $g(t)$ in elementare Signale zu zerlegen, Welches dem durch das Abtasttheorem gegebenen änlich ist, wobei aber das Spektrum des Signals $g(t)$ nicht begrenzt ist. Es worden einige Anwendungen dieser Zerlegung angegeben.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1883

LITOGRAFIA ŞI TIPOGRAFIA
INVĂŢĂMINTULUI — c. 3199

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În contnuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de pronume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.